PSI3211 – Circuitos I – Aula 10

Magno T. M. Silva e Daniel G. Tiglea

Escola Politécnica da USP

2019

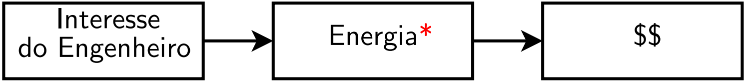
Sumário

Potência e Energia em R.P.S.

Respostas $\longrightarrow$ tensões e correntes

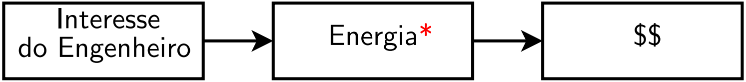
Em muitas aplicações, esses cálculos não são suficientes

Potência e Energia em R.P.S.



*Eficiência com que é gerada, distribuída, armazenada

Potência e Energia em R.P.S.



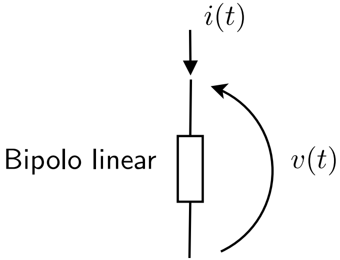
*Eficiência com que é gerada, distribuída, armazenada

Sistemas elétricos de potência: produzir energia e transportá-la até os centros de carga

Potência e Energia em R.P.S.

- Energia $\longrightarrow$ produto das concessionárias e base do faturamento
- Potência $\longrightarrow$ velocidade com que a energia é gerada ou absorvida
    - Potência Instantânea $\longrightarrow$ evitar exceder limites
    - Potência Média

Potência e Energia em R.P.S.



Potência instantânea: $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ (W, V, A)

Energia: $w(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau$ (J)

Para fins de faturamento $\longrightarrow$ $t - t_0 = 1$ mês

Medidor de kWh $\longrightarrow$ integrador

$$1\text{kWh} = 3{,}6 \times 10^6 \text{J}$$

Potência e Energia em R.P.S.

Tensão senoidal:

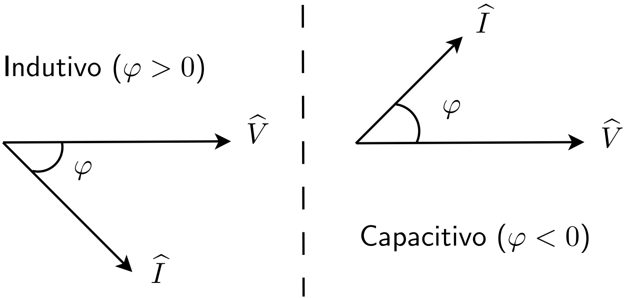
$$v(t) = V_m \cos \omega t \rightarrow \widehat{V} = V_m \underline{/0^\circ}$$

Bipolo linear em RPS:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \widehat{I} = I_m \underline{/-\varphi}$$

Na convenção do receptor:

- $\frac{\pi}{2} \geq \varphi > 0 \rightarrow$ indutivo
- $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0 \rightarrow$ capacitivo



Potência e Energia em R.P.S.

Neste caso, a potência instantânea é dada por

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Como

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left[\cos(a - b) + \cos(a + b) \right],$$

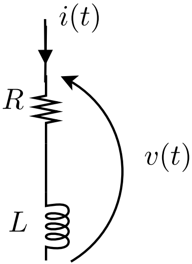
Podemos escrever

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Termo constante $\rightarrow$ potência média
Termo variável (freq. 2ω) $\rightarrow$ potência flutuante

Exemplo

$$R = 377\Omega \ L = 1 \text{ H } v(t) = 180\cos(377t) \text{ (V, s)}$$



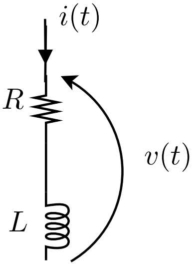
$$Z = R + j\omega L = 377 + j377 = 377\sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega$$

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{V}}{Z} = \frac{180\angle 0^\circ}{377\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 0{,}3376\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\therefore i(t) = 0{,}3376\cos(377t - 45^\circ) \text{ (A, s)}$$

Exemplo

$$R = 377\Omega \ L = 1 \text{ H } v(t) = 180\cos(377t) \text{ (V, s)}$$



$$i(t) = 0{,}3376\cos(377t - 45^\circ) \text{ (A, s)}$$

$$p(t) = \frac{1}{2}180 \times 0{,}3376\cos(45^\circ) + \frac{1}{2}180 \times 0{,}3376 \times \cos(754t - 54^\circ)$$
$$p(t) = 21{,}4847 + 30{,}3840\cos(754t - 45^\circ) \text{ (W, s)}$$

Potência e Energia em R.P.S.

Na convenção do receptor:

- $p(t) > 0$: bipolo recebe potência
- $p(t) < 0$: bipolo fornece potência (a potência está sendo devolvida ao circuito)

$p(t)$ varia com o tempo, mesmo em regime estacionário

$$\downarrow$$

Por isso alguns eletrodomésticos que usam motores tendem a vibrar e exigem o uso de amortecedores

Potência Média

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)dt$$

em RPS:

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\varphi$$

Valor Eficaz (ou RMS - *Root Mean Square*)

Potência média em um resistor

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt = R\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt$$

$$I_{\text{ef}}^2$$

Valor Eficaz

$$I_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt$$

$$\boxed{I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}}$$

Para senoide: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \theta)dt}$$

Como $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$:

$$I_{\text{ef}} = I_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\theta)dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

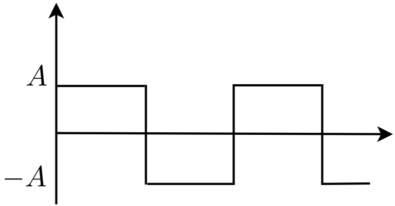
Valor Eficaz

O valor eficaz pode ser calculado p/ qualquer função periódica.
Para senoide:

$$\boxed{I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

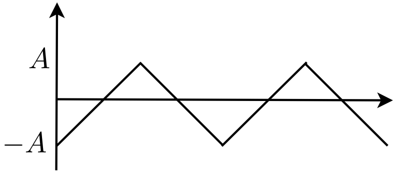
Para $i(t)$ onda quadrada com amplitude A:

$$I_{\text{ef}} = A$$



Para $i(t)$ triangular:

$$I_{\text{ef}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$



Potência Média

Voltando à potência média com $i(t)$ senoidal:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos\varphi = V\, I \cos\varphi,$$

sendo V e I valores **eficazes**.

(a) Potência ativa ou real

Em um circuito em RPS, a potência ativa ou real definida como a potência média

$$P = VI\cos\varphi \text{ [watts (W)]}$$

$V,\ I \longrightarrow$ valores eficazes

Potência que é dissipada ou convertida em forma não elétrica de energia

- Carga puramente resistiva: $\varphi = 0 \longrightarrow \cos\varphi = 1$

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

$$p(t) = VI + VI\cos(2\omega t) \geq 0$$

- Sempre positiva $\longrightarrow$ potência absorvida
- $w(t)$ cresce com o tempo

(a) Potência ativa ou real

- Carga puramente reativa: $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\varphi = 0$

$$P = 0$$

$$p(t) = VI\cos(2\omega t \pm 90^\circ)$$

- Troca de energia entre o elemento reativo e o gerador
- Energia em cada ciclo é absorvida e depois devolvida ao gerador

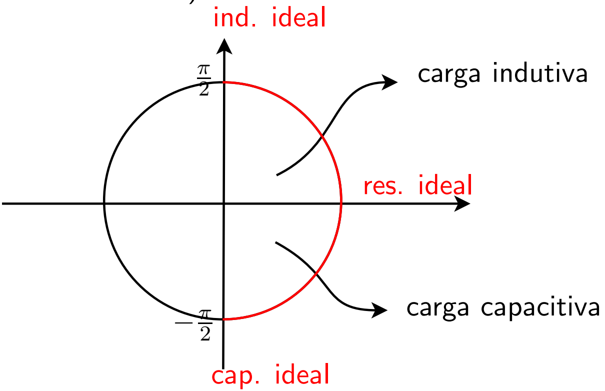
(a) Potência ativa ou real

- Casos intermediários: $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$

$$P = VI\cos\varphi > 0$$

$$p(t) > 0 \text{ ou } < 0$$

- Energia ora absorvida, ora parcialmente devolvida ao gerador (dissipação em resistores)



(b) Potência Aparente e Fator de Potência

$$| P_{ap} | = VI \text{ [volts-ampères (VA)]}$$

$$| P_{ap} | \geq P$$

- Parâmetro mais importante que a potência média
- Enquanto P representa a parcela que é usada p/ realizar algo útil, P_{ap} representa a potência total de que o sistema deve dispor
- Em sistemas onde a tensão é cte $\rightarrow$ equivale à especificação de corrente
- Fornece limite máximo de potência de trafos

(b) Potência Aparente e Fator de Potência

Fator de Potência:

$f_p = \dfrac{P}{VI}$ em um regime permanente qualquer

Bipolo linear em RPS:

$$\boxed{f_p = \frac{VI\cos\varphi}{VI} = \cos\varphi}$$

$f_p \rightarrow$ cosseno da defasagem entre tensão e corrente no bipolo

Como $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$, é preciso dizer se é atrasado ou adiantado

- corrente atrasada em relação à tensão $\rightarrow$ carga indutiva
- corrente adiantada em relação à tensão $\rightarrow$ carga capacitiva

(b) Potência Aparente e Fator de Potência

- carga resistiva: $f_p = 1$
- carga puramente reativa: $f_p = 0$
- carga: bipolo receptor $\rightarrow 0 \leq f_p \leq 1$

Companhias de distribuição têm p/ consumidores industriais uma tarifa mais alta p/ cargas em que $f_p < 0{,}92$

Baixo $f_p \rightarrow$ correntes maiores p/ realizar o mesmo trabalho que um circuito com $\uparrow f_p$

P_{ap} e $f_p \rightarrow$ aspectos práticos e econômicos da distribuição de potência

(c) Potência Reativa

$$p(t) = VI\cos\varphi + VI\cos(2\omega t - \varphi)$$

Como $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$:

$$p(t) = VI\cos\varphi + VI\left(\cos(2\omega t)\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(2\omega t)\operatorname{sen}(\varphi)\right)$$

$$p(t) = \color{red}{VI\cos\varphi\,(1+\cos(2\omega t))} + \color{blue}{VI\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2\omega t}$$

$$\boxed{\color{red}{VI\cos\varphi\,(1+\cos(2\omega t)) \geq 0}}$$

- Varia de 0 a $2VI\cos\varphi$
- Potência instantânea fornecida ao bipolo

$$\boxed{\color{blue}{VI\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2\omega t}}$$

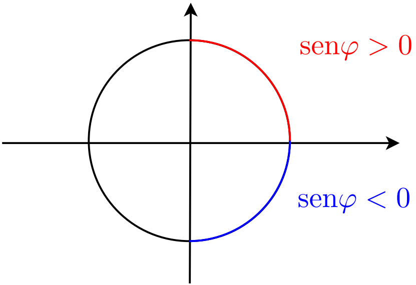
- Varia de $-VI\operatorname{sen}\varphi$ a $VI\operatorname{sen}\varphi$
- Potência que vai e vem entre bipolo e gerador
- Valor médio nulo

(c) Potência Reativa

Para caracterizar essa troca continuada de energia entre o gerador e bipolo, define-se a **potência reativa**

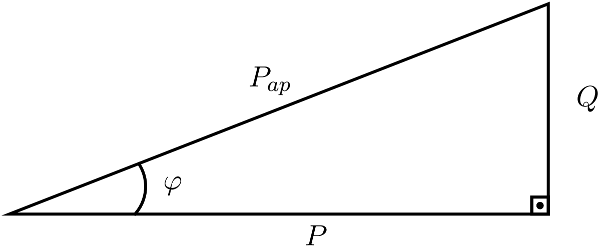
$$Q \triangleq V I \,\mathrm{sen}\varphi \text{ [volt-ampére reativo (VA}_\text{r}\text{)]}$$

$Q > 0 \rightarrow$ bipolo indutivo
$Q < 0 \rightarrow$ bipolo capacitivo

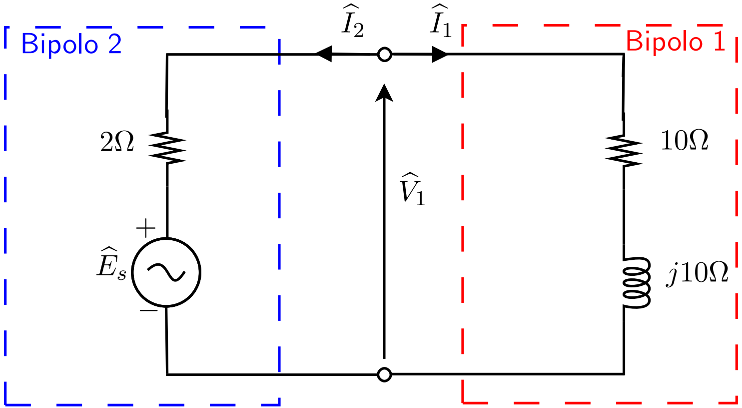


(c) Potência Reativa

$$| P_{ap} | = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



Exemplo



Considerando $\widehat{V}_1 = 110\underline{/0^\circ}\ V_{ef}$, calcule P, Q e f_p para cada bipolo.

Exemplo

$$\widehat{I}_1 = \frac{\widehat{V}_1}{Z_2} = \frac{110\underline{/0^\circ}}{10 + j10} = 7{,}78\underline{/-45^\circ}\ A_{ef}$$

$$\therefore \varphi_1 = 45^\circ \rightarrow f_p = 0{,}71 \text{ atrasado } (\widehat{I}_1 \text{ atrasada em relação a } \widehat{V}_1)$$

$$P_1 = V_1 I_1 \cos\varphi_1 = 110 \times 7{,}78 \times \cos 45^\circ = 605{,}14 \text{ W}$$

$$Q_1 = V_1 I_1 \,\mathrm{sen}\varphi_1 = 110 \times 7{,}78 \times \,\mathrm{sen}45^\circ = 605{,}14 \text{ VA}_\text{r}$$

$$\mid P_{ap_1} \mid = V_1 I_1 = 855{,}8 \text{ VA}$$

Exemplo

$$\widehat{I}_2 = -\widehat{I}_1 = 7{,}78\underline{/-45^\circ + 180^\circ} = 7{,}78\underline{/135^\circ}\ A_{ef}$$

$\therefore \varphi_2 = -135^\circ \rightarrow f_p = -0{,}71$ adiantado ($\widehat{I}_2$ adiantada em relação a $\widehat{V}_1$)

Bipolo é gerador $\rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$

$$P_2 = V_1 I_2 \cos\varphi_2 = 110 \times 7{,}78 \times \cos 135^\circ = -605{,}14 \text{ W}$$

Potência recebida < 0!

$$Q_2 = V_1 I_2 \,\mathrm{sen}\varphi_2 = 110 \times 7{,}78 \times \,\mathrm{sen}135^\circ = -605{,}14 \text{ VA}_\text{r}$$

$$\mid P_{ap_2} \mid = V_1 I_1 = 855{,}8 \text{ VA}$$

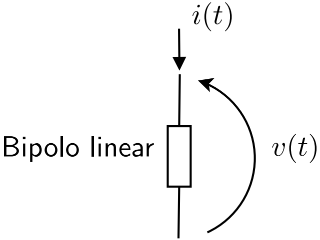
Exemplo

- B1 $\rightarrow$ fornece potência $\rightarrow$ indutivo
- B2 $\rightarrow$ fornece potência
- Conservação de potências ativa e reativa

Na convenção do gerador: $\widehat{I}'_2 = \widehat{I}_1 = 7{,}78\underline{/-45^\circ}$
$P_2 = 605{,}14$ W gerado
$Q_2 = 605{,}14$ VA$_\mathsf{r}$ gerado

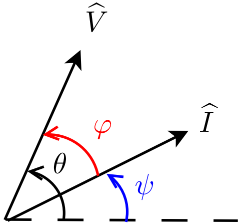
Representação Complexa da Potência

$v(t) = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \theta)$
$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi)$
$V,\ I \rightarrow$ valores eficazes



Fasores de tensão e corrente eficazes

$$\widehat{V} = Ve^{j\theta} \quad \widehat{I} = Ie^{j\psi}$$



$\widehat{I}$ atrasada em relação a $\widehat{V} \rightarrow$ carga indutiva

$$\varphi = \theta - \psi$$

Representação Complexa da Potência

Multiplicando $\widehat{V}$ por $\widehat{I}^* = Ie^{-j\psi}$, obtemos:

$$\widehat{V}\widehat{I}^* = VIe^{j(\theta-\psi)} = VIe^{j\varphi}$$

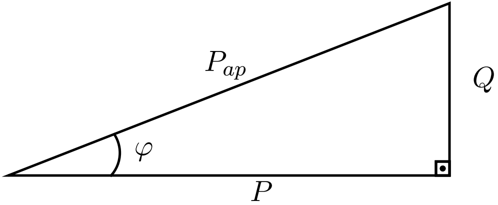
$$\widehat{V}\widehat{I}^* = VI\cos\varphi + jVI\,\mathrm{sen}\varphi = P + jQ$$

Com isso, temos:

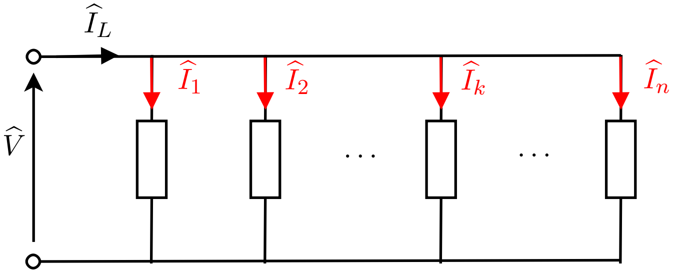
$$P_{ap} = \widehat{V}\widehat{I}^* = P + jQ = VIe^{j\varphi} \rightarrow \mid P_{ap} \mid = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\cos\varphi = f_p = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$



Circuito de Distribuição Monofásico



Corrente de linha: $\widehat{I}_L = \sum_{k=1}^{n} \widehat{I}_k$

$$P_{ap} = \widehat{V}\widehat{I}_L^* = \sum_{k=1}^{n} \widehat{V}\widehat{I}_k^* = \sum_{k=1}^{n} P_{ap_k}$$

$P_{ap_k} \rightarrow$ potência aparente no k-ésimo bipolo

Circuito de Distribuição Monofásico

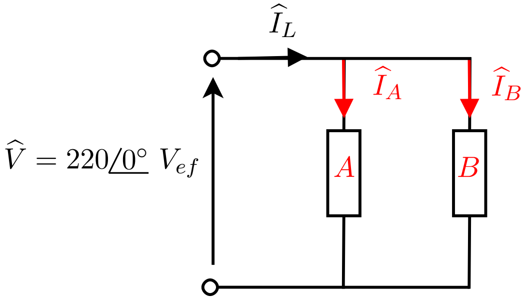
$$P_{ap} = \widehat{V}\,\widehat{I}_L^* = \sum_{k=1}^{n} P_k + j\sum_{k=1}^{n} Q_k$$

P_k e $Q_k \rightarrow$ pot. ativa e reativa, respectivamente, no k-ésimo bipolo

$$\mid \widehat{I}_L \mid = \frac{\mid P_{ap} \mid}{\mid \widehat{V} \mid} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Q_k\right)^2}}{\mid \widehat{V} \mid}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{\mid P_{ap} \mid} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k}{\mid P_{ap} \mid}$$

Exemplo



Potência e fator de potência conhecidos:

Carga	P (kW)	Q (kVA$_r$)	f_p	$\mid P_{ap} \mid$ (kVA)
A	24	?	0,6 atr.	?
B	8	?	0,8 adiant.	?
Total	?	?	?	?

$$\mid \widehat{I}_L \mid = ?$$

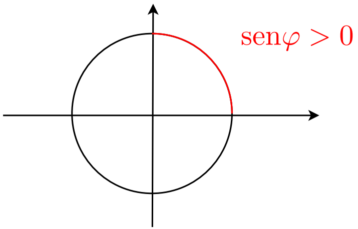
Exemplo

$$Q = VI\,\mathrm{sen}\varphi \quad P = VI\cos\varphi$$

$$\rightarrow Q = P\,\mathrm{tg}\varphi$$

$$\cos\varphi_A = f_{p_A} = 0{,}6 \rightarrow \mid \mathrm{sen}\varphi_A \mid = \sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$$

$f_{p_A} = 0{,}6$ atrasado $\rightarrow$ carga indutiva

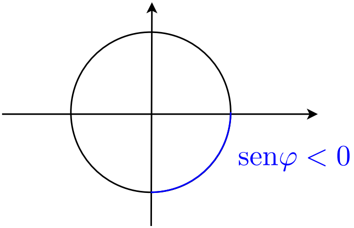


$$\therefore Q_A = P_A\,\mathrm{tg}\varphi_A = P_A\frac{\mathrm{sen}\varphi_A}{\cos\varphi_A} = 24\cdot\frac{0{,}8}{0{,}6} = 32\ \mathrm{kVA_r}$$

Exemplo

$$\cos\varphi_B = f_{p_B} = 0{,}8 \rightarrow \mid \operatorname{sen}\varphi_B \mid = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$$

$f_{p_B} = 0{,}8$ adiantado $\rightarrow$ carga capacitiva



$$\therefore Q_B = P_B \operatorname{tg}\varphi_B = P_B \frac{\operatorname{sen}\varphi_B}{\cos\varphi_B} = 8 \cdot \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -6 \text{ kVA}_\text{r}$$

Exemplo

$$P_{ap} = P + jQ$$

$$\rightarrow P_{ap_A} = 24 + j32 \rightarrow \mid P_{ap_A} \mid = 40 \text{ kVA}$$

$$\rightarrow P_{ap_B} = 8 - j6 \rightarrow \mid P_{ap_B} \mid = 10 \text{ kVA}$$

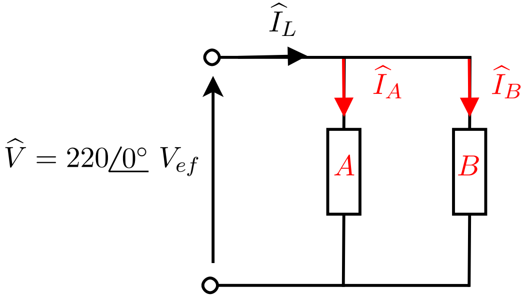
$$\rightarrow P_{ap_t} = 32 + j26 \rightarrow \mid P_{ap_t} \mid = 41{,}23 \text{ kVA}$$

$$\cos\varphi_L = \frac{P_t}{\mid P_{ap_t} \mid} = \frac{P_A + P_B}{\mid P_{ap_t} \mid} = \frac{32}{41{,}23} = 0{,}7761 \text{ atrasado,}$$

pois $Q_t = 26$ kVA$_{\mathrm{r}} > 0 \rightarrow$ carga total indutiva

$$\mid \widehat{I}_L \mid = \frac{\mid P_{ap_t} \mid}{\mid \widehat{V} \mid} = \frac{41{,}23 \times 10^3}{220} = 187{,}41 \ A_{ef}$$

Exemplo



Portanto:

Carga	P (kW)	Q (kVA$_r$)	f_p	$\mid P_{ap} \mid$ (kVA)
A	24	32	0,6 atr.	40
B	8	-6	0,8 adiant.	10
Total	32	26	0,7761 atr.	41,23

$$\mid \widehat{I}_L \mid = 187{,}41\ A_{ef}$$

Correção do Fator de Potência

- Maioria das instalações elétricas é indutiva ($\widehat{I}$ atrasada em relação a $\widehat{V}$)

Companhias de distribuição cobram **taxa adicional** para $f_{p_M} < 0{,}92$/hora

- Correntes maiores devem ser previstas para os geradores (média a cada 15 min)

Exemplo

$$P = 11 \text{ kW} \qquad \widehat{V} = 220\underline{/0^\circ} \ V_{ef} \qquad f_p = 1$$

$$P = VI\cos\varphi = 11000 \text{ W}$$

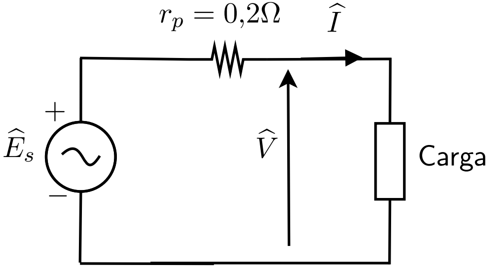
$$I = \frac{P}{V\cos\varphi} = \frac{11000}{220} = 50 \ A_{ef}$$

Se $P = 11$ kW e $\widehat{V} = 220\underline{/0^\circ} \ V_{ef}$ com $f_p = \cos 60^\circ = 0{,}5$ atrasado:

$$I = \frac{P}{V\cos\varphi} = \frac{11000}{220 \times 0{,}5} = 100 \ A_{ef}$$

Perdas nas Linhas

Exemplo:



$f_p = 1$

$\mid \widehat{V} \mid = 220 \ V_{ef}$

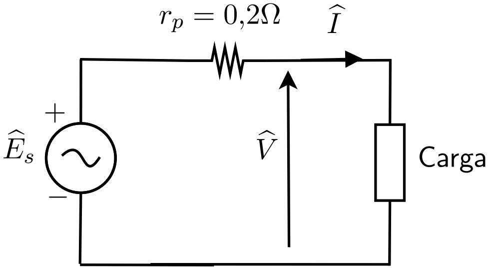
$\mid \widehat{I} \mid = 50 \ A_{ef}$

Para suprir 11 kW à carga, é necessário gerar $11{,}5$ kW, pois a resistência de perdas absorve $r_p I_{ef}^2 = 500$ W.

O valor cobrado é sobre os 11 kW, ou seja, são cobrados $\dfrac{11}{11{,}5} = 95{,}6\%$ da energia produzida

Perdas nas Linhas

Exemplo:



$f_p = 0{,}5$

$|\ \widehat{V}\ | = 220\ V_{ef}$

$|\ \widehat{I}\ | = 100\ A_{ef}$

Para suprir 11 kW à carga, é necessário gerar 13 kW, pois a resistência de perdas absorve $r_p I_{ef}^2 = 2$ kW.

Neste caso, são cobrados $\dfrac{11}{13} = 84{,}6\%$ da energia produzida

Medidores

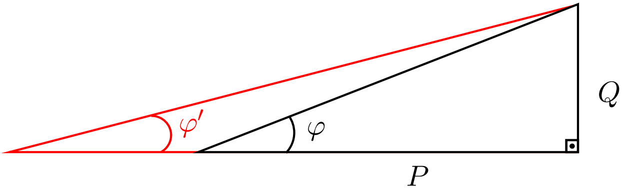
Medidores de kWh e $\mathsf{kVA_rh}$ $\rightarrow$ p/ medir energia total e reativa em um Δt (=15 min) $\rightarrow$ cálculo do f_p médio

Correção do Fator de Potência

Cargas industriais $\rightarrow$ normalmente indutivas

Exemplo: motor de indução 1 kW, $f_p = 0{,}8$ atr. $\rightarrow$ **modificar para 0,95 atr.**

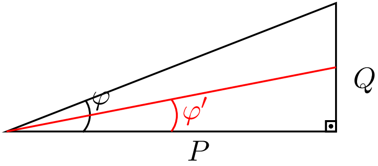
$\rightarrow$ Aumentar P mantendo Q cte $\rightarrow$ aumenta a conta

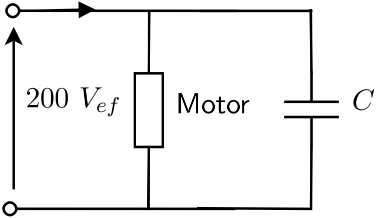


Aumento da conta

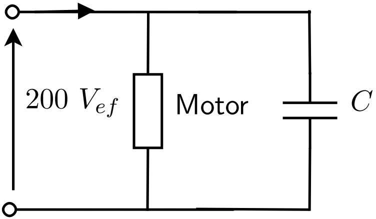
Correção do Fator de Potência

→ Adicionar carga puramente reativa em //





Correção do Fator de Potência



Tensão $200\ V_{ef}$, $f_p = 0{,}8$ atr. $\rightarrow \cos\varphi = 0{,}8 \quad \text{sen}\varphi = 0{,}6$

$$Q_M = P_M\,\text{tg}\varphi = 1000 \times \frac{0{,}6}{0{,}8} = 750\ \mathsf{VA_r}$$

$$P_{ap_M} = 1000 + j750\ \mathsf{VA}$$

Para $f_p = 0{,}95$ atr. $\rightarrow \varphi' > 0$

$$\varphi' = \arccos(0{,}95) = 18{,}2^\circ$$

$$Q_t = P\,\text{tg}\varphi' = 1000 \cdot 0{,}3287 \approx 329\ \mathsf{VA_r}$$

Correção do Fator de Potência

$$\therefore P_{ap_t} = 1000 + j329$$

Como $P_{ap_t} = P_{ap_M} + P_{ap_C}$ e $P_{ap_M} = 1000 + j750$:

$$P_{ap_C} = -j421 \text{ VA e } Q_C = -421 \text{ VA}_\text{r}$$

$$P_{ap_C} = \widehat{V}\widehat{I}_C^* \rightarrow \widehat{I}_C^* = \frac{-j421}{200} = -j2{,}105 \ A_{ef}$$

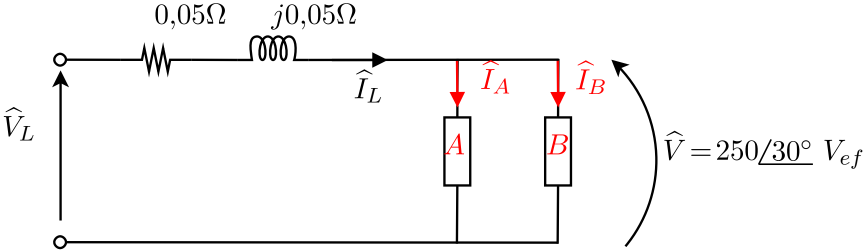
$$\widehat{I}_C = j\omega C\widehat{V} \rightarrow \widehat{I}_C^* = -j\omega C\widehat{V}$$

Considerando $\omega = 377\text{rad/s}$:

$$-j2{,}105 = -j377 \times C \times 200 \rightarrow C = 27{,}92\mu F$$

Quando C é muito grande, utiliza-se uma máquina girante (condensador síncrono que simula um capacitor)

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]



- Carga $A \rightarrow P = 8$ kW, $f_p = 0{,}8$ adiant.
- Carga $B \rightarrow P_{ap_B} = 20$ kVA, $f_p = 0{,}6$ atr.

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]

(a) f_p das cargas em paralelo

$$\widehat{I}_L = \widehat{I}_A + \widehat{I}_B \quad \widehat{V} = 250\underline{/30^\circ}\ V_{ef}$$

$$P_{ap_{total}} = \widehat{V}\widehat{I}_L^* = \widehat{V}(\widehat{I}_A^* + \widehat{I}_B^*) = P_{ap_A} + P_{ap_B}$$

$$P_{ap_A} = \widehat{V}\widehat{I}_A^* = P_A + jQ_A$$

$$P_A = 8000 \text{ W e } f_{p_A} = 0{,}8 \text{ adiant.} \rightarrow \operatorname{sen}\varphi_A = -0{,}6$$

$$Q_A = P_A \operatorname{tg}\varphi_A = 8000 \times \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -6000 \text{ VA}_\text{r}$$

$$\therefore P_{ap_A} = 8000 - j6000 \text{ VA}$$

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]

$$P_{ap_B} = P_B + jQ_B$$

$$VI_B = 20000 \text{ VA} = \mid P_{ap_B} \mid$$

$$P_B = VI_B \cos\varphi_B = 20000 \times 0{,}6 = 12000 \text{ W}$$

$$Q_B = VI_B \,\mathrm{sen}\varphi_B$$

Como $f_{p_B} = 0{,}6$ atr. $\rightarrow$ carga indutiva $\rightarrow \varphi_B > 0 \rightarrow \ \mathrm{sen}\varphi_B = 0{,}8$

$$Q_B = 20000 \times 0{,}6 = 16000 \text{ VA}_\text{r}$$

$$\therefore P_{ap_B} = 12000 + j16000$$

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]

$$P_{ap_T} = P_{ap_A} + P_{ap_B} = 20000 + j10000 \text{ VA}$$

$$\mid P_{ap_T} \mid = 22360{,}7 \text{ VA}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_T = \frac{Q_T}{P_T} \text{ ou } \cos\varphi_T = f_{p_T} = \frac{P_T}{\mid P_{ap_T} \mid} = \frac{20000}{22360{,}7} = 0{,}8944$$

Como $Q_T > 0$, carga total é indutiva $\rightarrow f_{p_T}$ está **atrasado** e $\varphi_T > 0$

$$\therefore f_{p_T} = 0{,}8944 \text{ atrasado}$$

$$\varphi_T = 26{,}5651^\circ = \arccos(0{,}8944)$$

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]

(b) Potência aparente necessária para alimentar as cargas, amplitude da corrente $\widehat{I}_L$ e a potência média dissipada na linha de transmissão

P_{ap} necessária para alimentar as cargas $\rightarrow$ já foi calculada $= 20000 + j10000$ VA

$$\widehat{V}\widehat{I}_L^* = P_{ap_T}$$

$$250\angle 30° \widehat{I}_L^* = 22360{,}7\angle 26{,}57°$$

$$\widehat{I}_L^* = 89{,}4428\angle -3{,}43° \rightarrow \widehat{I}_L = 89{,}4428\angle 3{,}43° \ A_{ef}$$

$$P_L = RI_L^2 = 0{,}05(89{,}4428)^2 \approx 400 \text{ W}$$

A companhia deve gerar 20400 W e cobrar por 20000 W $\rightarrow \dfrac{20000}{20400} \approx 98{,}04\%$ da energia gerada é cobrada

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]

(c) Se a freq. da fonte for 60 Hz, determine o valor do capacitor que, quando ligado em paralelo com as cargas, corrige o f_p para 1. Repita o item (b) para a nova carga.

$$P_{ap_T} = P_{ap_A} + P_{ap_B} + P_{ap_C}$$

$$P_{ap_T} = 20000 + j10000 + \widehat{V}\widehat{I}_C^* = 20000 \text{ VA, pois } \cos\varphi_T = 1$$

$$-j10000 = \widehat{V}\widehat{I}_C^* = 250\underline{/30^\circ}(-j\omega C 250\underline{/-30^\circ})$$

$$\therefore 10^4 = \mid \widehat{V} \mid^2 \omega C \rightarrow C = \frac{10^4}{250^2 \times 377} = 424{,}4\mu F$$

Exemplo Adicional [Nilsson & Riedel]

$$P_{ap_T} = 20 \text{ kVA}$$

$$P_{ap_T} = \widehat{V}\widehat{I}_L^* \rightarrow \widehat{I}_L = \frac{P_{ap_T}}{\widehat{V}^*}$$

$$\therefore \widehat{I}_L = \frac{20000\underline{/0^\circ}}{250\underline{/-30^\circ}} = 80\underline{/30^\circ}\ A_{ef}$$

$$P_L = RI_L^2 = 0{,}05 \times (80)^2 = 320 \text{ W}$$

A companhia deve gerar 20320 W e cobrar por 20000 W $\rightarrow \dfrac{20000}{20320} \approx 98{,}4\%$ da energia gerada é cobrada

Potência Ativa e Reativa nas Impedâncias e Admitâncias

Impedância:

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Admitância:

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

$$P_{ap} = \widehat{V}\widehat{I}^{*} = Z(j\omega)\widehat{I} \cdot \widehat{I}^{*} = Z(j\omega) \mid \widehat{I} \mid^{2}$$

Ou ainda:

$$P_{ap} = R(\omega) \mid \widehat{I} \mid^{2} + jX(\omega) \mid \widehat{I} \mid^{2} = P + jQ$$

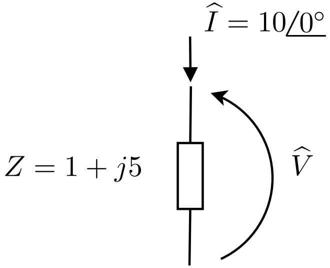
Analogamente:

$$P_{ap} = \widehat{V}\widehat{I}^{*} = \widehat{V} \cdot Y^{*}(j\omega)\widehat{V}^{*} = Y^{*}(j\omega) \mid \widehat{V} \mid^{2}$$

$$P_{ap} = G(\omega) \mid \widehat{V} \mid^{2} - jB(\omega) \mid \widehat{W} \mid^{2} = P + jQ$$

Generalização da Lei de Joule

Exemplo:



$$P_{ap} = R(\omega) \mid \widehat{I} \mid^2 + jX(\omega) \mid \widehat{I} \mid^2$$

$$P_{ap} = 1 \cdot (10)^2 + j5 \cdot (10)^2 = 100 + j500 \text{ VA}$$

$$\therefore P = 100 \text{ W e } Q = 500 \text{ VA}_\text{r}$$

Generalização da Lei de Joule

Ou ainda:

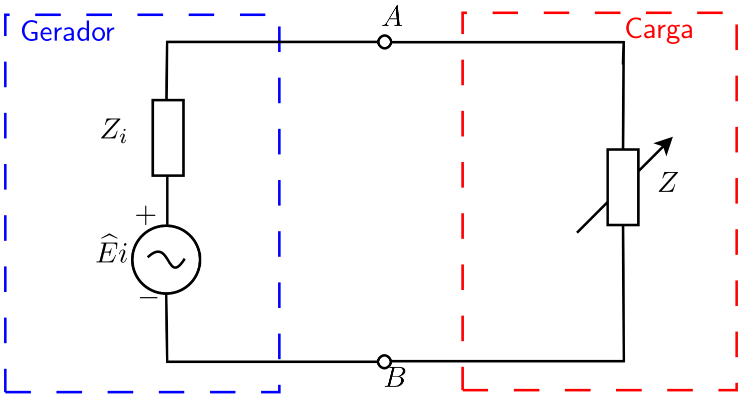
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 + j5} = 0{,}0385 - j0{,}1923$$

$$\widehat{V} = Z(j\omega) \cdot \widehat{I} = (1 + j50) \times 10\underline{/0^\circ} = 10 + j50 = 50{,}99\underline{/78{,}7^\circ}$$

$$P_{ap} = G(\omega) \mid \widehat{V} \mid^2 - jB(\omega) \mid \widehat{V} \mid^2$$

$$P_{ap} = 0{,}0385 \cdot (50{,}99)^2 - j(-0{,}1923) \cdot (50{,}99)^2 = 100 + j500 \text{ VA}$$

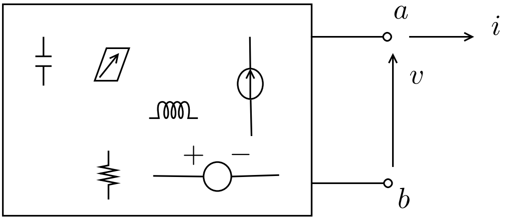
Transferência de Potência em RPS

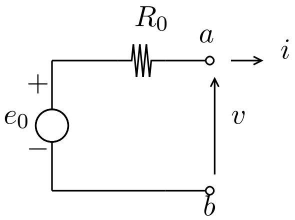


Transferência de Potência em RPS

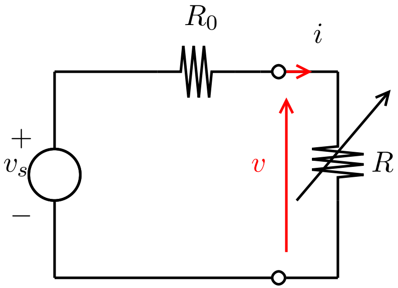
Recordação:

- Teorema de Thévenin:





- Teorema da máxima transferência de potência:



Máx. transf. de pot. $\rightarrow R = R_0$

Transferência de Potência em RPS

Gerador senoidal representado pelo eq. de Thévenin tem impedância interna

$$Z_i = R_i + jX_i$$

Carga: $Z = R + jX$ $\quad\quad$ R, R_i, X, $X_i \rightarrow$ funções da frequência

Potência ativa recebida pela carga: $P = R \mid \widehat{I} \mid^2$

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}_i}{Z_{tot}}, \text{ com } Z_{tot} = (R + R_i + j(X + X_i)$$

$$\mid \widehat{I} \mid^2 = \frac{\mid \widehat{E}_i \mid^2}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}$$

Transferência de Potência em RPS

Substituindo $| \widehat{I} |^2$ na expressão da potência:

$$P = \frac{R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \cdot | \widehat{E}_i |^2$$

Para maximizar essa potência, deve-se impor a condição

$$\boxed{X = -X_i}$$

Se o gerador for indutivo, a carga deve ser capacitiva e vice-versa.

Transferência de Potência em RPS

Se $X = -X_i$:

$$P = \frac{R}{(R+R_i)^2} \cdot \mid \widehat{E}_i \mid^2$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mid \widehat{E}_i \mid^2 (R+R_i)^2 - R \mid \widehat{E}_i \mid^2 (R+R_i)}{(R+R_i)^4}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \leftrightarrow (R+R_i) = 2R,$$

o que implica que a transferência de potência será máxima se

$$\boxed{R = R_i}$$

Em outras palavras, a máxima transferência de potência ocorrerá se $R = R_i$ e $X = -X_i$, ou seja,

$$\boxed{Z = Z_i^*}$$

Casamento de Impedâncias

Transferência de Potência em RPS

A máxima transferência de potência vale:

$$P_{\max} = \frac{R_i}{(2R_i)} \mid \widehat{E}_i \mid^2$$

$$\boxed{P_{\max} = \frac{\mid \widehat{E}_i \mid^2}{4R_i}}$$

$$\eta = 50\%$$

(pot. perdida no gerador é igual à pot. dissipada na carga)

- Rendimento baixo p/ técnicas de potência
  - Por isso, máquinas elétricas raramente operam com cargas casadas
- Em comunicações, em geral, há casamento de impedâncias

Transferência de Potência em RPS

Efeito da descombinação de impedâncias $\rightarrow$ transp.

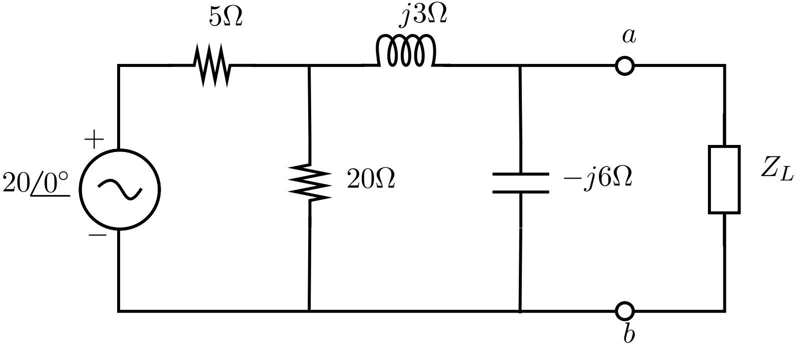
$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4R/R_i}{(1 + R/R_i)^2 + (X + X_i)^2/R_i^2}$$

$$\frac{P}{P_{\max}} \approx 4\frac{R}{R_i}\frac{1}{(1 + R/R_i)^2} \text{ se } \frac{(X + X_i)^2}{R_i^2} \ll 1$$

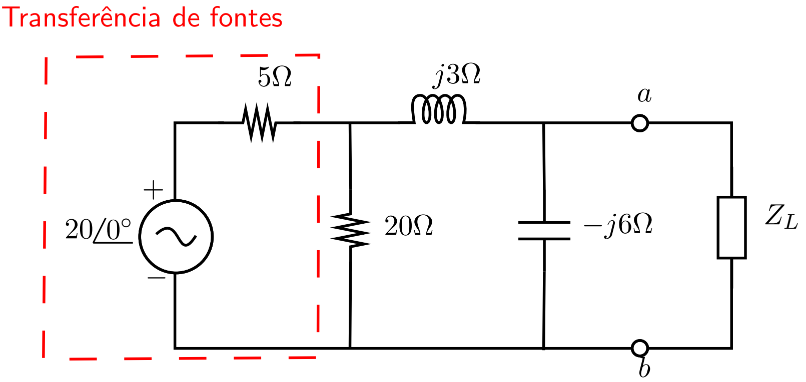
$$R \approx R_i \rightarrow \text{leva a carga} \approx \text{casada}$$

Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]

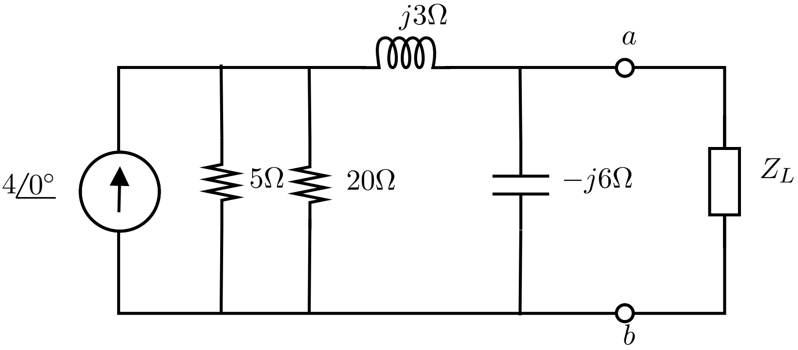
Determinar a impedância Z_L para que ocorra max. transf. de potência para Z_L



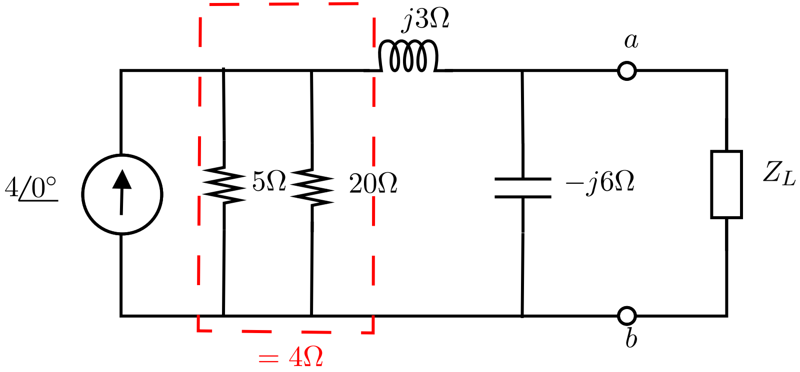
Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]



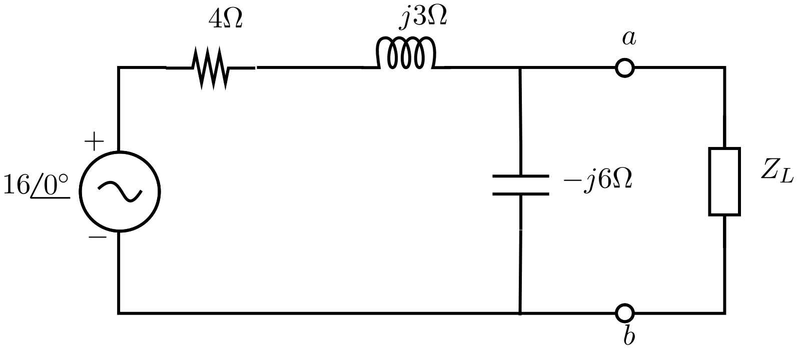
Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]



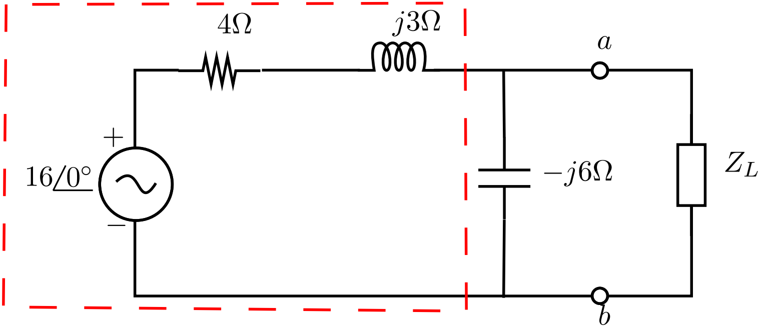
Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]



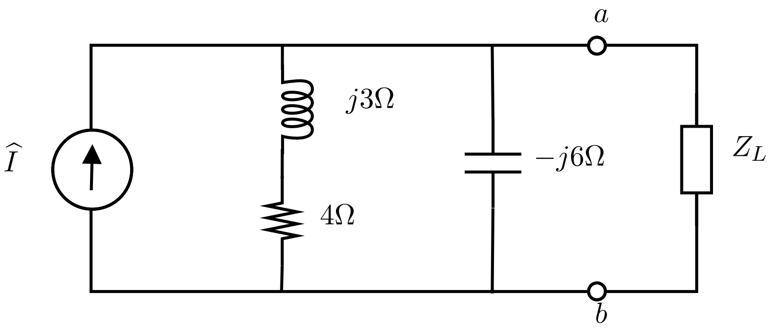
Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]



Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]



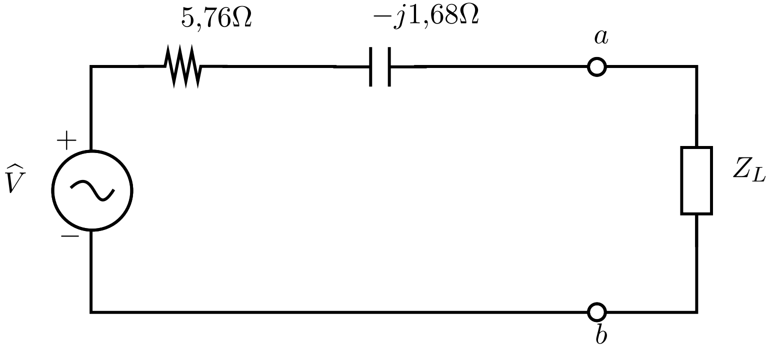
Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]



$$\widehat{I} = \frac{16\underline{/0^\circ}}{4+j3} = \frac{16\underline{/0^\circ}}{5\underline{/36{,}87^\circ} = 3{,}2\underline{/-36{,}87^\circ}\ A_{ef}}$$

$$Z_{eq} = \frac{(4+j3)\cdot(-j6)}{4+j3-j6} = 5{,}76 - j1{,}68\ \Omega$$

Exemplo [Nilsson & Reidel p. 343]

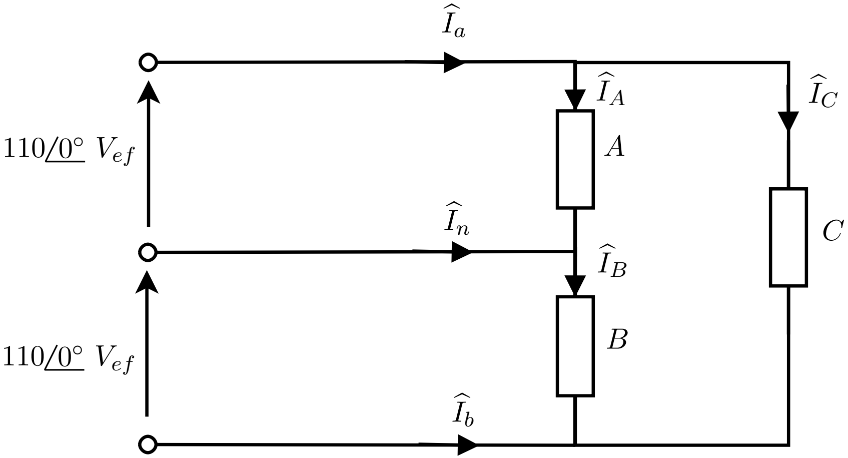


$$\widehat{V} = (5{,}76 - j1{,}68) \cdot 3{,}2\underline{/-36{,}87^\circ} = 19{,}2\underline{/-53{,}13^\circ}\ V_{ef}$$

$$\boxed{Z_L = Z^* = 5{,}76 + j1{,}68\ \Omega}$$

$$\boxed{P_{\max} = \frac{|\ \widehat{E}_i\ |^2}{4R_i} = \frac{(19{,}2)^2}{4 \times 5{,}76} = 16\ \text{W}}$$

Exemplo - Monofásico a 3 fios



Carga A: lâmpadas incandescentes ($f_p = 1$) consumindo 5 kW
Carga B: lâmpadas fluorescentes ($f_p = 0{,}8$ atr.) consumindo 5 kW
Carga C: $Z_C = 5 + j3\ \Omega$

Exemplo - Monofásico a 3 fios

Determine todas as correntes do circuito e preencha a tabela abaixo:

Carga	P (kW)	Q (kVA$_\text{r}$)	f_p	$\mid P_{ap} \mid$ (kVA)
A	5	?	1	?
B	5	?	$0{,}8$ atr.	?
C	?	?	?	?
Total	?	?	?	?

Exemplo - Monofásico a 3 fios

Carga C:

$$Z_C = 5 + j3\ \Omega \rightarrow Y_C = \frac{1}{5 + j3} = 0{,}1471 - j0{,}0882\ \text{S}$$

$$\therefore Y_C^* = G - jB = 0{,}1471 + j0{,}0882\ \text{S}$$

$$P_C = G \mid \widehat{V} \mid^2 = 0{,}1471(220)^2 = 7{,}1176\ \text{kW}$$

$$Q_C = -B \mid \widehat{V} \mid^2 = 0{,}0882(220)^2 = 4{,}2706\ \text{kVA}_\text{r}$$

$$P_{ap_C} = P + jQ \rightarrow \mid P_{ap_C} \mid^2 = \sqrt{7{,}1176^2 + 4{,}2706^2} = 8{,}3005\ \text{kVA}$$

$$\text{tg}\varphi_c = \frac{Q}{P} \rightarrow \text{tg}\varphi_c = 0{,}5996 \approx 0{,}6$$

$$\therefore \varphi_c = 0{,}5401\ \text{rad} \rightarrow f_{p_c} = \cos\varphi_c = 0{,}8575\ \text{atr.}$$

Exemplo - Monofásico a 3 fios

Carga B:

$$Q = P\,\mathrm{tg}\varphi_b = 5 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}8} = 3{,}75 \text{ kVA}_\text{r}$$

$$P_{ap_B} = P + jQ \rightarrow \mid P_{ap_B} \mid^2 = \sqrt{5^2 + 3{,}75^2} = 6{,}25 \text{ kVA}$$

Carga A:

$$f_{p_A} = 1 \rightarrow Q = 0 \text{ e} P_{ap_A} = P = 5\text{kVA}$$

Total: $P_T = P_A + P_B + P_C = 17{,}1176$ kW
$Q_T = Q_A + Q_B + Q_C = 8{,}0206$ kVA$_\text{r}$

$$P_{ap_T} = P_T + Q_T \rightarrow \mid P_{ap_T} \mid^2 = \sqrt{17{,}12^2 + 8{,}02^2} = 18{,}9035 \text{ kVA}$$

$$f_{p_T} = \frac{P_T}{\mid P_{ap_T} \mid} = 0{,}9055 \text{ atr.}$$

Exemplo - Monofásico a 3 fios

$$\widehat{V}_A \widehat{I}_A^* = P_{ap_A} \rightarrow 110\widehat{I}_A^* = 5000$$

$$\boxed{\widehat{I}_A = 45{,}45\underline{/0^\circ}\ A_{ef}}$$

$$\widehat{V}_B \widehat{I}_B^* = P_{ap_B} \rightarrow 110\widehat{I}_B^* = (5 + j3{,}75) \times 10^3$$

$$\boxed{\widehat{I}_B = 56{,}8182\underline{/-36{,}87^\circ}\ A_{ef}}$$

$$\widehat{V}_C \widehat{I}_C^* = P_{ap_C} \rightarrow 110\widehat{I}_C^* = (7{,}1196 + j4{,}2689) \times 10^3$$

$$\boxed{\widehat{I}_B = 37{,}7297\underline{/-30{,}9638^\circ}\ A_{ef}}$$

$$\widehat{I}_a = \widehat{I}_A + \widehat{I}_C = \boxed{80{,}1924\underline{/-14{,}0084^\circ}\ A_{ef}}$$

$$\widehat{I}_b = -(\widehat{I}_B + \widehat{I}_C) = \boxed{94{,}4274\underline{/145{,}49^\circ}\ A_{ef}}$$

$$\widehat{I}_n = \widehat{I}_A - \widehat{I}_B = \boxed{34{,}090\underline{/90^\circ}\ A_{ef}}$$

Exemplo - Monofásico a 3 fios

Respostas

Carga	P (kW)	Q (kVA$_r$)	f_p	$\mid P_{ap} \mid$ (kVA)
A	5	0	1	5
B	5	3,75	$0{,}8$ atr.	6,25
C	7,1176	4,2706	0,8575 atr.	8,3005
Total	17,1176	8,0206	0,9055 atr.	18,9035

Correntes (em A_{ef}):

$\widehat{I}_A = 45{,}45\underline{/0°}$ $\widehat{I}_B = 56{,}8182\underline{/-36{,}87°}$ $\widehat{I}_C = 37{,}7297\underline{/-30{,}9638°}$

$\widehat{I}_a = 80{,}1924\underline{/-14{,}0084°}$ $\widehat{I}_b = 94{,}4274\underline{/145{,}49°}$ $\widehat{I}_n = 34{,}0909\underline{/90°}$

Monofásico a 3 fios

- **Trafo** com tomada central
- fio neutro ligado ao terra p/ proteção
- alimentação de cargas de 100 V e 220 V
- equilíbrio $\widehat{I}_n = 0$

Objetivo do fio neutro $\rightarrow$ manter constantes as tensões nas cargas mesmo que haja desequilíbrio

Cargas em 220 V $\rightarrow$ consomem $+$ potência
$\rightarrow$ em 220 puxam menos corrente que em 110 V $\rightarrow$ fio condutor de diâmetro menor