AGG5819 - Geofísica Matemática - 2020 - Exemplos

Exemplo 1: Resolva a seguinte E.D.O.: $y'(t) = 2t$

Solução: Na notação de Leibniz, a E.D.O. acima pode ser reescrita como:

$$\frac{dy}{dt} = 2t \Rightarrow dy = 2t.dt$$

Integrando-se ambos os lados, temos:

$$y(t) = \int dy = \int 2t.dt \Rightarrow \boxed{y(t) = t^2 + C}$$

→ Constante arbitrária

↳ Solução geral da E.D.O.

Verificação da solução:

Derivando-se a solução obtida, temos:

$$\boxed{y'(t) = (t^2 + C) = 2t}$$

→ Solução Verificada.

Exemplo 2: Ache a solução geral da seguinte E.D.O.: $y' = (x+1).e^{-x}.y^2$.

Solução: Utilizando a notação de Leibnit, podemos reescrever a E.D.O. como:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1).e^{-x}.y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (x+1).e^{-x}.dx$$

Integrando-se ambos os lados dessa equação, chegamos à:

$$-y^{-1} = -(x+2).e^{-x} + C \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{(x+2).e^{-x} - C}}$$

→ Solução geral

↳ constante arbitrária

Exemplo 3: Resolva a equação $\cos(x+y).dx + (3.y^2 + 2.y + \cos(x+y))dy = 0$

Solução: Primeiramente, testamos para ver se a E.D.O. é exata. Escrevendo-a na forma $M(x,y)dx + N(x,y).dy = 0$, temos:

$$M(x,y) = \cos(x+y) \quad e \quad N(x,y) = (3.y^2 + 2.y + \cos(x+y))$$

Assim, basta agora derivarmos $M(x,y)$ e $N(x,y)$ e ver se obtemos derivadas parciais iguais.

Derivando $M(x,y)$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\sin(x+y).$$

Derivando, agora, $N(x,y)$ em relação a x, obtemos:

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin(x+y)$$

Como $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, então podemos concluir que a equação é exata. Para obtermos a solução implícita, procedemos da seguinte forma:

$$u(x,y) = \int M(x,y).dx + K(y) = \int \cos(x+y).dx + K(y) = \sin(x+y) + K(y).$$

Em seguida, derivamos $u(x,y)$ em relação a y para obter $K(y)$:

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \cos(x+y) + \frac{dK(y)}{dy}$. Como $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, então:

$\cos(x+y) + \frac{dK(y)}{dy} = 3y^2 + 2.y + \cos(x+y) \Rightarrow \frac{dK(y)}{dy} = 3.y^2 + 2.y$. Por integração, obtemos:

$K(y) = y^3 + y^2 + C$. Assim, $\boxed{u(x,y) = \sin(x+y) + y^3 + y^2 + C}$

Verificando a solução:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}.dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy = \cos(x+y)dx + (\cos(x+y) + 3.y^2 + 2y).dy = 0$$

Exemplo 4: Verifique se a E.D.O. $(e^{x+y} + y.e^y).dx + (x.e^y - 1)dy = 0$ é exata. Caso não seja, ache o fator integrante para transformá-la em uma E.D.O. exata. Em seguida, determine a solução geral.

Solução:

Primeiro Passo: Vamos verificar se a E.D.O. é exata:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$$

$M(x,y) = e^{x+y} + y.e^y \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y} + y.e^y) = e^{x+y} + e^y + y.e^y$

$N(x,y) = x.e^y - 1 \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y$

Como $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, então a E.D.O. não é exata. Como a E.D.O. não é exata, vamos procurar pelo fator integrante. Suponha que nossa equação não exata seja dada por:

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0$$

Multiplicando a equação acima por F, obtemos:

$$F.P.dx + F.Q.dy = 0$$

Para que a E.D.O. seja exata, devemos ter a seguinte condição atendida:

$$\frac{\partial}{\partial y}(F.P) = \frac{\partial}{\partial x}(F.Q)$$

Pela regra do produto, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}.P + F.\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}.Q + \frac{\partial Q}{\partial x}.F$$

De forma a descomplicar o problema, nós procuramos por um fator integrante somente dependente de uma variável. Felizmente, em muitos casos, há tais fatores. Assim, tomemos $F \equiv F(x)$.

Então, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ e a equação acima pode ser reescrita como:

$$F.\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}.Q + \frac{\partial Q}{\partial x}.F$$

Dividindo-se a equação acima por F.Q. e reorganizando os termos, chegamos à:

$$\frac{1}{F.Q}\left(F.\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{F.Q}\left(\frac{\partial F}{\partial x}.Q\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}.F\right).\frac{1}{F.Q} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Q}.\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{F}.\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}.\frac{1}{Q} \Rightarrow \frac{1}{F}.\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q}.\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = R$$

$R = \frac{1}{F}.\frac{\partial F}{\partial x}$. Essa equação pode ser colocada na forma separável, tal que:

$\frac{dF}{F} = R.dx$. Integrando-se ambos os lados, temos: $\ln|F| = \int \frac{dF}{F} = \int R(x)dx \Rightarrow$

$$e^{\ln|F|} = e^{\int R(x).dx} \Rightarrow F = e^{\int R(x).dx}$$

Similarmente, se $F^* = F^*(y)$, então, ao invés de um fator dependente de x, teríamos um dependente y tal que:

$$\frac{1}{F^*}.\frac{dF^*}{dy} = R^*, \quad \text{com} \quad R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Assim,

$$F^*(y) = e^{\int R^*(y).dy}$$

Veja que no caso que estamos estudando, não é possível achar fator integrante de $F(x)$, porque R depende tanto de x quanto de y. No entanto, nós podemos calcular R^*.

$$R = \frac{1}{x.e^y - 1}\left[(e^{x+y} + e^y + y.e^y) - e^y\right] \Rightarrow R = \frac{e^{x+y} + y.e^y}{x.e^y - 1}$$

→ depende tanto de x quanto de y.

$$R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{e^{x+y} + y.e^y}.\left(e^y - e^{x+y} - e^y - y.e^y\right) = -1$$

Assim, o fator integrante $F^*(y)$ será dado por:

$$F^*(y) = e^{\int -1dy} = e^{-y}$$

A partir desse resultado, chegamos à:

$$F^*.P = e^{-y}(e^{x+y} + y.e^y) = e^x + y$$

$$F.Q = e^{-y}(x.e^y - 1) = x - e^{-y}$$

Portanto,

$$\overbrace{(e^x + y)}^{M(x,y)}dx + \overbrace{(x - e^{-y})}^{N(x,y)}dy = 0$$

Agora, para determinarmos a solução dessa equação, devemos achar $u(x,y)$. Logo:

$$u(x,y) = \int (e^x + y)dx = e^x + x.y + K(y)$$

Derivando $u(x,y)$ em relação a y, obtemos:

$$\frac{du}{dy} = x + \frac{dK}{dy} = N(x,y) = x - e^{-y} \quad \therefore \quad \frac{dK(y)}{dy} = -e^{-y} \quad e \quad K(y) = e^{-y} + D.$$

Assim, a solução geral $u(x,y)$ é:

$$\boxed{u(x,y) = e^{x} + x.y + e^{-y} + D}_4$$

Exemplo 5: Determinar a solução particular da E.D.O. $3y' + y = 0$, sujeita à condição inicial $y(2) = 5$.

Solução:

$$\begin{cases} 3y' + y = 0 \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

Primeiro, vamos determinar o polinômio característico da E.D.O.:

$$3.p + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{3}. \text{ Logo, } y(t) = C.e^{p.t} \Rightarrow \boxed{y(t) = C.e^{(-1/3).t}}_2$$

↳ Solução geral

Sendo a condição inicial dada por $y(2) = 5$, temos:

$$y(2) = 5 = C.e^{-(1/3).2} \Rightarrow C = 5.e^{2/3} \therefore \boxed{y(t) = 5.e^{2/3}.e^{-t/3}}_4$$

↳ Solução particular que atende a condição inicial.

Exemplo 6: Determine a solução geral da E.D.O. $3y' + y = t^2$

Solução: A solução geral é da forma $y(t) = u(t) + v(t)$, sendo $u(t)$ a solução geral da equação homogênea associada $3y' + y = 0$ e $v(t)$ uma solução particular da equação não-homogênea. Do exemplo anterior, temos: $u(t) = C.e^{-t/3}$. Agora, resta-nos determinar $v(t)$. Como as E.D.O.s lineares não-homogêneas possuem fator integrante dependente somente da variável independente, então:

$$f(t).3y' + f(t).y = f(t).t^2 \Rightarrow f(t)y' + \underbrace{f(t).\frac{1}{3}}_{\mathrm{I}}.y = f(t).\frac{t^2}{3}$$

Vamos procurar agora uma forma de escrever o lado esquerdo da equação com a derivada do produto entre o fator integrante e a função y, tal que:

$$\frac{d}{dt}[f(t).y] = \underbrace{\frac{df(t)}{dt}}_{\mathrm{II}}.y + \frac{dy}{dt}.f(t)$$

Para que a igualdade seja verificada, devemos ter: $\mathrm{I} = \mathrm{II}$. Logo,

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{3}.f(t) \Rightarrow \frac{df(t)}{f(t)} = \frac{1}{3}.dt.$$ Integrando-se ambos os lados da última equação, temos:

$$\ln|f(t)| = \int \frac{df(t)}{f(t)} = \int \frac{1}{3}.dt = \frac{t}{3} \therefore \ln|f(t)| = \frac{t}{3}.$$ Tomando-se a exponencial em ambos os lados da equação, temos:

$$e^{\ln|f(t)|} = e^{\frac{t}{3}} \Rightarrow f(t) = e^{\frac{t}{3}}.$$ Como achamos o fator integrante que torna a igualdade I = II verificável, então:

$$\frac{d}{dt}[f(t).y] = f(t).\frac{t^2}{3}.$$ Integrando-se ambos os lados em relação a t, temos:

$$\int \frac{d}{dt}[f(t).y].dt = \int f(t).\frac{t^2}{3}dt \Rightarrow f(t).y = \int f(t).\frac{t^2}{3}.dt \Rightarrow e^{t/3}.y = \int e^{t/3}.\frac{t^2}{3}dt \Rightarrow$$

$$y = e^{-\frac{t}{3}}.\int e^{t/3}.\frac{t^2}{3}dt \quad \text{III}$$

Integração por partes

$$\text{III} \rightarrow \int \frac{t^2}{3}.e^{t/3}.dt = \frac{3}{3}.t^2.e^{t/3} - \int 2.t.e^{t/3}dt = t^2.e^{t/3} - 6.t.e^{t/3} + 6.\int e^{t/3}dt =$$

$$t^2.e^{t/3} - 6.t.e^{t/3} + 18.e^{t/3}.$$ Logo:

$$v(t) = e^{-\frac{t}{3}}.(t^2.e^{t/3} - 6.t.e^{t/3} + 18.e^{t/3}) = t^2 - 6.t + 18 \Rightarrow v(t) = t^2 - 6t + 18.$$

Como $y(t) = u(t) + v(t)$, então: $$\boxed{y(t) = C.e^{-t/3} + t^2 - 6t + 18}$$

↳ Solução geral da E.D.O. não-homogênea.

Exemplo 7: Resolva a seguinte equação de Bernoulli conhecida como equação de Verhulst: $y' = A.y - B.y^2$, sendo A e B constantes.

Solução: O primeiro passo é escrever a equação acima na forma da equação de Bernoulli:

$$y' - A.y = -By^2$$

Dividimos, então, a equação acima por y^2. Logo,

$$y^{-2}.y' - A.y.y^{-2} = -B$$

Multiplicando-se a equação acima por $(1-n)$, sendo $n = 2$, chegamos à:

$$(1-2).y^{-2}.y' - (1-2).A.y.y^{-2} = (1-2)(-B) \Rightarrow$$

$$(-1).y^{-2}.y' - (-1).A.y.y^{-2} = B \Rightarrow (-1).y^{-2}.y' - (-1).A.y^{-1} = B$$

Procedemos, agora, com a seguinte substituição: $u = y^{-1}$. Derivando essa igualdade em relação a t, obtemos:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(y^{-1}) \Rightarrow u' = (-1).y'.y^{-2}$$

Substituindo u e u', obtemos:

$$\boxed{u' + Au = B}$$

↳ Obtemos, assim, uma E.D.O. linear de 1ª ordem não-homogênea.

Essa E.D.O. pode ser resolvida pelo método dos coeficientes a determinar. A constante B pode ser vista como um polinômio de grau 0. Como $f(t) = B$, o polinômio de grau 0, então a solução particular $v(t)$ tem a forma de um polinômio de grau 0: $v(t) = b_0$. Derivando $v(t)$ em relação a t, obtemos $v'(t) = 0$. Substituindo $v(t)$ e $v'(t)$ na E.D.O. $u' + A.u = B$, temos:

$$v'(t) + A.v(t) = B \Rightarrow 0 + A.b_0 = B \Rightarrow b_0 = \frac{B}{A}.$$

Dessa forma, concluímos que uma solução particular dessa E.D.O. não-homogênea é dada por: $v(t) = \frac{B}{A}$. Agora, basta determinarmos a solução da equação homogênea associada:

$$u' + A.u = 0$$

Nesse caso, o polinômio característico dessa E.D.O. é dado por:

$$p + A = 0 \Rightarrow p = -A.$$

Logo, a solução dessa E.D.O. será:

$$w(t) = C.e^{p.t} \Rightarrow w(t) = C.e^{-A.t}$$

Agora, podemos obter a solução geral da equação não-homogênea:

$$u(t) = w(t) + v(t) \Rightarrow u(t) = C.e^{-A.t} + \frac{B}{A}$$

sendo C uma constante arbitrária. Como $u(t) = y^{-1}(t)$, então:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{C.e^{-A.t} + \frac{B}{A}}}$$ → Solução geral.

Exemplo 8) Ache a solução geral da E.D.O. de Riccati $y'+y^2+3y+2=0$, sabendo que $y=-1$ é solução particular.

Solução: Rearranjando os termos da equação, temos:

$$y' = -2 - 3y - y^2$$

Sabendo que a equação de Riccati possui a forma

$$y' = p(t) + q(t).y + r(t).y^2$$

então $p(t) = -2$, $q(t) = -3$ e $r(t) = -1$. Fazendo a substituição $y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$, sendo $y_p(t)$ uma solução particular da E.D.O. de Riccati, mostra-se que a E.D.O. de Riccati pode ser reduzida a uma E.D.O. linear de 1ª ordem da forma:

$$u' + (q(t) + 2.r(t).y_p(t)).u = -r(t).$$

Substituindo os valores de $p(t)$, $q(t)$ e $r(t)$ na equação acima, obtemos:

$$u' + (-3 + 2.(-1).(-1)).u = -(-1) \Rightarrow u' + (-3+2).u = 1 \Rightarrow u' - u = 1.$$

Para achar uma solução particular dessa E.D.O. não-homogênea, podemos utilizar o método dos coeficientes a determinar. O valor do lado direito da E.D.O. pode ser identificado como um polinômio de grau 0. Supondo que $v(t)$ seja uma solução particular da E.D.O. homogênea, então $v(t) = b_0$. Derivando $v(t)$ em relação a t, temos: $v'(t) = 0$. Substituindo $v(t)$ e $v'(t)$ em $u' - u = 1$, obtemos:

$$v' - v = 1 \Rightarrow 0 - b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = -1. \quad \text{Logo, } v(t) = -1.$$

Dessa forma, concluímos que uma solução particular dessa E.D.O. não-homogênea é dada por $v(t) = -1$. Agora, basta determinarmos a solução geral da equação homogênea associada.

$$w' - w = 0$$

Nessa caso, o polinômio característico dessa E.D.O. será:

$$p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$$

Chamando de $w(t)$ a solução geral da homogênea, então:

$$w(t) = C.e^{p.t} \Rightarrow w(t) = C.e^{t}$$

Agora, podemos obter a solução geral da equação não-homogênea:

$$u(t) = w(t) + v(t) \Rightarrow \boxed{u(t) = C.e^{t} - 1}$$

Voltando à antiga variável:

$$u(t) = \frac{1}{y(t) - y_p(t)} \Rightarrow y(t) - y_p(t) = \frac{1}{u(t)} \Rightarrow y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)} \Rightarrow$$

$$y(t) = -1 + \frac{1}{C.e^t - 1} \Rightarrow y = \frac{1 - C.e^t + 1}{C.e^t - 1} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{2.C.e^t}{C.e^t - 1}}$$

↳ Solução geral da E.D.O. na forma da equação de Riccati.

Exemplo 9: Resolva a seguinte equação de Lagrange: $y = 2x.\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Solução: Fazendo a seguinte mudança de variável, $\frac{dy}{dx} = p$, temos:

$y = 2.x.p + p^2$. Derivando-se essa equação em relação a x, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2.x.\frac{dp}{dx} + 2.p.\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2.p.\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$-p = (2x + 2p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2 \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2,$$ que é uma E.D.O. linear não-homogênea de 1ª ordem em $x(p)$. Para resolver essa E.D.O., vamos achar o fator integrante $f(p)$, tal que:

$$\frac{d}{dp}[f(p).x(p)] = \frac{df(p)}{dp}.x(p) + \frac{dx(p)}{dp}.f(p) \Rightarrow \frac{df(p)}{dp} = \frac{2}{p} \Rightarrow df(p) = 2\frac{dp}{p}.$$

Integrando-se ambos os lados da equação, obtemos:

$$\ln|f(p)| = \int df(p) = \int 2\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|f(p)| = 2.\ln|p| \Rightarrow e^{\ln|f(p)|} = e^{\ln|p^2|} \Rightarrow$$

$f(p) = p^2$. Como há fator integrante, então:

$\frac{d}{dp}[f(p).x(p)] = -2.f(p)$ Integrando ambos lados em relação a p, temos:

$$\int \frac{d}{dp}[f(p).x(p)]dp = \int -2p^2 dp \quad f(p).x(p) = -\frac{2}{3}.p^3 + C \Rightarrow p^2.x(p) = -2p^3 + C \Rightarrow$$

$$\boxed{x(p) = -\frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}.p + \frac{C}{p^2} \\ y = 2xp + p^2 \end{cases}$$

Exemplo 10: Ache a solução geral da seguinte E.D.O.: $y'' + 6 \cdot y' + 9y = 0$.

Solução: O primeiro passo para resolver a E.D.O. acima é achar sua equação característica. Nesse caso

$$p^2 = y'' \quad p^1 = y' \quad p^0 = y \therefore \quad p^2 + 6p + 9 = 0 \Rightarrow p = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} \begin{cases} p_1 = -3 \\ p_2 = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ $p_1 = p_2$ e temos uma raízes iguais. Como E.D.O.s de 2^a ordem sempre possuem duas famílias de soluções independentes, devemos procurar pela segunda família de soluções. Usamos, aqui, a propriedade: S p é raiz dupla do polinômio característico, então p também é raiz da derivada do polinômio característico $\therefore$ $y_2(t) = \frac{d}{dp}(y_1(t))$, sendo $y_1(t) = C \cdot e^{p_1 \cdot t}$ uma solução da E.D.O. Logo,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + \frac{d}{dp}(C_1 \cdot e^{p_1 \cdot t}) = C_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + C_1 \, t \cdot e^{p_1 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = C_1 \cdot (e^{-3t} + t \cdot e^{-3t})}$$

$\hookrightarrow$ Essa é a solução geral da E.D.O. e C_1 é uma constante arbitrária.

Exemplo 11: Determine a solução geral da E.D.O. $y'' + y' + 9y = 0$

Determinando o polinômio característico, temos:

$p^2 = y''$, $p^1 = y'$ e $p^0 = y$. Assim, o polinômio característico será dado por:

$$p^2 + p + 9 = 0 \Rightarrow p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 \pm 4 \cdot 9}}{2} \begin{cases} p_1 = \frac{-1 + \sqrt{35}\, i}{2} \\ p_2 = \frac{-1 - \sqrt{35}\, i}{2} \end{cases}$$

Logo, a solução geral da E.D.O. será

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\frac{-1 + \sqrt{35}\, i}{2} \cdot t} + C_2 \cdot e^{\frac{-1 - \sqrt{35}\, i}{2}}$$

A solução geral da E.D.O. na forma real será dada por:

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(D_1 \cdot \cos(\sqrt{35} \cdot t) + D_2 \cdot \sin \sqrt{35} \cdot t\right)}$$

Exemplo 12: Encontre a solução geral da E.D.O. $y'' - 5y' + 6y = 2 \cdot e^t$

Solução: Vamos primeiro determinar a solução da equação homogênea associada:

$$y'' - 5.y' + 6.y = 0$$

O polinômio característico dessa equação é:

$$p^2 - 5.p + 6 = 0 \Rightarrow p = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2} \quad p_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad p_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Assim, duas soluções particulares da E.D.O. homogênea são:

$y_1(t) = e^{3t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$, com solução geral, pelo princípio da superposição dada por: $y_H(t) = C_1.y_1 + C_2.y_2 = C_1.e^{3t} + C_2.e^{2t}$.

Para determinar uma solução particular da E.D.O. não homogênea, vamos utilizar o método de Lagrange. Calculando o Wronskiano, temos:

$$W(y_1,y_2) = \left|\begin{bmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} 3.e^{3t} & 2.e^{2t} \\ e^{3t} & e^{2t} \end{bmatrix}\right| = 3.e^{3t}.e^{2t} - 2.e^{2t}.e^{3t} = 3.e^{5t} - 2.e^{5t} = e^{5t}$$

Pelo método de Lagrange, a solução particular da homogênea é dada por:

$$y_P = y_1.\int \frac{r(t).y_2}{W(y_1,y_2)}dt + y_2.\int \frac{-r(t).y_1.dt}{W(y_1,y_2)}, \text{ sendo } r(t) = 2.e^{2t} \therefore$$

$$y_P = e^{3t}\int \frac{2.e^{t}.e^{2t}}{e^{5t}}.dt + e^{2t}.\int \frac{(-2).e^{t}.e^{3t}}{e^{5t}}dt = e^{3t}.\int \frac{2.e^{3t}}{e^{5t}}dt + e^{2t}.\int \frac{(-2).e^{4t}}{e^{5t}}dt =$$

$$e^{3t}\int 2.e^{-2t}dt + e^{2t}\int(-2.e^{-t})dt \Rightarrow y_P = e^{3t}(-e^{-2t}) + e^{2t}(2.e^{-t}) \Rightarrow$$

$$y_P = -e^{t} + 2.e^{t} \Rightarrow \boxed{y_P = e^{t}}$$

Como a solução geral da não-homogênea é dada por $y_{NH}(t) = y_H + y_P$, então:

$$\boxed{y_{NH} = C_1.e^{3t} + C_2.e^{2t} + e^{t}}$$

Exemplo 13: Encontre a solução da Equação Euler-Cauchy $x^2.y'' + 1{,}5.xy' - 0.5y = 0$

Solução: A equação auxiliar à E.D.O. Euler-Cauchy é dada por:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0, \text{ sendo } a = 1.5 \text{ e } b = -0.5 \therefore$$

$$m^2 + 0.5m - 0.5 = 0 \Rightarrow m = \frac{-0.5 \pm \sqrt{(0.5)^2 - 4(0.5)}}{2} \begin{cases} m_1 = \frac{-0.5 + \sqrt{2.25}}{2} = 0.5 \\ m_2 = \frac{-0.5 - \sqrt{2.25}}{2} = -1 \end{cases}$$

Como temos raízes reais distintas, então a solução será dada por:

$$\boxed{y(x) = C_1 . x^{1/2} + C_2 . x^{-1}}$$