Caso ao final da integração do primeiro e do segundo membro do lado direito da equação (101) seja adicionada a constante de integração, obtemos, diretamente, a solução **Geral** da E.D.O. não homogênea:

$$\boxed{y(x) = y_1 \cdot \int \frac{r(x) \cdot y_2 \, dx}{W(y_1, y_2)} + y_1 \cdot C_1 + y_2 \cdot \int \frac{-r(x) \cdot y_1}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \cdot C_2} \qquad (102)$$

sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias.

Equação de Euler-Cauchy

A equação Euler-Cauchy é uma E.D.O. linear homogênea a coeficientes não constantes.

A E.D.O. Euler-Cauchy é da forma:

$$x^2 \cdot y''(x) + a \cdot x \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0 \qquad (103)$$

sendo a e b constantes. Para achar uma solução da equação (103), vamos proceder com a seguinte modificação:

$$y(x) = x^m \qquad (104)$$

Derivando a equação (104) em relação a x, obtemos:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y' = m \cdot x^{m-1} \qquad (105)$$

e

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = y'' = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \qquad (106)$$

Substituindo as equações (104), (105) e (106) na equação (103), chegamos à:

$$x^2 \cdot m(m-1) \cdot x^{m-2} + a \cdot x \cdot m \cdot x^{m-1} + b \cdot m \cdot x^m = 0. \qquad (107)$$

Veja que x^m é um termo comum em toda a equação (107). Dividindo-se a equação (107) por x^m, obtemos:

$$m(m-1) + a \cdot m + b \cdot m = 0 \Rightarrow m^2 + (a-1) \cdot m + b = 0 \qquad (108)$$

Portanto, $y = x^m$ será solução da equação (103) se e somente se m for raiz da equação (108). Assim, a solução da equação (108) será dada por:

$$m = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4.b}}{2} \quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{-(a-1) + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} = \dfrac{-(a-1) + \sqrt{\Delta}}{2} \\ m_2 = \dfrac{-(a-1) - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} = \dfrac{-(a-1) - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

Assim, nesse caso, para diferentes a e b, podemos ter as seguintes situações:

(1) Raízes reais e distintas, ou seja, $\Delta > 0$;

(2) Raízes reais e iguais, ou seja, $\Delta = 0$;

(3) Raízes complexas conjugadas, ou seja, $\Delta < 0$.

A seguir, vamos explorar as características das soluções obtidas para os três casos acima.

Caso 1: Quando temos duas raízes reais distintas ($\Delta > 0$):

A solução geral da E.D.O. será:

$$y(x) = C_1 . x^{m_1} + C_2 . x^{m_2} \qquad (109)$$

sendo C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias.

Caso 2: Quando temos duas raízes iguais ($\Delta = 0$):

Dessa forma, teremos: $m_1 = m_2 = \frac{(1-a)}{2}$. Logo, uma solução será: $y_1(x) = x^{\frac{(1-a)}{2}}$. A segunda solução linearmente independente pode ser obtida utilizando-se o método da redução de ordem. O método ainda não foi mostrado no curso e será, então, aqui apresentado. Inicialmente, tomamos a seguinte relação: $y_2 = u . y_1$, sendo y_2 a segunda solução linearmente independente procurada e y_1 a primeira solução obtida. $u(x)$ é uma função de x. Derivando-se y_2, obtemos:

$$y_2' = u' . y_1 + u . y_1' \quad \text{e} \quad y_2'' = u'' . y_1 + u' . y_1' + y_1'' . u + y_1' . u' = u'' . y_1 + 2 u' . y_1' + y_1'' . u$$

Substituindo y_2, y_2' e y_2'' na equação (103), obtemos:

$$x^2 . (u'' . y_1 + 2 . u' . y_1' + y_1'' . u) + a . x . (u' . y_1 + y_1' . u) + b . u . y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 . u'' . y_1 + 2 . u' . y_1' . x^2 + y_1'' . u . x^2 + a . x . u' . y_1 + a . x . y_1' . u + b . u . y_1 = 0$$

$$y_1'' . u . x^2 + a . x . y_1' . u + b . u . y_1 + x^2 . u'' . y_1 + 2 . u' . y_1' . x^2 + a . x . u' . y_1 = 0$$

$$u . (x^2 . y_1'' + a . x . y_1' + b . y_1) + x^2 . u'' . y_1 + 2 . u' . y_1' . x^2 + a . x . u' . y_1 = 0 \qquad (110)$$

Repare que o termo pontilhado na equação (110) é a equação (103). Portanto, a equação (110) reduz-se à:

$$x^2 \cdot u'' \cdot y_1 + 2 \cdot u' \cdot y_1' \cdot x^2 + a \cdot x \cdot u' \cdot y_1 = 0 \qquad (111)$$

Dividindo-se a equação (111) por $x^2 \cdot y_1$, chegamos à:

$$u'' + 2 \cdot u' \cdot \frac{y_1'}{y_1} + a \cdot x^{-1} \cdot u' = 0 \qquad (112)$$

Agrupando-se os termos da equação (112), obtemos:

$$u'' + \left(2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} + a \cdot x^{-1}\right) \cdot u' = 0 \qquad (113)$$

A equação (113) é uma E.D.O. de 2ª ordem que pode ser reduzida de ordem para facilitar a resolução da mesma: No método da redução da ordem, atribuímos igualdade a função u', com uma função v. Logo, $u' = v$, substituído na equação (113), nos fornecerá:

$$v' + \left(2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} + a \cdot x^{-1}\right) \cdot v = 0 \qquad (114)$$

A equação (114) é uma E.D.O. de primeira ordem separável que se escrita na forma explícita ficará:

$$v' = -\left(2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} + a \cdot x^{-1}\right) \qquad (115)$$

A equação (115) pode ser resolvida por simples integração:

$$\frac{dv}{dx} = -\left(2 \cdot \frac{y_1'}{y_1} + a \cdot x^{-1}\right) \cdot v \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -\left(2 \cdot \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{1}{y_1} + a \cdot x^{-1}\right) \cdot v \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(2 \cdot \frac{dy_1}{y_1} + a \cdot x^{-1} \cdot dx\right) \Rightarrow$$

$$\ln|v| = \int \frac{dv}{v} = \int -2 \cdot \frac{dy_1}{y_1} + \int -\frac{a}{x}\, dx \Rightarrow \ln|v| = -\ln|y_1| + (-a) \cdot \ln|x| \Rightarrow$$

$$e^{\ln|v|} = e^{-2 \ln|y_1|} \cdot e^{-a \cdot \ln|x|} \Rightarrow v = \frac{1}{y_1^2} \cdot \frac{1}{x^a}. \text{ Como } y_1 = x^{(1-a)/2}, \text{ então:}$$

$$v = \frac{1}{x^{2(1-a)/2}} \cdot \frac{1}{x^a} = \frac{1}{x}. \text{ Mas, } u' = v, \text{ então:}$$

$u' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$. Como $y_2 = u . y_1$, então:

$y_2 = \ln|x| . x^{(1-a)/2}$. Como agora possuíamos duas soluções linearmente independentes, então a solução geral será:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = C_1 . x^{(1-a)/2} + C_2 . \ln|x| . x^{(1-a)/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2 . \ln|x|) . x^{(1-a)/2}} \quad (116)$$

sendo C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias.

Caso (3): Quando temos raízes complexas ($\Delta < 0$):

Por praticidade, escreve-se:

$$\begin{matrix} m_1 = \alpha + i.\beta \\ m_2 = \alpha - i.\beta \end{matrix} \quad , \text{ sendo } \alpha = \frac{-(a-1)}{2} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

Dessa forma, tem-se as soluções:

$$y_1(x) = C_1 . x^{m_1} = C_1 . x^{(\alpha + i.\beta)}$$
$$y_2(x) = C_2 . x^{m_2} = C_2 . x^{(\alpha - i.\beta)}$$

Essas soluções são complexas. Para se obter soluções reais, devemos proceder da seguinte forma: Usa-se $x = e^{\ln(x)}$. Assim,

$$y_1(x) = C_1 . x^{\alpha} . x^{i.\beta} = C_1 . x^{\alpha} . e^{\ln(x).i\beta} = C_1 . x^{\alpha} . e^{\beta.\ln(x).i}$$
$$y_2(x) = C_2 . x^{\alpha} . x^{-i\beta} = C_2 . x^{\alpha} . e^{-\ln(x).i\beta} = C_2 . x^{\alpha} . e^{-\beta \ln(x).i}$$

Uma solução pode ser determinada escolhendo-se as constantes arbitrárias $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, tal que:

$$v_1(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{2} . x^{\alpha} \left(e^{\beta \ln(x).i} + e^{-\beta.\ln(x).i} \right) = x^{\alpha} . \cos(\beta.\ln(x))$$

Outra solução, $v_2(x)$, pode ser determinada escolhendo-se $C_1 = \frac{1}{2i}$ e $C_2 = -\frac{1}{2i}$. Assim,

$$v_2(x) = \frac{1}{2i} . x^{\alpha} . \left(e^{\beta \ln(x).i} - e^{-\beta.\ln(x).i} \right) = x^{\alpha} . \sin(\beta.\ln(x))$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral dessa E.D.O. será dada pela soma de v_1 e v_2 multiplicada por constantes arbitrárias D_1 e D_2. Assim,

$$\underbrace{\boxed{y(x) = x^{\alpha} . (D_1 . \cos(\beta.\ln(x)) + D_2 . \sin(\beta.\ln(x)))}}_{\hookrightarrow \text{ solução geral}} \quad (117)$$

Outras E.D.O.'s lineares de 2ª ordem homogêneas

Duas outras E.D.O.s lineares de 2ª ordem homogêneas bastante importantes são:

Equação de Legendre:

$$(1-x^2).y'' - 2.x.y' + \alpha(\alpha+1).y = 0$$

e a

Equação de Bessel

$$x^2.y'' + x.y' + (x^2-\mu^2).y = 0$$

com $\mu \geq 0$.

No entanto, com os métodos desenvolvidos até o momento neste curso, não poderemos achar soluções para essas E.D.O.s. Ambas serão exploradas posteriormente na disciplina.