UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

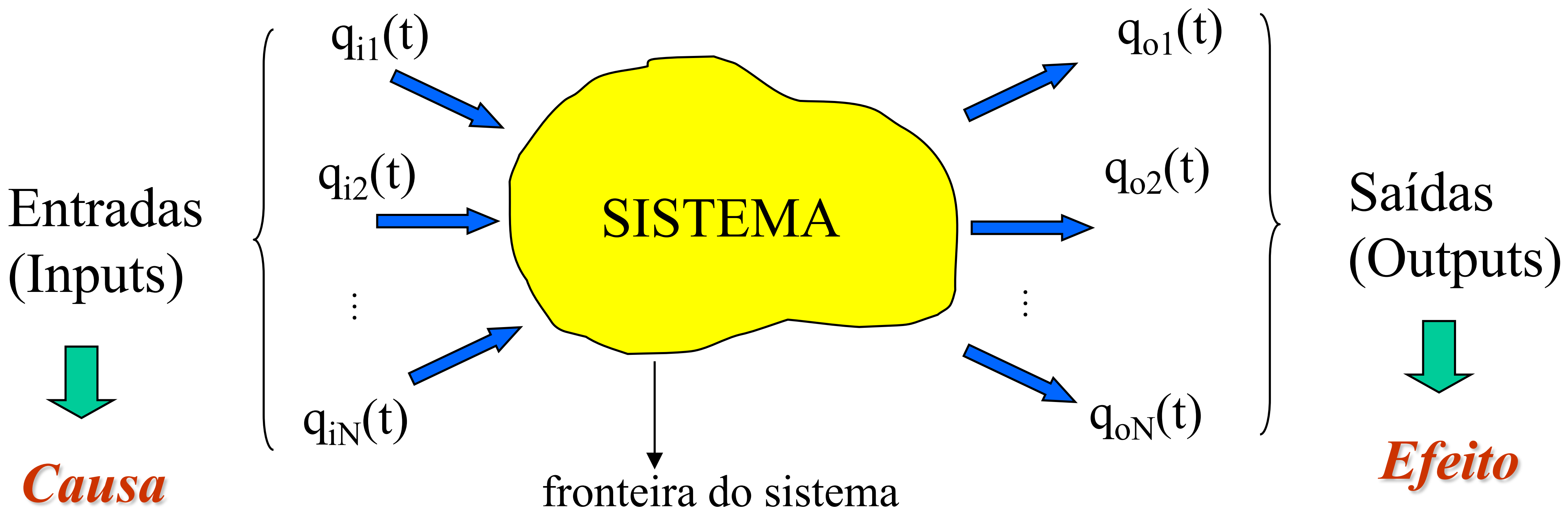
SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Revisão de Conceitos
Exemplos

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Relações Entrada/Saída

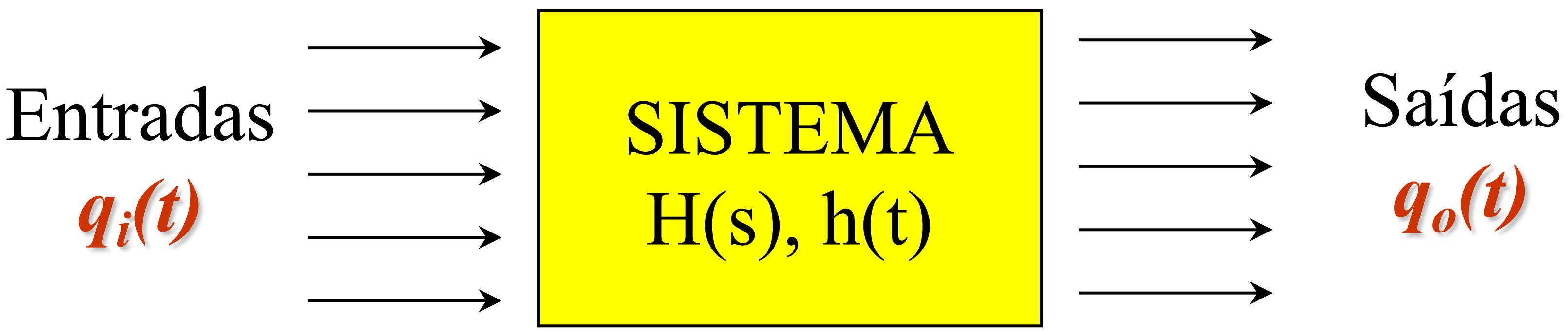
Como já discutido em aula segue abaixo conceituação importante:



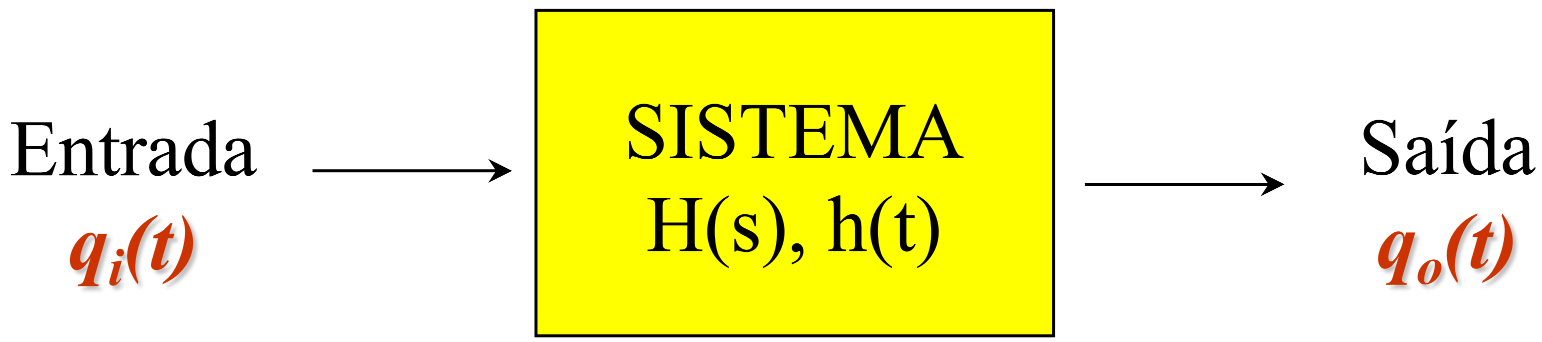
- ***Entradas***: Agentes que provocam distúrbios no sistema. Geralmente, não dependem do sistema
- ***Saídas***: Respostas do sistema. São na verdade "entradas" modificadas pelas características dinâmicas do sistema.

Cont. ...

Na linguagem de modelos dinâmicos e sistemas de controle, é muito comum utilizarmos o conceito de ***diagrama de blocos*** na visualização destas propriedades



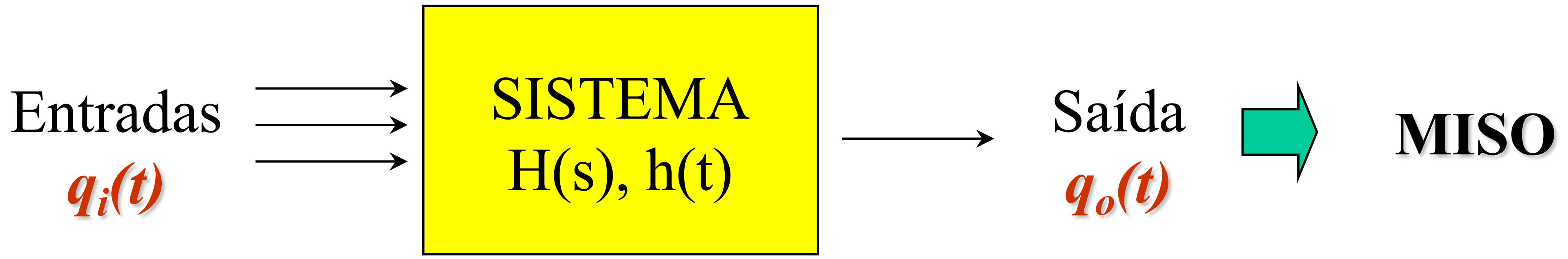
Esta representação introduz a idéia de ***visão sistêmica***, onde pode-se observar o modelo do sistema bem como suas entradas e saídas. Um caso muito comum Considera apenas uma entrada e uma saída, chamado de **SISO** (*single input, single output*)



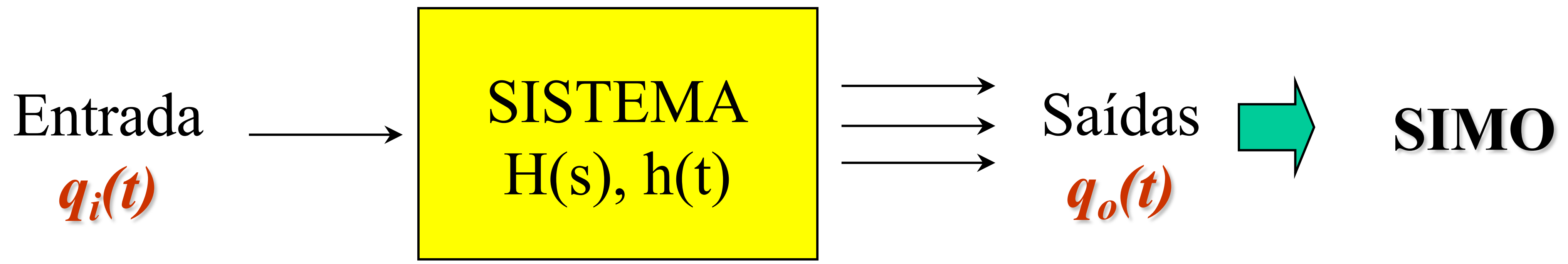
Cont. ...

Da mesma forma podemos definir outras duas configurações:

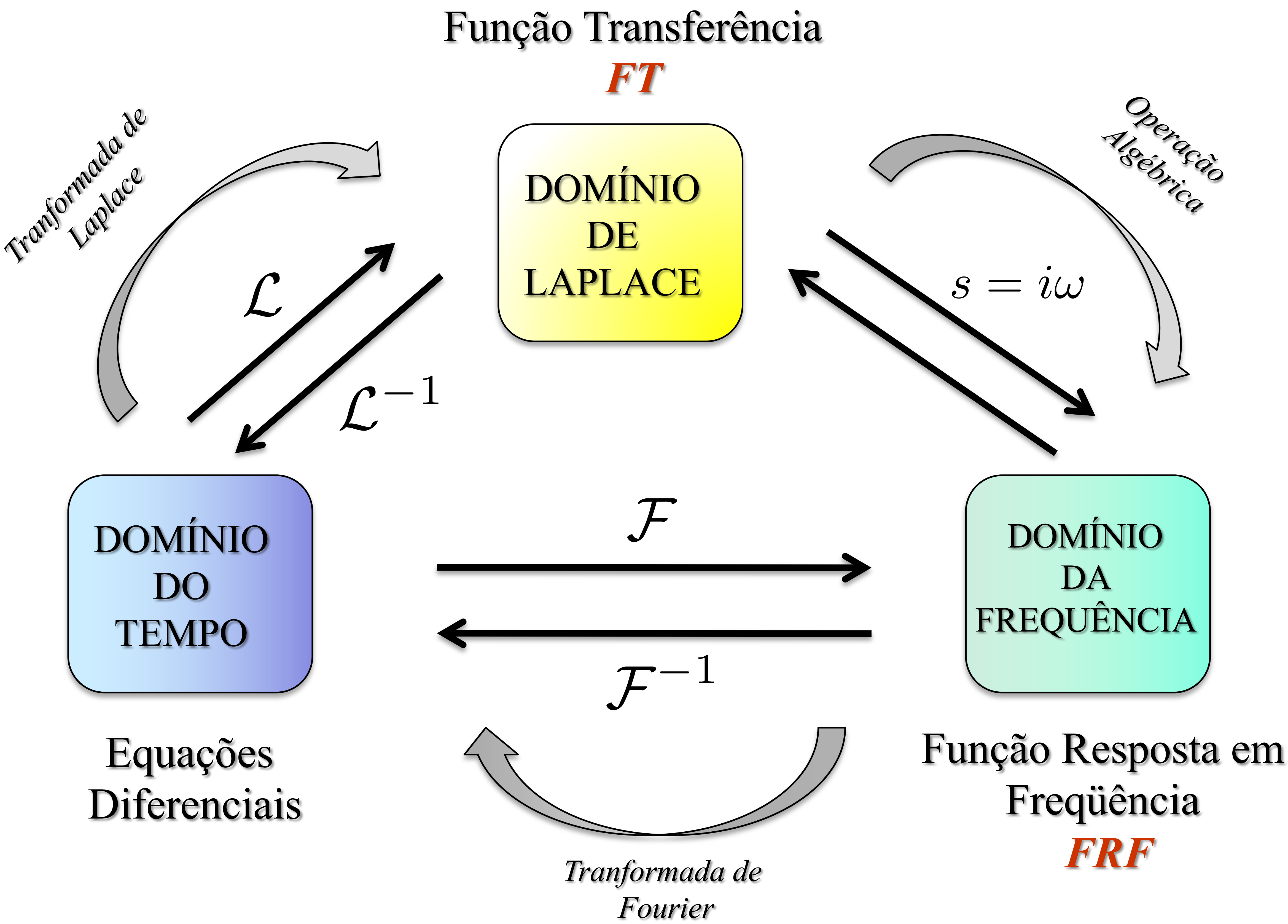
Múltiplas entradas – Uma saída



Uma entrada-Múltiplas saídas



Relação entre Domínios



O Conceito de Função Transferência (*F.T.*)

A ***função transferência*** é um dos conceitos mais importantes em modelos dinâmicos. Considere inicialmente o sistema mais simples SISO

$$q_i(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{SISTEMA}\\ H(s)\end{array}} \longrightarrow q_o(t)$$

Definição: Função transferência é o quociente entre as ***transformadas de Laplace*** da saída $q_o(t)$ pela entrada $q_i(t)$, sendo ***nulas*** todas as demais entradas e condições iniciais do sistema. Algebricamente

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}$$

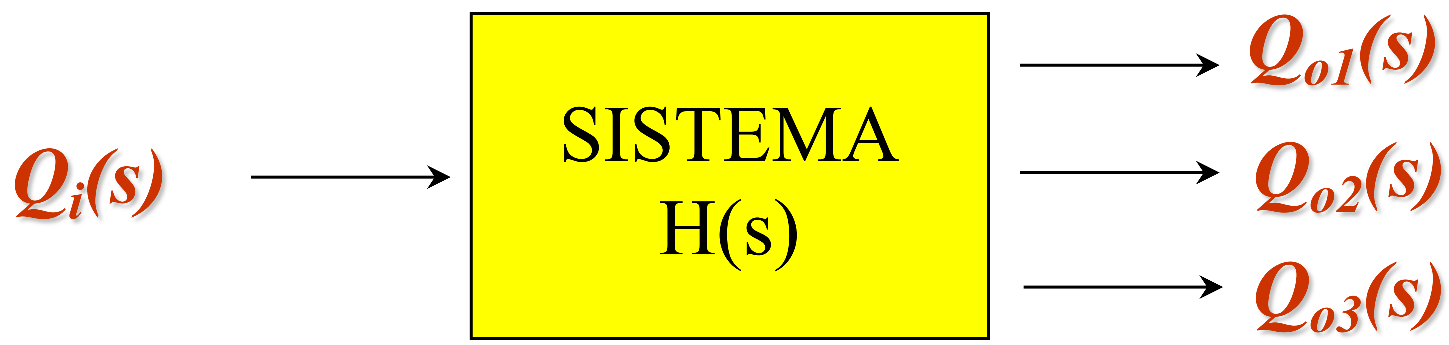
e

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Definição de Transformada de Laplace para t > 0 !

Cont. ...

Devemos observar que a definição de FT para um dado sistema exige uma única entrada, bem como condições iniciais nulas. Para sistemas com múltiplas entradas, deve-se considerar uma entrada por vez ! Embora existam métodos sofisticados que calculam as FT para múltiplas entradas com atuação simultânea. Para o caso de várias saídas, temos



$$\boxed{H_{1,i}(s) = \frac{Q_{o1}(s)}{Q_i(s)}}$$

$$\boxed{H_{2,i}(s) = \frac{Q_{o2}(s)}{Q_i(s)}}$$

$$\boxed{H_{3,i}(s) = \frac{Q_{o3}(s)}{Q_i(s)}}$$

De forma geral:

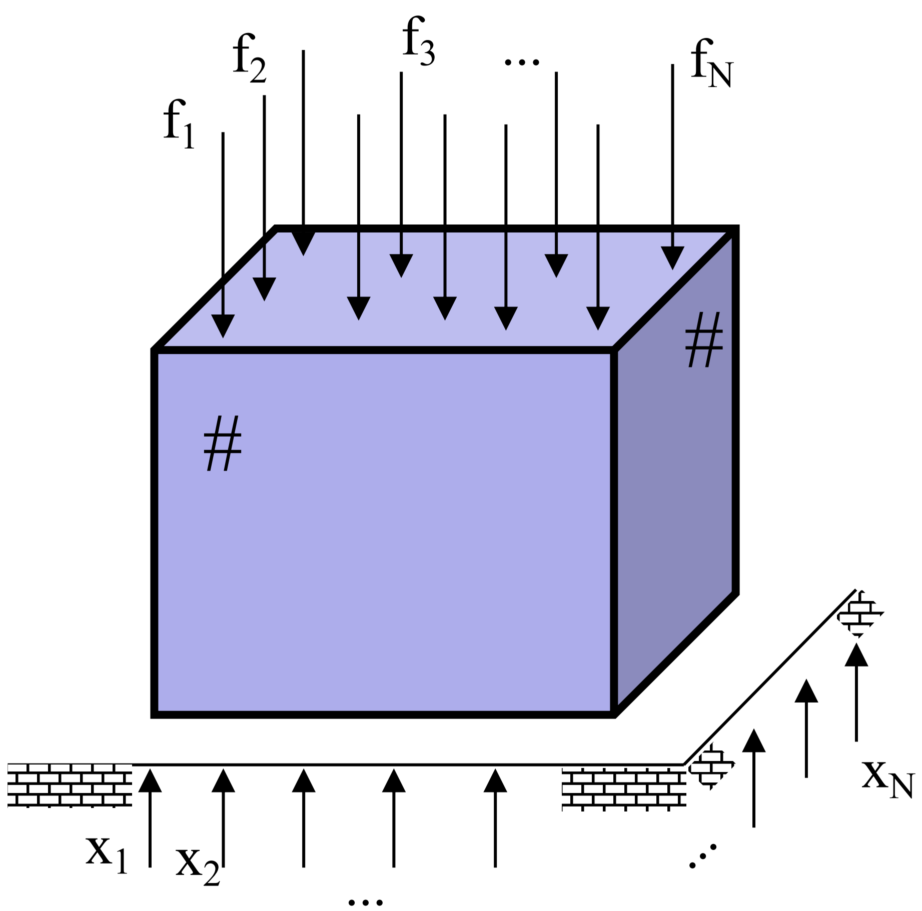
$$\boxed{H_{p,q}(s) = \frac{Q_p(s)}{Q_q(s)}}$$

FT relacionando a saída no ponto p devido a uma entrada no ponto q e zero nos demais !

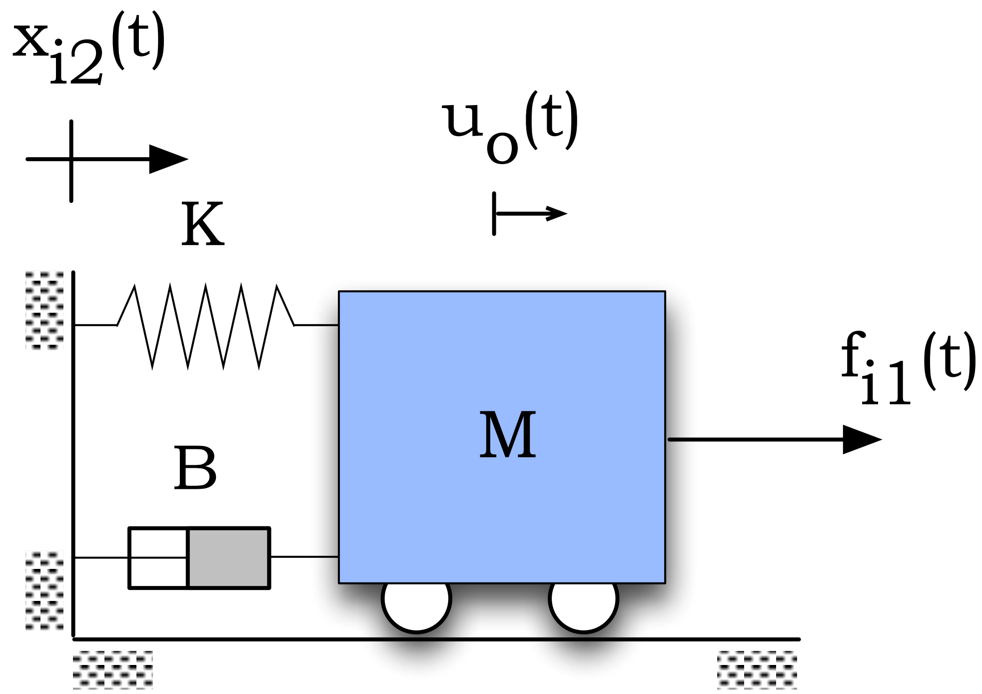
Exemplo # 1

O primeiro exemplo é a revisão do modelo massa-mola-amortecedor, que já foi discutido previamente nas aulas presenciais.

Sistema Físico



Modelo Físico

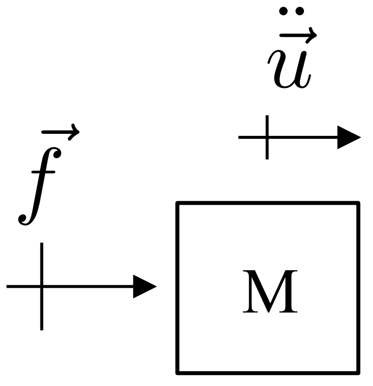


Hipóteses Simplificadoras

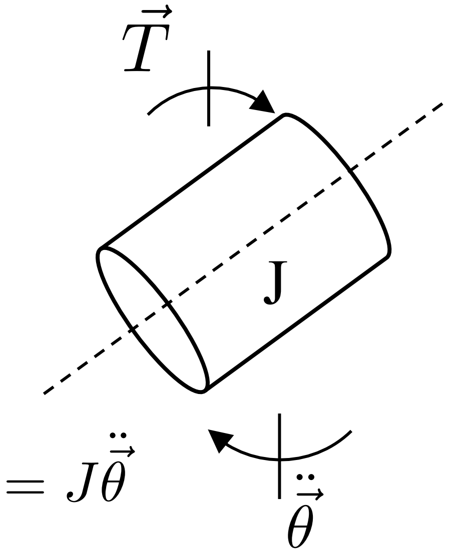
Cont. ...

Para o caso de sistemas mecânicos, três efeitos físicos:

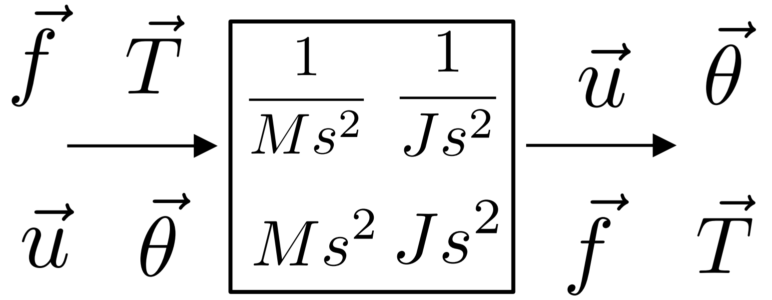
Massa



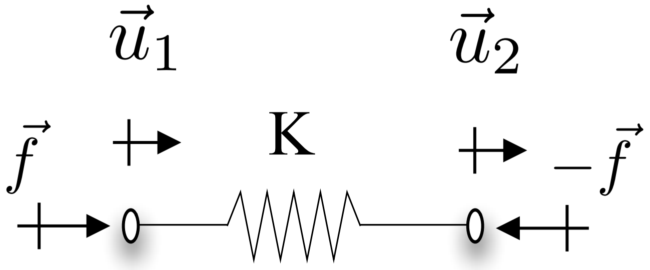
$\vec{f} = M\ddot{\vec{u}}$



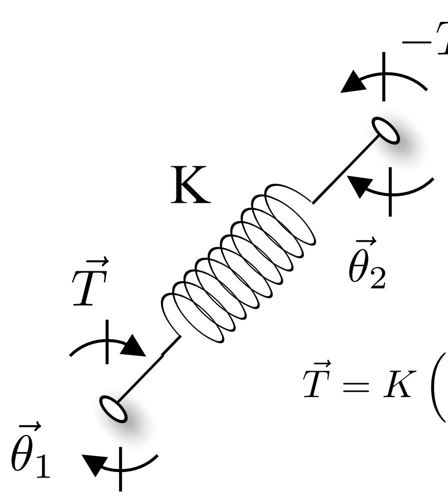
$\vec{T} = J\ddot{\vec{\theta}}$



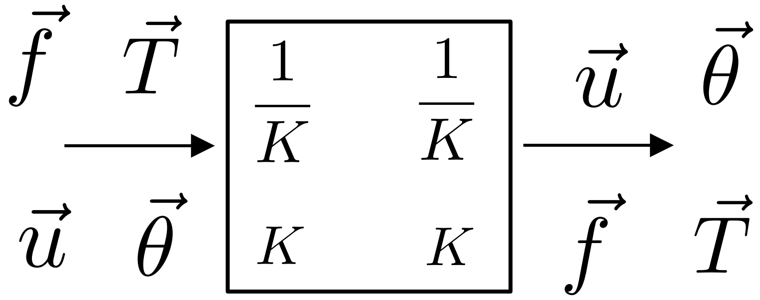
Mola



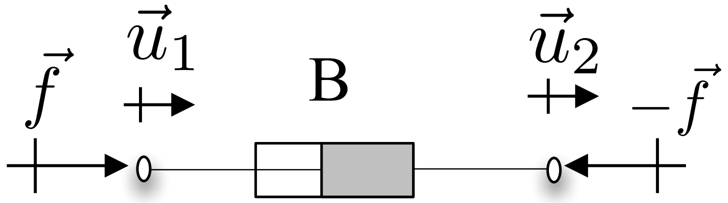
$\vec{f} = K\left(\vec{u}_1 - \vec{u}_2\right)$



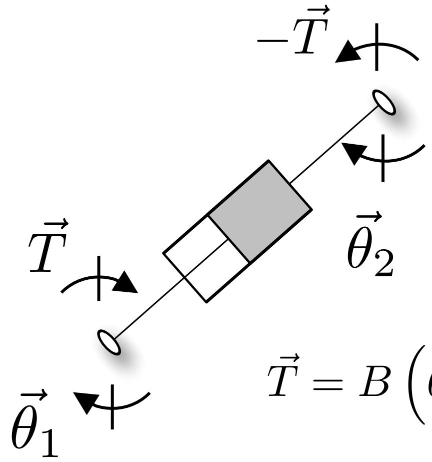
$\vec{T} = K\left(\vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_2\right)$



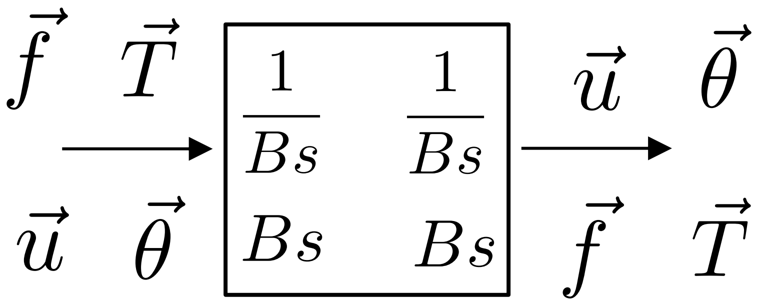
Amortecedor



$\vec{f} = B\left(\dot{\vec{u}}_1 - \dot{\vec{u}}_2\right)$

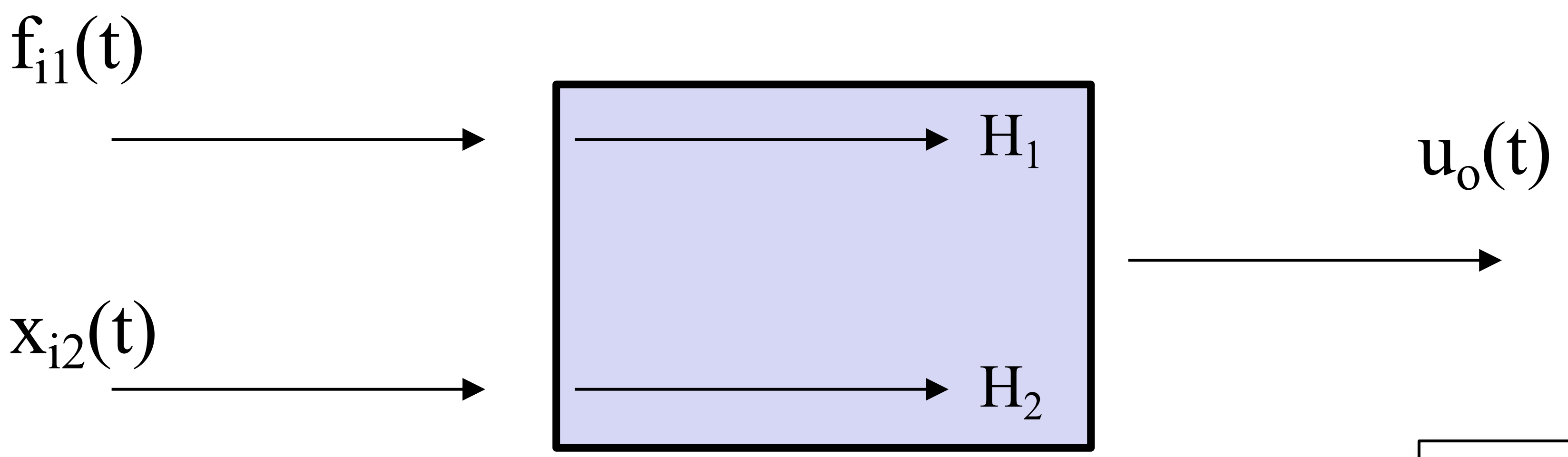


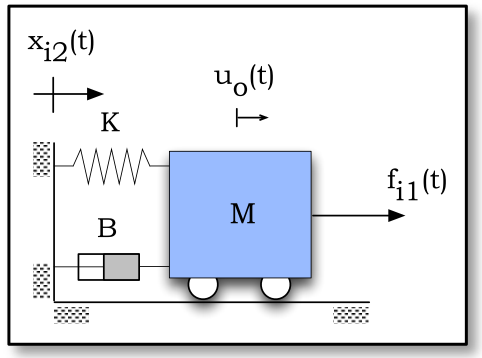
$\vec{T} = B\left(\dot{\vec{\theta}}_1 - \dot{\vec{\theta}}_2\right)$



Modelo Matemático

Diagrama de blocos:





2ª Lei de Newton: $$\sum_{r=1}^{N} \vec{f}_r = M_r \ddot{u}_r$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + Ku_o = f_{i1} + Kx_{i2} + B\dot{x}_{i2}$$

Aplicando Laplace com CIs nulas:

$$\boxed{(Ms^2 + Bs + K)}U_o(s) = F_{i1}(s) + (Bs + K)X_{i2}(s)$$

Funções Transferência

Inicialmente fazemos $x_{i2}(t) = 0$

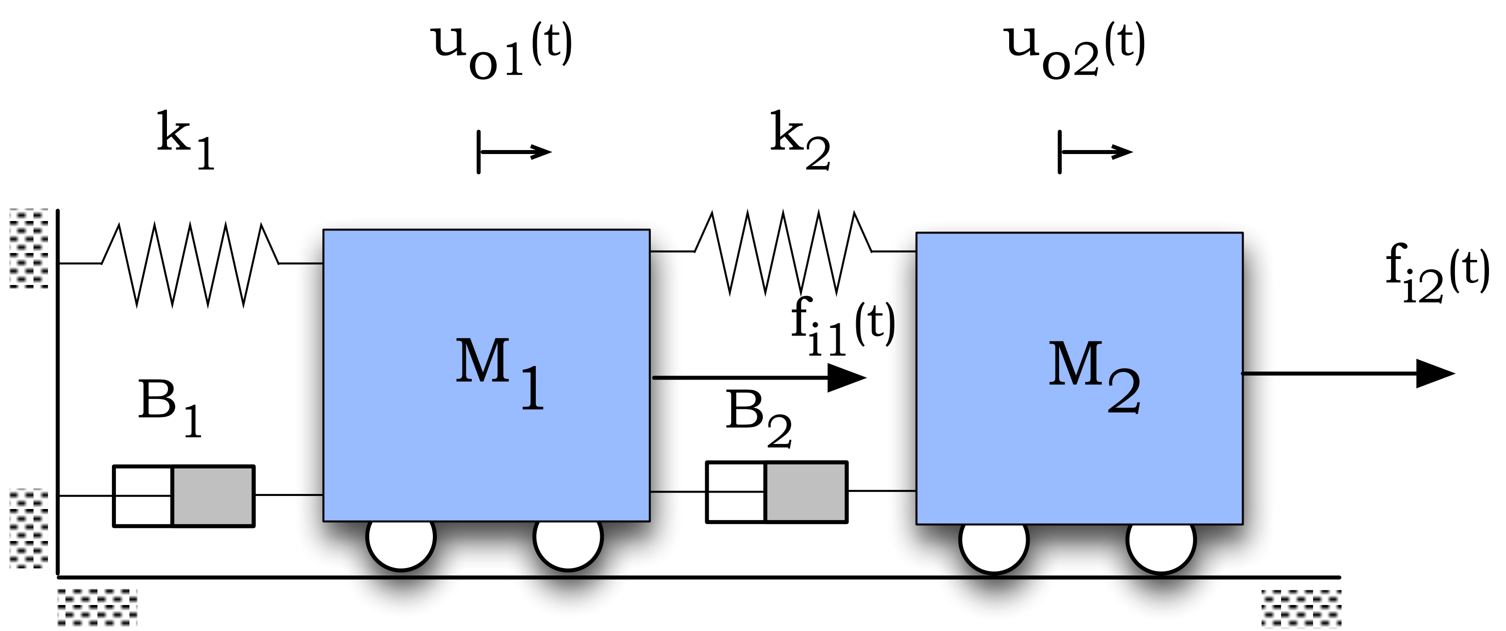
$$H_1(s) = \frac{U_o(s)}{F_{i1}(s)} = \frac{\frac{1}{K}}{\frac{M}{K}s^2 + \frac{B}{K}s + 1}$$

E, em seguida fazemos $f_{i1}(t) = 0$

$$H_2(s) = \frac{U_o(s)}{X_{i2}(s)} = \frac{\frac{B}{K}s + 1}{\frac{M}{K}s^2 + \frac{B}{K}s + 1}$$

Exemplo # 2

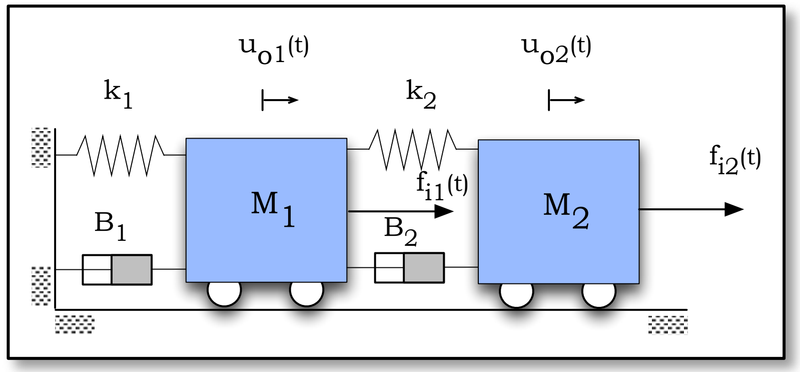
Considere o modelo físico abaixo:



Obtenha as F.T. relacionando as saídas $u_{o1}(t)$ e $u_{o2}(t)$ com as entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$. Todos os elementos são puros e ideais.

Hipóteses Simplificadoras

Como já partimos de um modelo físico, as hipóteses simplificadoras resumem-se em:

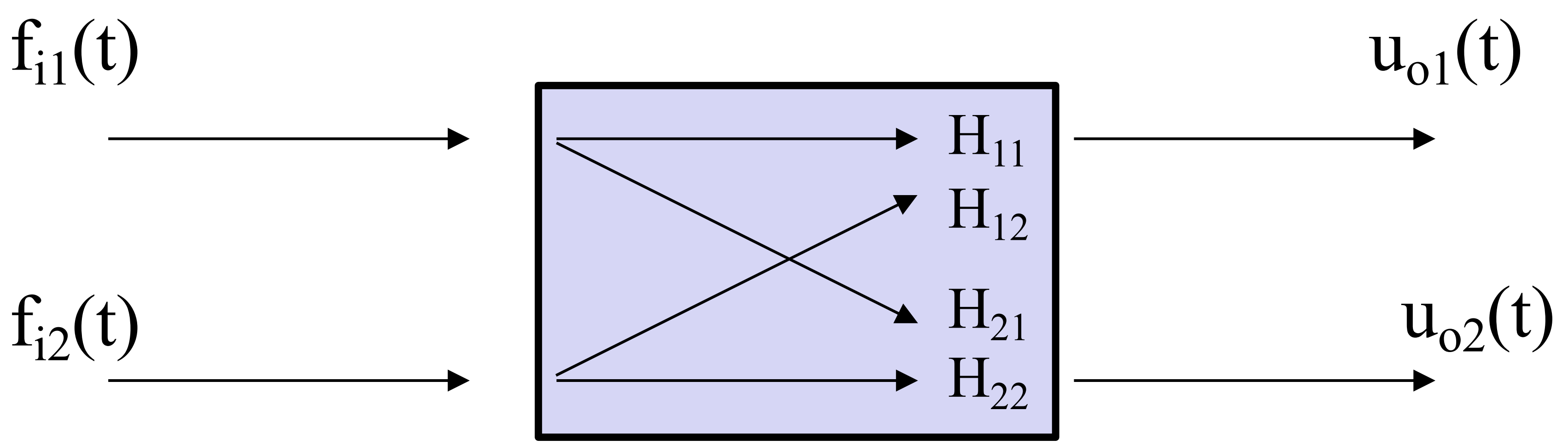


- Todos os elementos são puros e ideais
- Não existe atrito entre as massas e a superfície horizontal. Ou de forma equivalente, considera-se que todos os fenômenos dissipativos estejam concentrados nos elementos amortecedores de constantes B_1 e B_2.
- As entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$ são conhecidas e independentes do sistema.

Em seguida, faremos algumas considerações adicionais importantes sobre as relações entrada/saída para o nosso modelo !

Relações Entrada/Saída (Quais F.T. queremos ?)

Iniciamos a solução reconhecendo que trata-se de um sistema com 02 entradas e 02 saídas e, de acordo com a visão sistêmica discutida em sala de aula temos



Como ilustrado acima, notamos que existem 04 combinações possíveis entre as entradas e saídas do sistema. Vale aqui lembrarmos o conceito de F.T. discutido nas aulas presenciais

F. T..: Razão entre as transformadas de Laplace de uma dada variável de saída e de uma dada entrada, considerando-se nulas todas as condições iniciais do problema bem como as demais entradas.

Equações de Movimento

Como já partimos do modelo físico e considerando elementos puros e ideais, as hipóteses simplificadoras já estão definidas, restando apenas considerar que as entradas são conhecidas e independentes do sistema. Então, as equações de movimento no domínio do tempo são obtidas a partir da aplicação da segunda lei do movimento de Newton às massas M_1 e M_2, ou seja:

M_1

$$\sum_{r=1}^{N} \vec{f}_r = M_r \ddot{u}_r \begin{cases} M_1\ddot{u}_{o1} + (B_1 + B_2)\dot{u}_{o1} + (K_1 + K_2)u_{o1} - B_2\dot{u}_{o2} - K_2 u_{o2} = f_{i1} \\ \\ M_2\ddot{u}_{o2} + B_2\dot{u}_{o2} + K_2 u_{o2} - B_2\dot{u}_{o1} - K_2 u_{o1} = f_{i2} \end{cases}$$

M_2

As equações de movimento acima podem ser escritas na forma matricial:

Cont. …

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{o1} \\ \ddot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_2 \\ -B_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{o1} \\ \dot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{Bmatrix}$$

Algumas observações importantes sobre as EDOs do sistema:

- ***São lineares e não homogêneas***
- ***Parâmetros constantes (M_r, B_r, K_r)***
- ***São acopladas no domínio do tempo***
- ***As matrizes dos coeficientes são simétricas***

O próximo passo é transformar as EDOs do sistema para o domínio de Laplace. Para isto definimos:

$$F_{i1}(s) = \mathcal{L}\left(f_{i1}(t)\right) \qquad U_{o1}(s) = \mathcal{L}\left(u_{o1}(t)\right)$$

$$F_{i2}(s) = \mathcal{L}\left(f_{i2}(t)\right) \qquad U_{o2}(s) = \mathcal{L}\left(u_{o2}(t)\right)$$

Cont. ...

E, ainda, considerando-se nulas as condições iniciais para todas as variáveis obtemos as seguintes equações algébricas no domínio de Laplace

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + K_1 + K_2 & -(B_2 s + K_2) \\ -(B_2 s + K_2) & M_2 s^2 + B_2 s + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$

Que são então as equações do modelo no domínio de Laplace (e são algébricas !). De forma compacta, estas equações podem ser escritas como

$$[A(s)]\{U_o(s)\} = \{F_i(s)\}$$

A solução do sistema de equações acima fornece as respectivas expressões para as variáveis de saída do sistema. Como se trata de um sistema de ordem 2, podemos resolver para as variáveis de saída usando a *regra de Krammer*, como será visto em seguida

Cont. …

Solução para $U_{o1}(s)$ e $U_{o2}(s)$: $U_{o1}(s) = \dfrac{\Delta_{o1(s)}}{\Delta(s)}$ $\quad U_{o2}(s) = \dfrac{\Delta_{o2}(s)}{\Delta(s)}$

onde:

$$\Delta_{o1}(s) = \begin{vmatrix} F_{i1}(s) & -(B_2 s + K_2) \\ F_{i2}(s) & M_2 s^2 + B_2 s + K_2(s) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{o2}(s) = \begin{vmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2) & F_{i1}(s) \\ -(B_2 s + K_2) & F_{i2}(s) \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta(s) = M_1 M_2 s^4 + (M_1 B_2 + M_2 (B_1 + B_2))\, s^3 + \\ (M_1 K_2 + B_1 B_2 + M_2 (K_1 + K_2))\, s^2 + (B_1 K_2 + B_2 K_1)\, s + K_1 K_2\end{gathered}}$$

Polinômio Característico do Modelo

Cont. …

Logo temos para as soluções

$$U_{o1}(s) = \frac{F_{i1}(M_2 s^2 + B_2 s + K_2)}{\Delta(s)} + \frac{F_{i2}(B_2 s + K_2)}{\Delta(s)}$$

$$U_{o2}(s) = \frac{F_{i2}(M_1 M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)}{\Delta(s)} + \frac{F_{i1}(B_2 s + K_2)}{\Delta(s)}$$

e, as F.T. são então definidas como:

$$H_{11}(s) = \frac{U_{o1}(s)}{F_{i1}(s)} \qquad H_{21}(s) = \frac{U_{o2}(s)}{F_{i1}(s)}$$

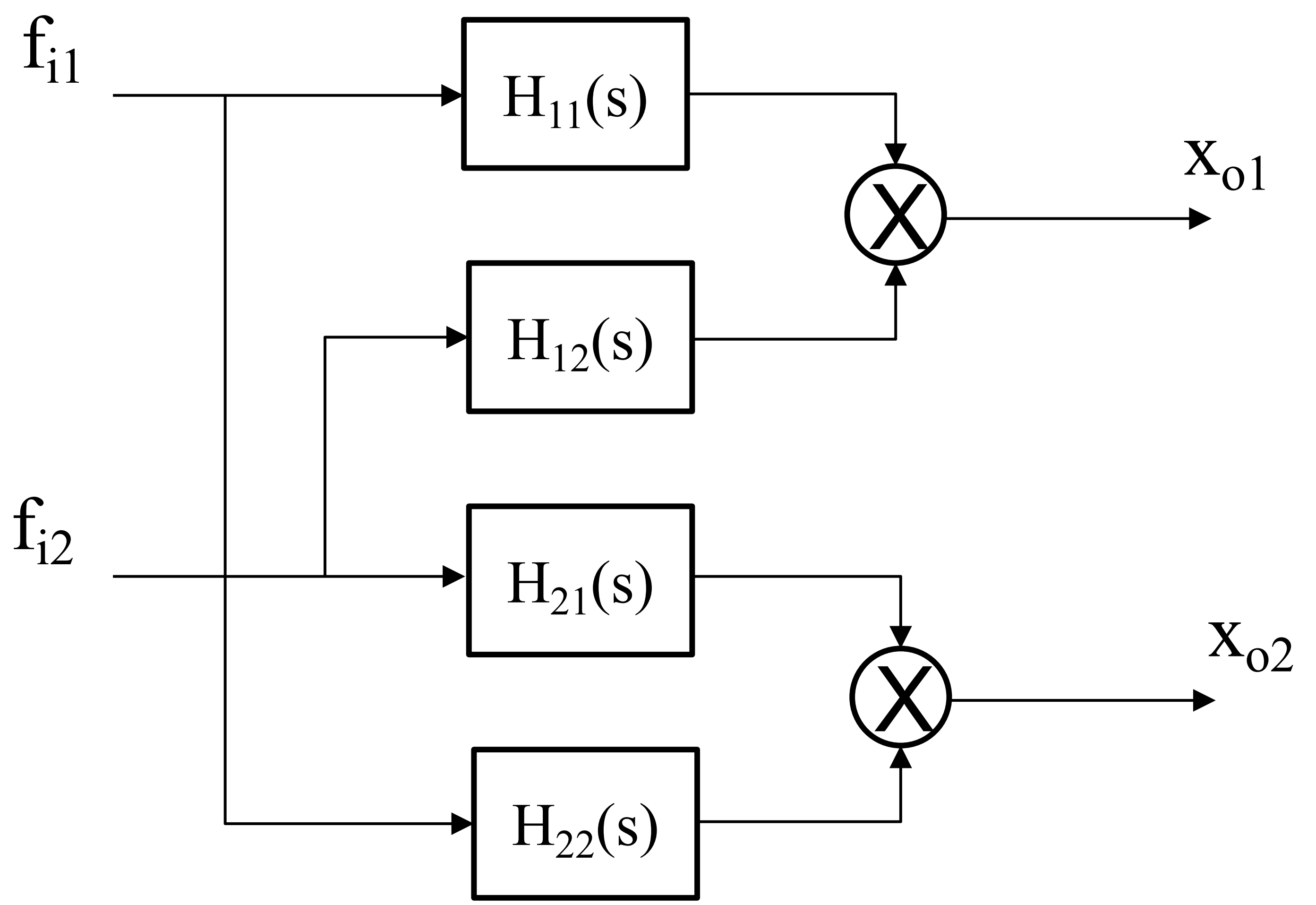
$$H_{12}(s) = \frac{U_{o1}(s)}{F_{i2}(s)} \qquad H_{22}(s) = \frac{U_{o2}(s)}{F_{i2}(s)}$$

Cont. ...

$$H_{11}(s) = \frac{M_2 s^2 + B_2 s + K_2}{\Delta(s)} \qquad H_{12}(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\Delta(s)}$$

$$H_{21}(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\Delta(s)} \qquad H_{22}(s) = \frac{M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)}{\Delta(s)}$$

Diagrama
de
Blocos



Cont. …

Lembrando que a solução para os deslocamentos de M1 e M2 veio da solução de

$$[A(s)]\{U_o(s)\} = \{F_i(s)\}$$

$$\Downarrow$$

$$[A(s)]^{-1}$$

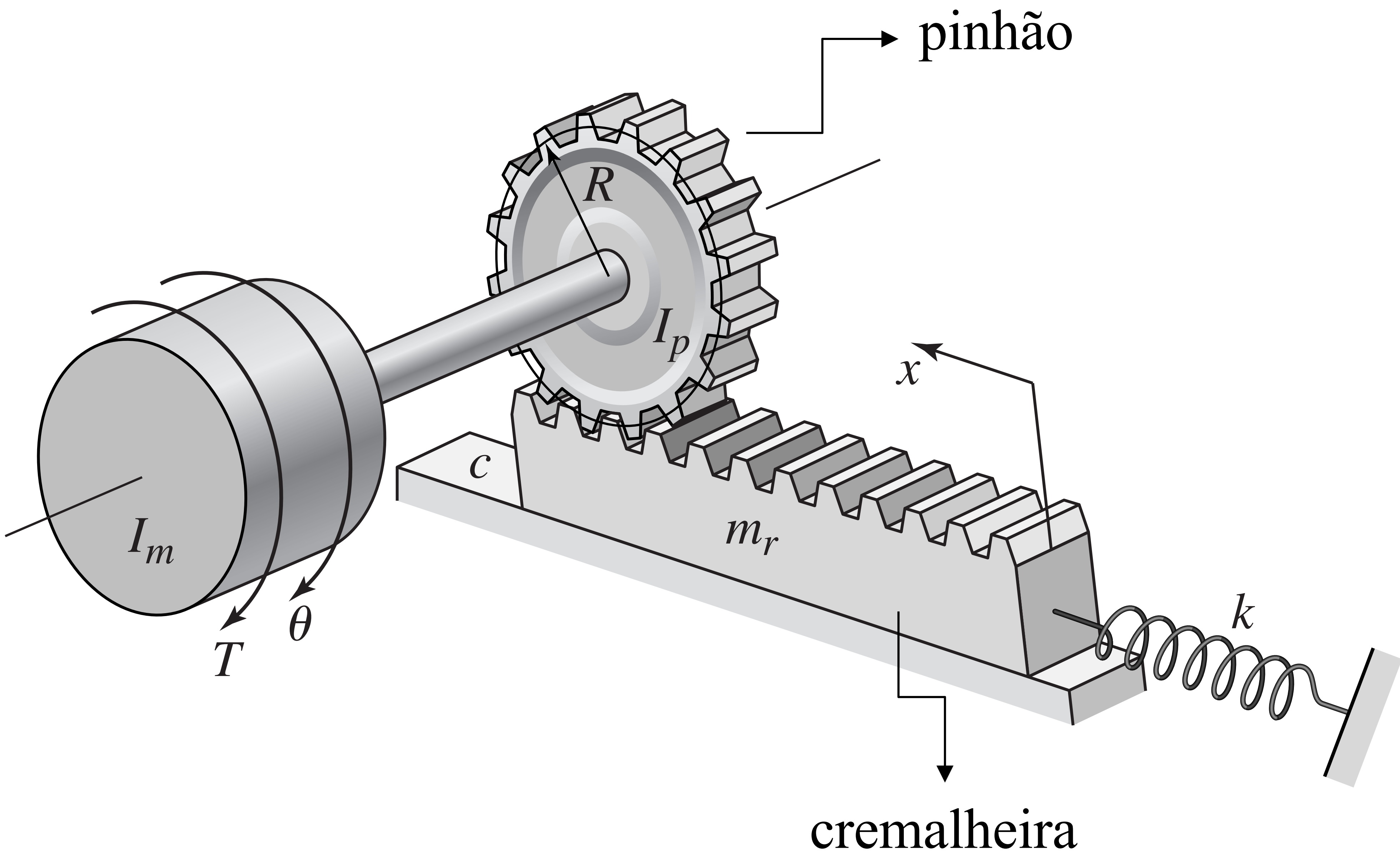
$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{array} \right\}$$

RESPOSTA DO SISTEMA = PROPRIEDADES DO SISTEMA X ENTRADAS DO SISTEMA

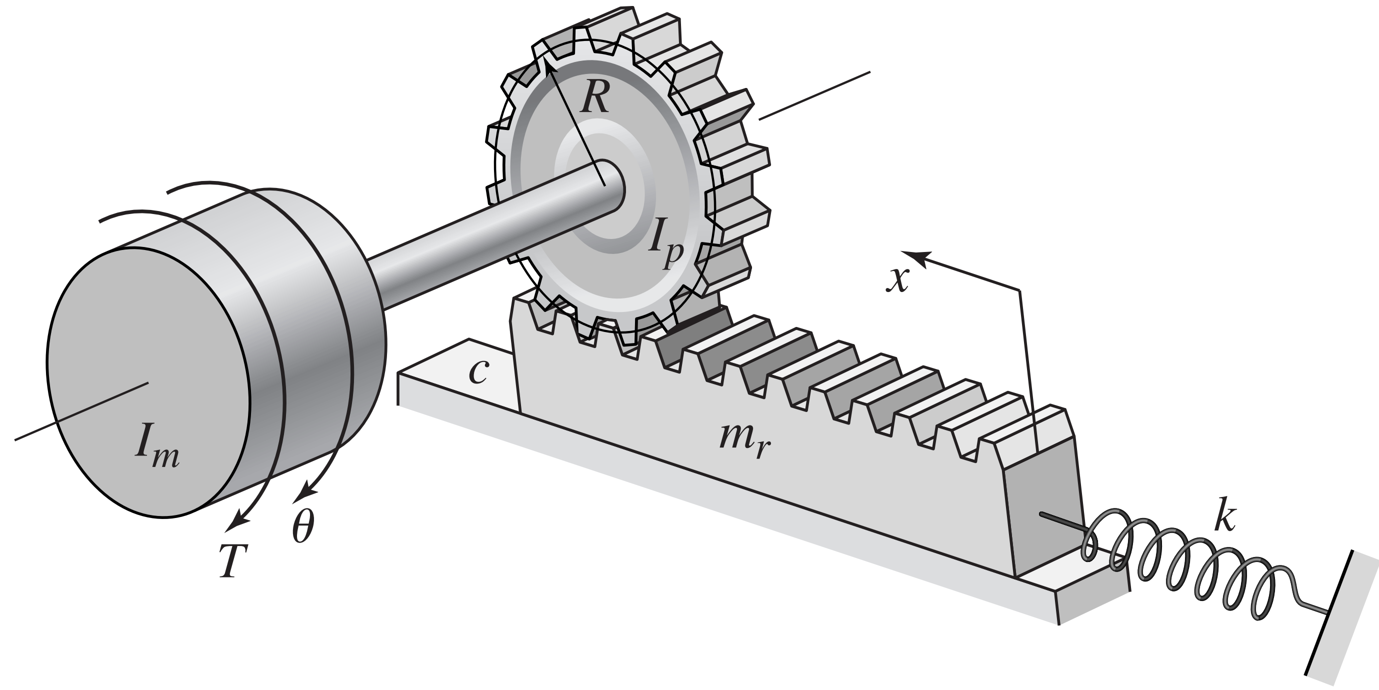
Exemplo # 3

A figura mostra o conhecido mecanismo pinhão cremalheira e que possui várias aplicações práticas. Uma entrada torque $T(t)$ é aplicada ao cilindro de momento de inércia I_m, e o movimento é então transmitido para o pinhão, causando então o deslocamento linear x da cremalheira. Determine a F.T. X(s)/T(s). E.H.S.



Hipóteses Simplificadoras

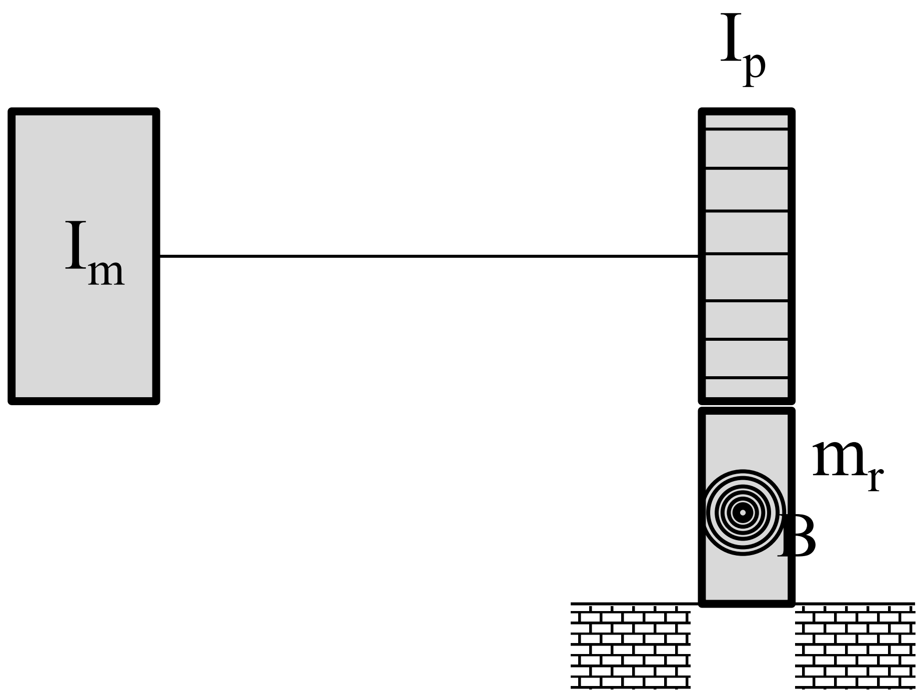
1. Elementos I_m, I_p e m_r rígidos
2. Eixo com massa desprezível e rígido
3. Atrito entre m_r e o plano viscoso
4. Contato ideal entre I_p e m_r
5. Elementos puros e ideais



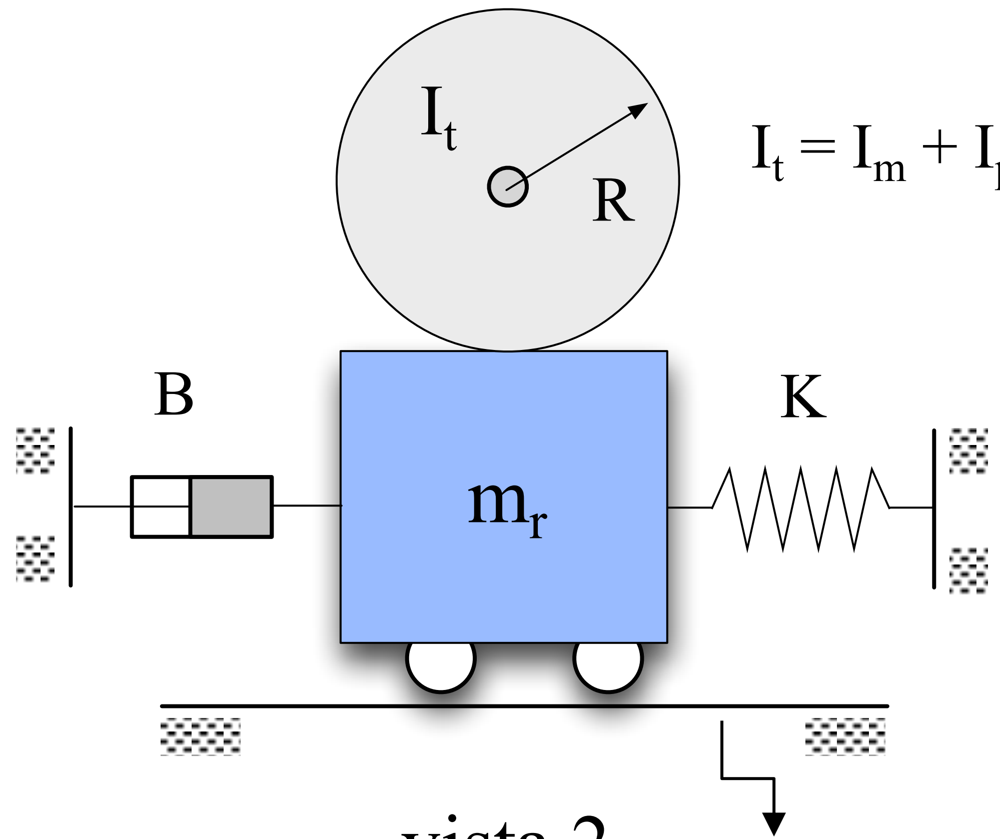
vista 2

vista 1

Modelo físico:



vista 1

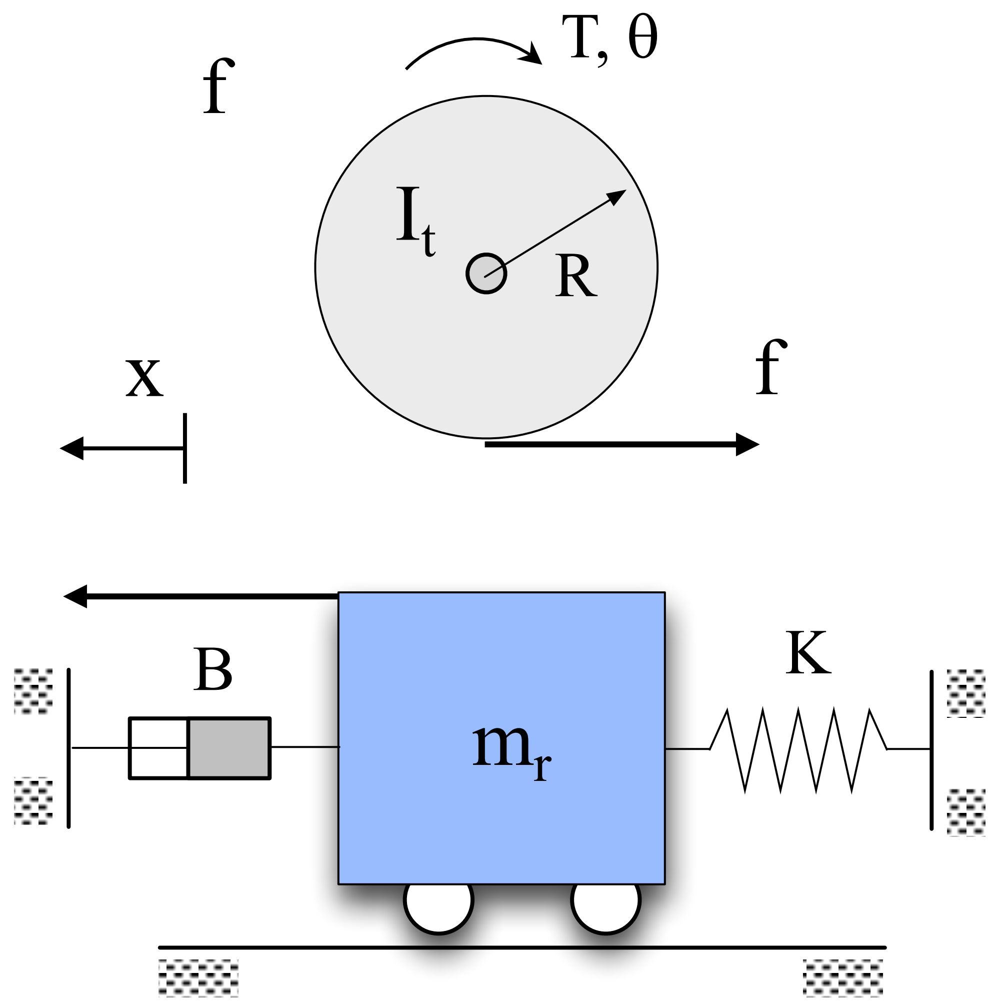


$I_t = I_m + I_p$

vista 2

liso

Equações Diferenciais do Modelo



f – força de contato entre o pinhão e a cremalheira

Pela H_4, contato ideal significa contato de rolamento puro, ou seja, não ocorre escorregamento entre o pinhão e a cremalheira. Neste caso, vale a seguinte relação de compatibilidade cinemática entre o pinhão e a cremalheira:

$$\boxed{x = R\theta}$$

$$\circlearrowleft + \sum_{i=1}^{N} \vec{T} = J\ddot{\vec{\theta}} \quad \Rightarrow \quad T - fR = I_t\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_t\ddot{\theta} + fR = T}$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum_{i=1}^{N} \vec{f} = m_r\ddot{\vec{x}} \quad \Rightarrow \quad f - B\dot{x} - Kx = m_r\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_r\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f}$$

Determinação da F.T.

Aplicando a T. L. às três equações temos (CIs = 0)

$$X(s) = R\Theta(s)$$

$$I_t s^2 \Theta(s) + F(s)R = T(s)$$

$$\left(m_r s^2 + Bs + K\right) X(s) = F(s)$$

Combinando estas três últimas equações algébricas reduzimos à seguinte expressão

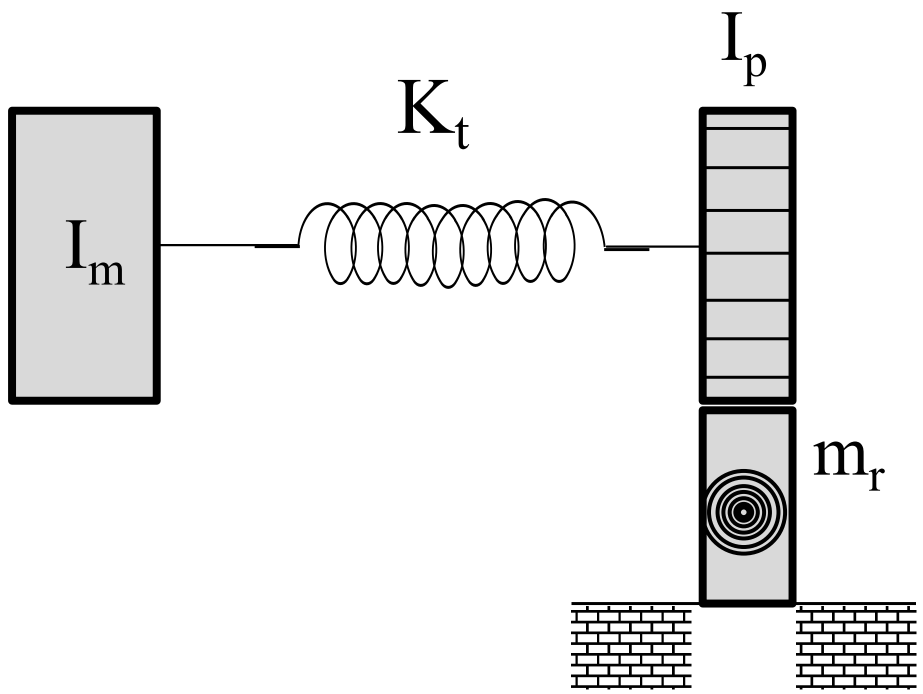
$$\left[\left(m_r + \frac{I_t}{R^2}\right) s^2 + Bs + K\right] X(s) = \frac{1}{R} T(s)$$

Da qual obtemos a F.T. desejada na F.P.

$$\boxed{\frac{X(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{KR}}{\frac{1}{K}\left(m_r + \frac{I_t}{R^2}\right) s^2 + \frac{B}{K} s + 1}}$$ (Resp.)

Considerações adicionais

Adicionalmente, poderíamos aumentar o grau de complexidade do modelo, considerando, por exemplo que o eixo que conecta as duas inércias em rotação não seja rígido, possuindo, por exemplo uma constante elástica torsional igual a K_t:



Exercício: Escrevam as equações do novo modelo físico com eixo flexível e obtenham a mesma F.T. anteriormente solicitada.

FIM

Bom Estudo !