MAE221 - Probabilidade I

Prof. Fábio Machado

Lista exercícios da aula 04/03/2020

1. De quantos modos n casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem lado a lado? (Dica: use princípio da inclusão-exclusão)

2. Quantos números inteiros desde 1 até 3600, são divísiveis por 3, 5 ou 7?

3. Em um povoado de $n+1$ habitantes, uma pessoa passa uma informação a uma segunda pessoa. Na sequência, esta pessoa repassa a informação a uma outra pessoa, e assim por diante. Em cada passo uma pessoa é escolhida aleatoriamente entre as n outras pessoas para que a informação seja repassada. Encontrar a probabilidade de que a informação seja repassada r vezes sem:

   (a) regresar para a pessoa com a qual o processo iniciou;

   (b) repetir a informação para que já a ouviu.

4. Prove que

   (a)
   $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad \text{para } k \leq n;$$

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \text{ se } n > 0;$$

   (c)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}, \text{ se } n > 0;$$

   (d) Se m, n e r inteiros não-negativos com r não excedendo m ou n então,
   $$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k};$$

(e) Usando o anterior, mostre que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

5. Quantas são o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

onde $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ são inteiros não negativos tais que

(a) $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

(b) $0 \leq x_1 \leq 3$ e $1 \leq x_2 \leq 4$ e $x_3 \geq 15$

6. Prove usando um argumento combinatorio que

$$\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$$

é um número inteiro.

7. Prove que se n e k são inteiros tais que $1 \leq k \leq n$, então

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(a) usando um argumento combinatorio.

(b) usando uma prova algebrica baseada na expressão para $\binom{n}{r}$.

8. Mostre que $\binom{n}{k} \leq 2^n$ para todo inteiro positivo n e todo inteiro k com $0 \leq k \leq n$.

9. Mostre que (Teorema das diagonais)

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

10. Uma pessoa tem 8 amigos, dos quais 5 serão convidados para uma festa.

(a) Quantas escolhas existem se dois dos amigos estiverem brigados e por esse motivo não queiram comparecer simultaneamente?

(b) Quantas escolhas existem se dois dos amigos puderam ir apenas se forem juntos?

11. De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em r urnas de forma que a i-ésima urna contenha pelo menos m_i bolas, para cada $i = 1, \ldots, r$ suponha que $n \geq \sum_{i=1}^{r} m_i$.

12. Verifique analiticamente a igualdade a seguir

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}, 1 \leq k \leq n.$$

Agora, forneça um argumento combinatorio para esta identidade.