

## Monitoramento da variabilidade

Se monitoramos a média da Normal nas aulas anteriores, consideramos a variância conhecida.

Vamos supor que existe <sup>interesse</sup> em verificar se a variância está estável.

Existem várias estatísticas para isto:

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} S^2 \rightarrow \text{variância amostral} \\ R \rightarrow \text{amplitude amostral} \\ \max X_i - \min X_i \end{cases}$$

\_\_\_\_\_ x \_\_\_\_\_ x \_\_\_\_\_

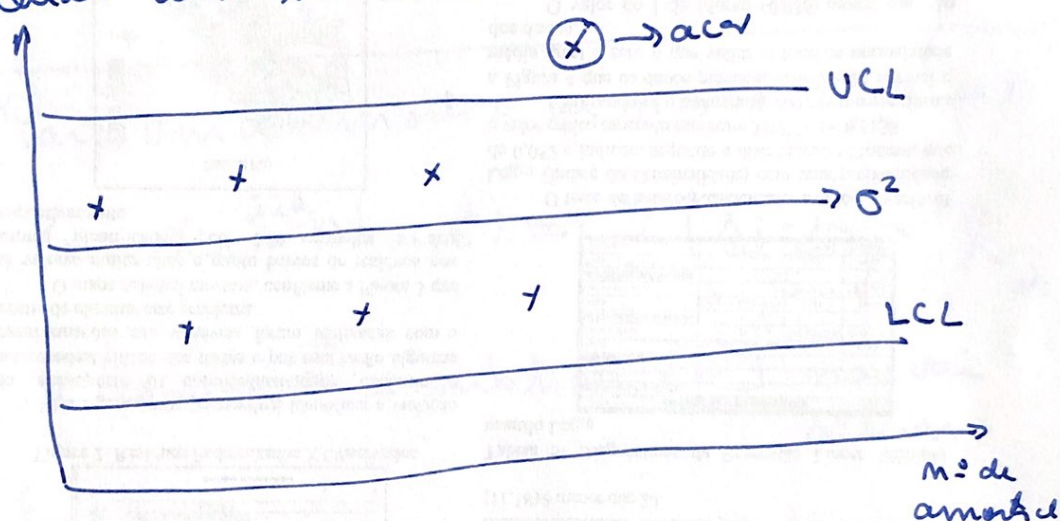
## Monitoramento da variabilidade através de $S^2$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \rightarrow \text{variância amostral}$$

Suposição:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$   
↓  
esta

$S^2$  é um estimador de  $\sigma^2$ .

Qual deve ser limite de controle estatístico?



Queremos saber qual a distribuição de  $S^2$ .

Dado  $\alpha \rightarrow$  então

$$\alpha/2 = P(S^2 > UCL | \sigma^2 = \sigma_0^2) + P(S^2 < LCL | \sigma^2 = \sigma_0^2)$$

Vamos lá!

$$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2_1$$

$$Z_1, \dots, Z_k \sim N(0, 1) \Rightarrow \sum Z_i^2 \sim \chi^2_k$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_1$$

$$X_1, \dots, X_k \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \sum \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{2k}.$$

Para uma amostra de  $n$  observações de  $X$

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n$$

Se somarmos  $\bar{X}$  e subtraímos  $\bar{X}$   $\uparrow$  não vai alterar

Então

$$\sum \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum \left( \frac{X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad \text{Problema Notável}$$

$$\sum \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 + \sum \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2 + 2 \underbrace{\sum \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right) \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)}_{= 0}$$

Então

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 + n \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2$$

$\downarrow$   
 $\chi^2_n$

$\downarrow$   
 $\chi^2_{n-1}$

$\downarrow$   
 $\left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2$   
 $\downarrow$   
 $\chi^2_1$

Observa-se que  $S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$\Rightarrow S^2(n-1) = \sum (X_i - \bar{X})^2$  então

$\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

Com isto conseguimos calcular os limites.

Bom! lado que queremos:

$$\frac{\alpha}{2} = P(S^2 > UCL | \sigma^2 = \sigma_0^2) + P(S^2 < LCL | \sigma^2 = \sigma_0^2)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)UCL}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right) +$$

$$P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)LCL}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\chi_{n-1}^2 > \frac{(n-1)UCL}{\sigma_0^2}\right) +$$

$$P\left(\chi_{n-1}^2 < \frac{(n-1)LCL}{\sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\right)$$

$\frac{(n-1)UCL}{\sigma_0^2} \rightarrow$  valor tabelado da qui quadrado.

$\frac{(n-1)UCL}{\sigma_0^2} \rightarrow$  Quantil de  $\chi^2$  tal que corresponde a  $1 - \alpha/2$  de probabilidade de

$$\frac{(n-1)UCL}{\sigma_0^2} = \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{UCL = \frac{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \sigma_0^2}{n-1}}$$

Similar

$$LCL = \frac{\chi^2_{n-1, \alpha/2} \sigma_0^2}{n-1}$$

## Exercícios

Determinem os limites de controle p/ o gráfico  $s^2$

| n  | $\sigma^2 = 1$  |     |      |     | $\sigma^2 = 10$ |     |      |     |
|----|-----------------|-----|------|-----|-----------------|-----|------|-----|
|    | $\alpha = 0.05$ |     | 0.01 |     | $\alpha = 0.05$ |     | 0.01 |     |
|    | LCL             | UCL | LCL  | UCL | LCL             | UCL | LCL  | UCL |
| 5  |                 |     |      |     |                 |     |      |     |
| 10 |                 |     |      |     |                 |     |      |     |
| 25 |                 |     |      |     |                 |     |      |     |

O que vocês podem observar com os limites de controle?

a) Quando n cresce

b) Quando  $\alpha$  decresce

Usem a função do R: ~~dchisq(x, gl,~~  
~~pchisq(q, gl,~~

$dchisq(x, df, mcp=0, log=FALSE)$

$pchisq(q, df, mcp=0, lower.tail=TRUE)$

$qchisq(p, df, mcp=0, n)$

$rchisq(n, df, mcp=0)$

parâmetro de var  
centralidade

graus de  
liberdade

## Calculando o poder

$$1 - \beta = P(S^2 > UCL / \sigma^2 = \sigma_1^2) +$$

$$P(S^2 < LCL / \sigma^2 = \sigma_1^2)$$

geralmente expressa-se  $\sigma_1^2 = k^2 \sigma_0^2$

Então

$$1 - \beta = P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma_1^2} > \frac{UCL(n-1)}{\sigma_1^2}\right) +$$

$$P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma_1^2} < \frac{LCL(n-1)}{\sigma_1^2}\right) =$$

$$= P(\chi^2_{(n-1)} > \frac{\chi^2_{(n-1, 1-\alpha/2)} \sigma_0^2 (n-1)}{k^2 \sigma_0^2}) +$$

$$+ P(\chi^2_{(n-1)} < \frac{\chi^2_{(n-1, \alpha/2)} \sigma_0^2 (n-1)}{k^2 \sigma_0^2})$$

## Exercício

Com os limites de controle determinados anteriormente, vamos calcular

o poder qdo:

$$\sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2 \rightarrow \delta = 1.25; 1.5; 2; 0.5$$

| n  | 0.5                        | 1.25      | 1.5       | 2.0       |
|----|----------------------------|-----------|-----------|-----------|
|    | $\alpha = 0.05 \quad 0.01$ | 0.05 0.01 | 0.05 0.01 | 0.05 0.01 |
| 5  |                            |           |           |           |
| 10 |                            |           |           |           |
| 25 |                            |           |           |           |

$$\sigma_0^2 = 1 \quad \sigma_0^2 = 10$$

Q por você observa?