7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-03-23

Outline

Equações de recorrência e Mapas

- Num sistema de tempo discreto, a evolução da dinâmica é determinada por uma equação de recorrência:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$$

- Podemos ver que o domínio e a imagem da função $\mathbf{f}$ devem ser o mesmo conjunto, neste caso o espaço de estado do sistema:

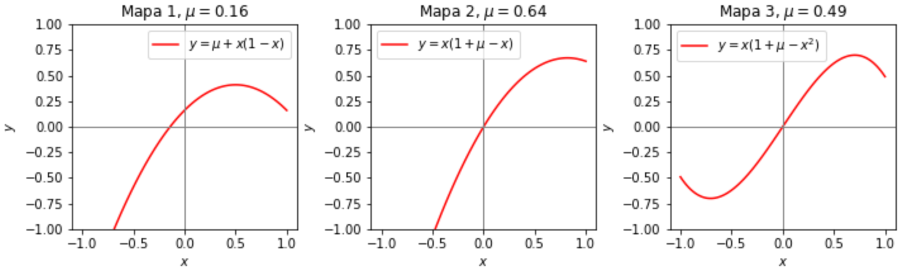
$$\mathbf{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}.$$

- Em sistemas complexos, esse tipo de função é denominado um mapa.

Exemplos em uma dimensão:

- Mapa 1:
$$x_{t+1} = \mu + x_t(1 - x_t)$$
- Mapa 2:
$$x_{t+1} = x_t(1 + \mu - x_t)$$
- Mapa 3:
$$x_{t+1} = x_t(1 + \mu - x_t^2)$$
- Mapa Logístico:
$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$$
- Mapa de Barraca (Tent):
$$x_{t+1} = \begin{cases} \mu x_t & 0 \leq x_t < 1/2 \\ \mu(1 - x_t) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Mapas


Mapa 1, $\mu = 0.16$
$y = \mu + x(1-x)$
Mapa 2, $\mu = 0.64$
$y = x(1+\mu-x)$
Mapa 3, $\mu = 0.49$
$y = x(1+\mu-x^2)$
x
y
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

Trajetórias

- Dada uma condição inicial, podemos calcular a trajetória do sistema.
- Quais os possíveis comportamentos dessas trajetórias?
- O comportamento depende do mapa e seus parâmetros, mas também da condição inicial.

Experimentar

Fazer código e rodar iterações (e plotar) para os mapas acima.

Pontos fixos

- Pontos fixos de uma equação de recorrência são valores $\mathbf{x}^*$ para os quais vale:
$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*).$$
- Por esssa definição, eles têm a característica de que, uma vez a recorrência atingindo um ponto fixo, ela permanecerá nesse mesmo ponto.
- Eles são as soluções da equação
$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$
- Por exemplo, os pontos fixos do mapa 1 são encontrados resolvendo
$$x = \mu + x(1 - x),$$
que é equivalente a
$$x^2 = \mu,$$
e portanto os pontos fixos são $-\sqrt{\mu}$ e $\sqrt{\mu}$.

Exercício

Exercício

Calcule os pontos fixos dos mapas 2 e 3.

Lembrando:

- Mapa 2:

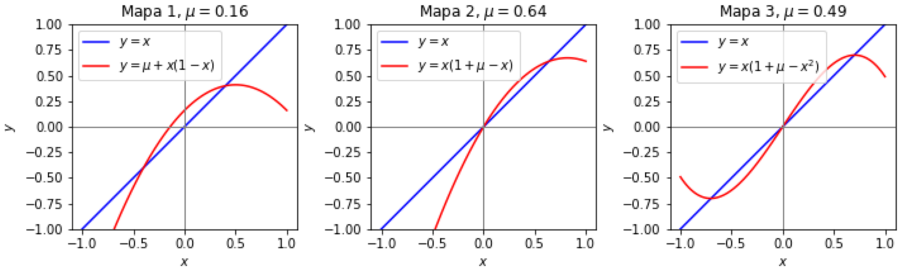
$$x_{t+1} = x_t(1 + \mu - x_t)$$

- Mapa 3:

$$x_{t+1} = x_t(1 + \mu - x_t^2)$$

Pontos fixos no gráfico

Note que os pontos fixos de um mapa (1D) são os pontos onde a curva do mapa $y = f(x)$ intercepta a curva identidade $y = x$.



Estabilidade

- Se uma trajetória atinge um ponto fixo, ela ficará presa nesse ponto fixo indefinidamente.
- Pergunta: O que acontece se a trajetória está próxima de um ponto fixo, sem estar nesse ponto?

Exemplo

Ver mapa 1 com $\mu = 0.16$ próximo a $x = 0.4$ e $x = -0.4$.

Estabilidade (cont)

- Um ponto fixo é estável se, quando o sistema está suficientemente próximo desse ponto, a trajetória é atraída para o ponto.
- Um ponto fixo é instável se, quando o sistema está próximo desse ponto a trajetória é afastada dele.
- No exemplo do mapa 1, o ponto fixo $\sqrt{\mu}$ é estável, enquanto que $-\sqrt{\mu}$ é instável.

Exercício

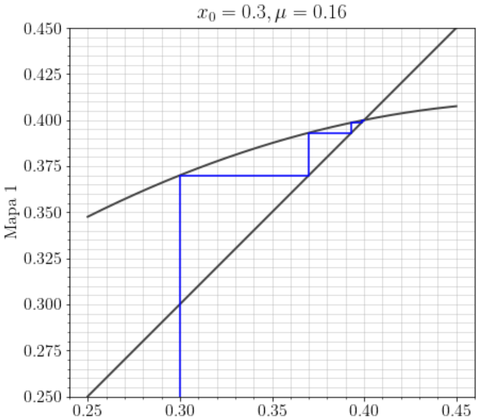
Verificar a numericamente estabilidade dos pontos fixos dos mapas 2 e 3.

Gráficos de teia de aranha

- Uma forma de analisar graficamente o comportamento de um mapa é através dos denominados gráficos de teia de aranha.
- Para produzir esses gráficos, seguimos o seguinte procedimentos:
  1. Desenhamos os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = x$.
  2. Marcamos no eixo x o ponto inicial x_0.
  3. Puxamos uma linha vertical desse ponto até encontrar a curva de $y = f(x)$.
  4. Puxamos agora uma linha horizontal desse novo ponto até encontrar a curva de $y = x$.
  5. Repetimos os dois passos anteriores pelo número de iterações desejadas.
- Os pontos x_i encontrados nesse processo são a trajetória do sistema.

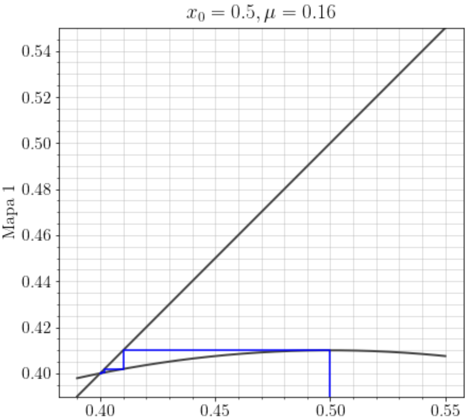
Exemplo 1

- Vejamos como fica o gráfico de teia de aranha para o mapa 1 com $\mu = 0.16$ e partindo de um ponto ligeiramente abaixo do ponto fixo $x^* = 0.4$:



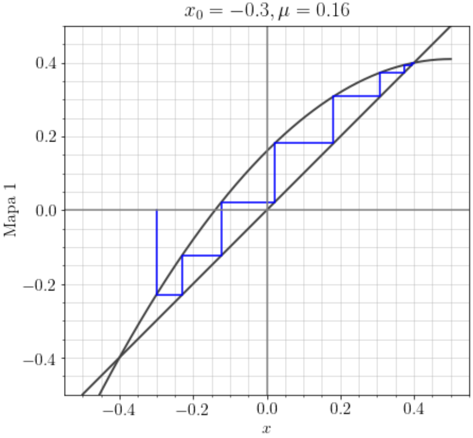
Exemplo 2

- Vejamos como fica o gráfico de teia de aranha para o mapa 1 com $\mu = 0.16$ e partindo de um ponto ligeiramente acima do ponto fixo $x^* = 0.4$:



Exemplo 3

- Vejamos agora o que acontece próximo ao ponto fixo instável $x^* = -0.4$:



Exercícios

Exercícios:

1. Verifique o que acontece no mapa 2 próximo ao ponto fixo $x^* = \mu$ (à esquerda e à direita), com $\mu = 0.64$.
2. Verifique o que acontece no mapa 2 próximo ao ponto fixo $x^* = 0$ (à esquerda e à direita), com $\mu = 0.64$.
3. Repita o procedimento para os três pontos fixos do mapa 3, com $\mu = 0.49$.

Condição de estabilidade (1D)

Para um mapa de uma dimensão, podemos encontrar facilmente a condição de estabilidade de um ponto fixo x^* através do seguinte raciocínio:

- O ponto fixo é estável se para valores x suficientemente próximos de x^*, x_{t+1} estará mais próximo que x_t de x^*.
- Definimos $\delta_t = x_t - x^*$. Para x_t suficientemente próximo de x^* temos $\delta_t \approx 0$.
- Queremos então garantir que $|\delta_{t+1}| < |\delta_t|$.
- Para δ_t pequeno, podemos desprezar fatores de ordem maior que linear e aproximar:

  $$x_{t+1} = f(x_t) = f(x^*) + f'(x^*)\delta_t.$$

  Portanto temos:

  $$\delta_{t+1} = f'(x^*)\delta_t,$$

  e para garantir $|\delta_{t+1}| < |\delta_t|$ devemos ter:

  $$\left|f'(x^*)\right| = 1.$$

Exemplo

No caso do mapa 1 temos

$$f(x) = \mu + x - x^2,$$

com pontos fixos $x_1 = -\sqrt{\mu}$ e $x_2 = \sqrt{\mu}$. Portanto temos

$$f'(x) = 1 - 2x$$

e para x_1:

$$|f'(x_1)| = |1 + 2\sqrt{\mu}|,$$

que é maior do que 1 para todos μ. Portanto, x_1 é instável. Para x_2 temos

$$|f'(x_2)| = |1 - 2\sqrt{\mu}| < 1,$$

o que é válido para

$$0 < \mu < 1.$$

Exercícios

Exercícios

Verificar a estabilidade dos pontos fixos dos mapas 2 e 3.

Mapas em maior dimensão

Para ver a generalização para mais dimensões, vamos começar com um caso especial, considerando a equação:

$$x_{t+1} = x_t - a x_{t-1}^2.$$

Primeiro, transformamos num sistema de primeira ordem com duas equações:

$$x_{t+1} = f_1(x_t, y_t) = x_t - a y_t^2$$

e

$$y_{t+1} = f_2(x_t, y_t) = x_t.$$

Definimos então $\delta_t = [x_t - x^*, y_t - y^*]^T$, onde x^* e y^* são as componentes do ponto fixo. Neste caso, o único ponto fixo é $[0, 0]^T$ (verifique isso) e $\delta_t = [x_t, y_t]^T$.

Mapas em maior dimensão (cont)

Como as duas funções são de dois parâmetros, precisamos agora linearizar próximo do ponto fixo em relação às duas variáveis:

$$\begin{aligned} x_{t+1} = f_1(x_t, y_t) &\approx f_1(x^*, y^*) + \frac{df_1}{dx}(x_t - x^*) + \frac{df_1}{dy}(y_t - y^*) \\ &= x^* + 1(x_t - x^*) - 2a(y_t - y^*), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_{t+1} = f_2(x_t, y_t) &\approx f_2(x^*, y^*) + \frac{df_2}{dx}(x_t - x^*) + \frac{df_2}{dy}(y_t - y^*) \\ &= y^* + 1(x_t - x^*). \end{aligned}$$

Mapas em maior dimensão (cont)

Em notação vetorial, para o nosso exemplo temos:

$$\delta_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & -2a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_t.$$

Para verificar a convergência para 0 de δ, lembramos que esse vetor pode ser expresso como uma combinação linear dos autovetores da matriz que aparece acima (vamos denominá-la **Df**):

$$\delta_t = a_t \mathbf{e}_1 + b_t \mathbf{e}_2,$$

onde a_t e b_t são escalares e $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são os autovetores correspondentes aos dois autovalores λ_1 e λ_2 da matriz acima.

Mapas em maior dimensão (cont)

Com isso e lembrando que $\mathbf{Df}e_i = \lambda_i e_i$, ficamos com:

$$\delta_{t+1} = a_{t+1}\mathbf{e}_1 + b_{t+1}\mathbf{e}_2 = a_t\lambda_1\mathbf{e}_1 + b_t\lambda_2\mathbf{e}_2,$$

o que, considerando a independência entre os autovetores, resulta nas equações

$$a_{t+1} = \lambda_1 a_t$$

e

$$b_{t+1} = \lambda_2 b_t.$$

Desta forma, para garantir a convergência, ambos os autovalores precisam ter valor absoluto menor que 1: $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$.

Mapas em maior dimensão (cont)

No nosso exemplo, os autovalores de **Df** são dados por

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2a \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que equivale a

$$\lambda^2 - \lambda + 2a = 0,$$

com raízes

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8a}}{2}.$$

Ambos esses autovalores terão módulo menor do que um se

$$0 < a < \frac{1}{8}.$$

Caso geral

No caso geral, a estabilidade é determinada pelos autovalores do jacobiano do mapa no ponto fixo:
Dada uma equação de recorrência de um sistema n-dimensional

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t),$$

um ponto fixo em $\mathbf{x}^*$ dessa recorrência será estável se todos os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ do jacobiano de $\mathbf{f}$, denotado $\mathbf{Df}$ e definido como

$$\mathrm{Df}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

tiverem módulo menor do que 1.

Exercício

Considere o mapa logístico com retardo, definido como:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_{t-1}).$$

Exercício

Encontre os pontos fixos dessa equação de recorrência e determine sua condição de estabilidade.