Vetores linearmente independentes e base

MAP 2110 - Diurno

IME USP

24 de março

Introdução

Uma família de vetores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ é linearmente independente se, e somente se a única forma de se escrever o vetor nulo $\vec{0}$ como combinação linear é a trivial. Isto também significa que nenhum vetor $\vec{v}_i$ deste conjunto pode se escrever como combinação linear dos vetores restantes.

Se $\vec{v}$ é um vetor do sub-espaço gerado por $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$ de quantas formas diferentes ele pode ser escrito como combinação linear desses vetores?

Exercicio 1:

Considerem os vetores

$$\vec{v}_1 = \mathbf{i} \ \vec{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ e } \vec{v}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{3k}$$

- Prove que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é LI
- Escreva os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ como combinação linear de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$
- Escreva o vetor $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ como combinação linear de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$
- Prove que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base.

Exercicio 2

- Mostre que os vetores $(\sqrt{3}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{3}, 1)$ e $(0, 1, \sqrt{3})$ são LI.
- Mostre que os vetores $(\sqrt{2}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$ e $(0, 1, \sqrt{3})$ são LD.
- Encontre todos os valores reais possíveis de t para que os vetores $(t, 1, 0)$, $(1, t, 1)$ e $(0, 1, t)$ sejam LD.

Exercício 3

Se três vetores de V_n, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

- $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ e $\vec{c} + \vec{a}$ formam um conjunto LI.
- $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ e $\vec{c} + \vec{a}$ formam um conjunto LI.