

PSI3213 – Circuitos Elétricos II

Diagramas de Bode

Magno T. M. Silva e Flávio R. M. Pavan

Escola Politécnica da USP

24 de outubro de 2018

Diagramas de Bode

- ▶ Método simples e eficiente para construir gráficos das curvas de resposta em frequência das funções de rede
- ▶ No método, evidencia-se a contribuição de cada zero e polo para a resposta global

Fatoração da função de rede

Uma função de rede em RPS, fatorada em seus polos e zeros pode ser escrita como

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)} = M(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$$

em que

$$M(\omega) = |K| \frac{|j\omega - z_1||j\omega - z_2| \cdots |j\omega - z_m|}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2| \cdots |j\omega - p_n|}$$

$$\Phi(\omega) = \arg K + \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - z_i) - \sum_{\ell=1}^n \arg(j\omega - p_\ell)$$

$$\arg K = \begin{cases} 0 & K > 0 \\ \pm\pi, & K < 0 \end{cases}$$

Módulo em dB e contribuições de polos e zeros

$$M(\omega)(dB) = 20 \log |K| + \sum_{i=1}^m 20 \log |j\omega - z_i| - \sum_{\ell=1}^n 20 \log |j\omega - p_\ell|$$

A seguir vamos considerar a contribuição de:

- ▶ polos e zeros simples na origem (funções de rede **marginalmente estáveis**)
- ▶ polos e zeros com parte real negativa (funções de rede **assintoticamente estáveis e de fase mínima**)
 - ▶ polos e zeros reais
 - ▶ polos e zeros complexos conjugados

Os conceitos vistos aqui podem ser estendidos para um caso mais geral.

Polos e zeros na origem

$$z_i = 0 \quad \text{ou} \quad p_\ell = 0$$

contribuem com parcelas do tipo

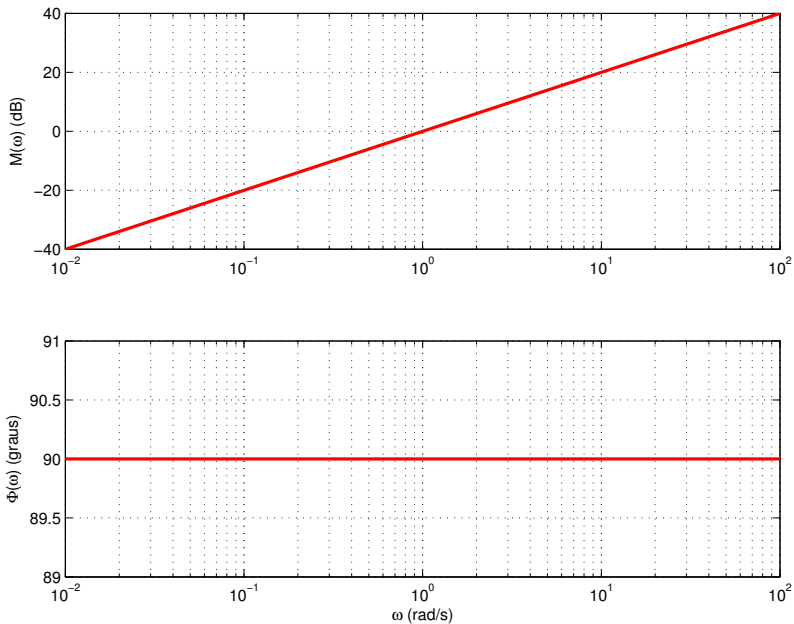
$$M_0(\omega) = \pm 20 \log |j\omega| = \pm 20 \log \omega, \quad (\omega > 0)$$

$$\Phi_0(\omega) = \pm 90^\circ$$

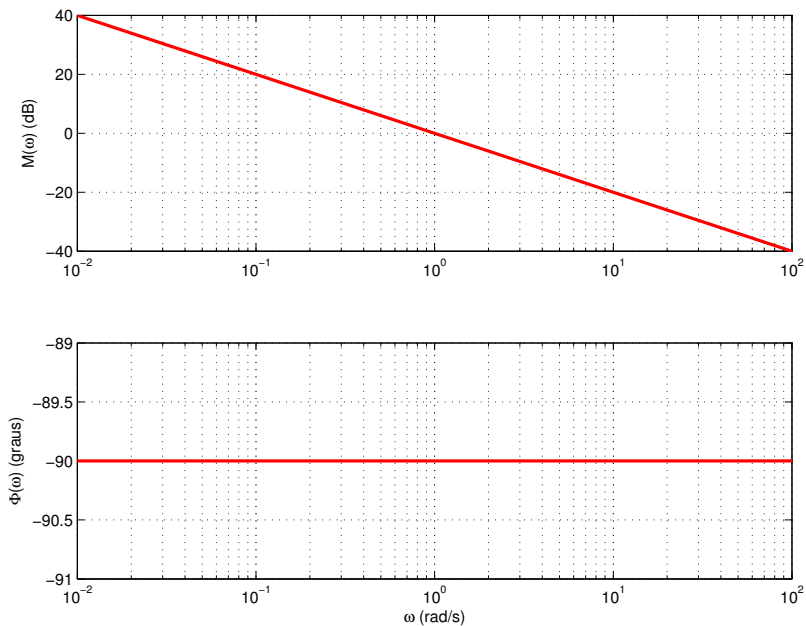
- ▶ o sinal $+$ corresponde a um zero e o sinal $-$ a um polo
- ▶ no gráfico de $M(\omega)$ por $\log \omega$, essas parcelas correspondem a retas com inclinação ± 20 dB/década (ou ± 6 dB/oitava)

Se os zeros ou polos na origem forem múltiplos, devemos repetir essas considerações tantas vezes quantas forem as respectivas multiplicidades.

Contribuição de um zero na origem



Contribuição de um polo na origem



Polos e zeros reais e negativos

$$-z_i = \omega_i \quad \text{ou} \quad -p_\ell = \omega_\ell, \quad (\omega_i > 0, \quad \omega_\ell > 0)$$

- ▶ As frequências $\omega_i = 2\pi f_i$ e $\omega_\ell = 2\pi f_\ell$ são chamadas de frequências características (ou de quebra)
- ▶ Os zeros e polos reais e negativos contribuem respectivamente com parcelas do tipo

$$\begin{aligned} M_{rz}(\omega) &= +20 \log |j\omega + \omega_i| = +20 \log \sqrt{\omega^2 + \omega_i^2} \\ &= +20 \log(\omega_i) + 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{rp}(\omega) &= -20 \log |j\omega + \omega_\ell| = -20 \log \sqrt{\omega^2 + \omega_\ell^2} \\ &= -20 \log(\omega_\ell) - 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_\ell^2} \right) \end{aligned}$$

Polos e zeros reais e negativos

- ▶ As parcelas $+20 \log(\omega_i)$ e/ou $-20 \log(\omega_\ell)$ são constantes e devem ser adicionadas a $20 \log |K|$.
- ▶ As parcelas do tipo

$$\pm 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \right)$$

admitem duas assíntotas no plano $[\log \omega, M(\omega)]$

- ▶ em frequências baixas, $\omega \ll \omega_k$

$$M_k(\omega \ll \omega_k) \approx 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Assíntota 1: eixo horizontal do plano $[\log \omega, M(\omega)]$ para $\omega \leq \omega_k$

- ▶ em frequências altas, $\omega \gg \omega_k$

$$M_k(\omega \gg \omega_k) \approx \pm 10 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_k^2} \right) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)$$

Assíntota 2: Retas que cortam o eixo horizontal em $\omega = \omega_k$ e sobe (zero) ou desce (polo) à taxa de 20 dB/década (ou 6 dB/oitava) para $\omega \geq \omega_k$

Polos e zeros reais e negativos

Zeros e polos reais e negativos contribuem para a fase com parcelas do tipo

- ▶ $\Phi_k(\omega) = \pm \arg(j\omega + \omega_k) = \pm \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$ que
 - ▶ em frequências baixas, $\omega \ll \omega_k$ (ou simplesmente $\omega \leq \omega_k/10$)

$$\Phi_k(\omega \ll \omega_k) \rightarrow 0^\circ$$

- ▶ em frequências altas, $\omega \gg \omega_k$ (ou simplesmente $\omega \geq 10\omega_k$)

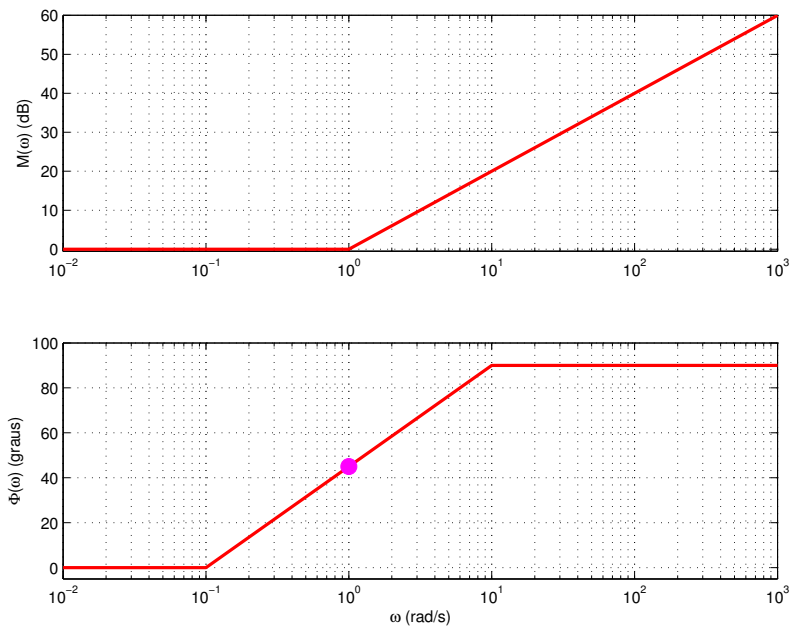
$$\Phi_k(\omega \gg \omega_k) \rightarrow \pm 90^\circ$$

- ▶ em $\omega = \omega_k$

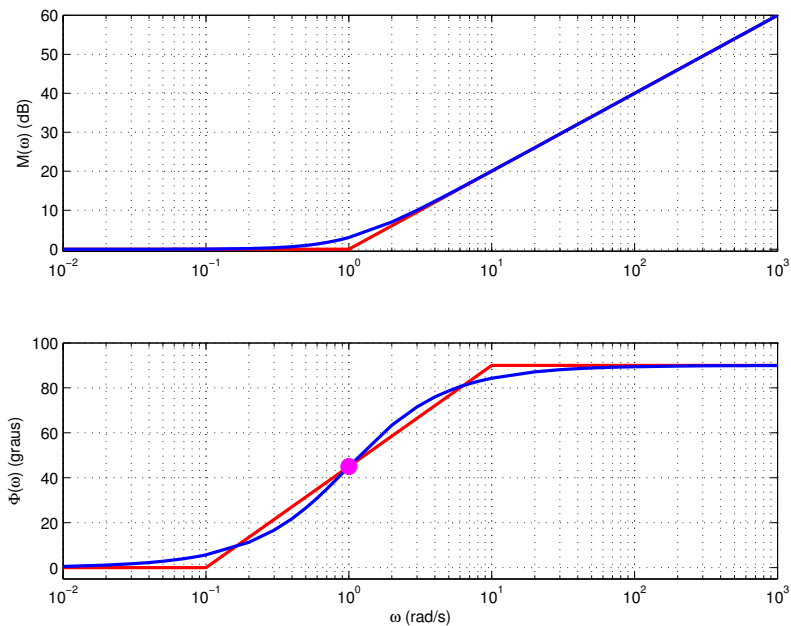
$$\Phi_k(\omega = \omega_k) = \pm 45^\circ$$

- ▶ o sinal $+$ corresponde a um zero e o sinal $-$ a um polo

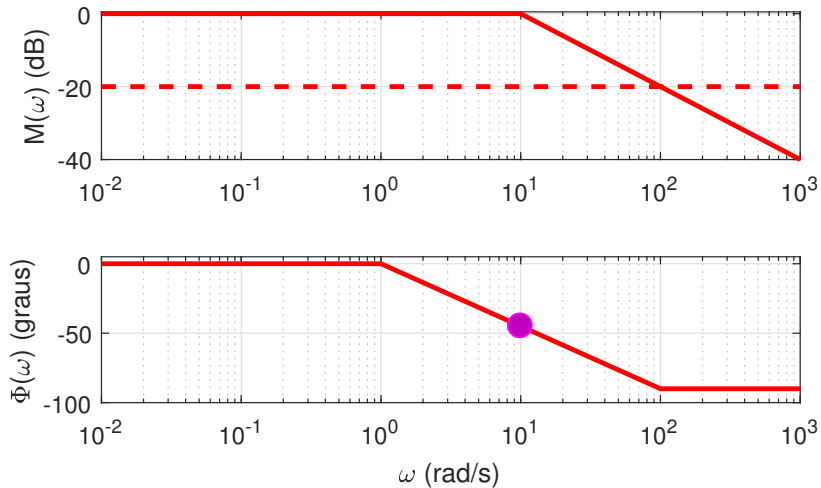
Contribuição de um zero em $z_1 = -1$



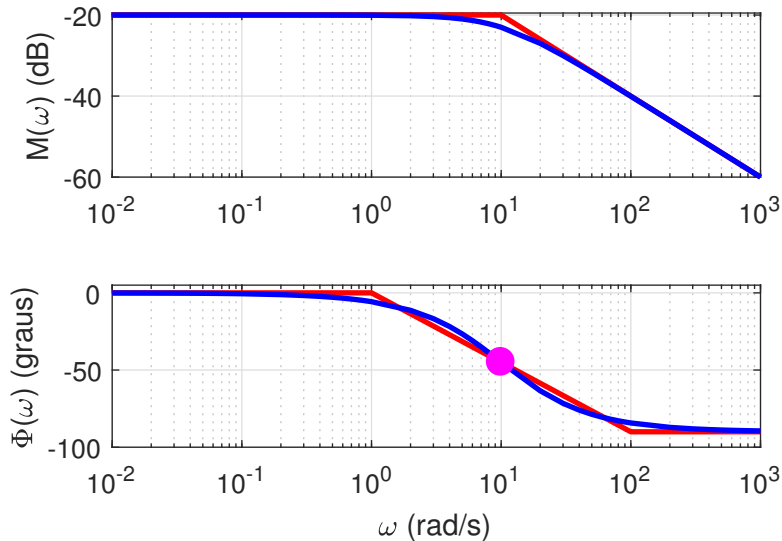
Contribuição de um zero em $z_1 = -1$



Contribuição de um polo em $p_1 = -10$



Contribuição de um polo em $p_1 = -10$



Função de rede com zero em $z_1 = -1$ e polo em $p_1 = -10$

Considere agora a função de rede

$$G_v(s) = \frac{s + 1}{s + 10}$$

Em regime permanente, temos

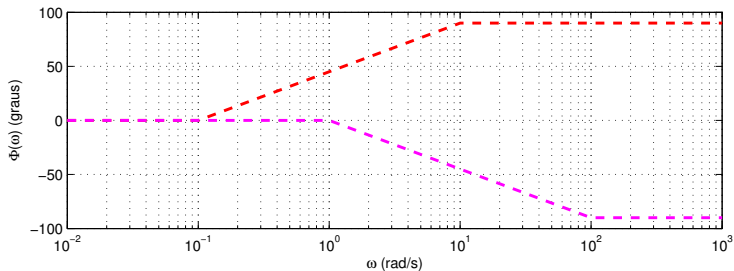
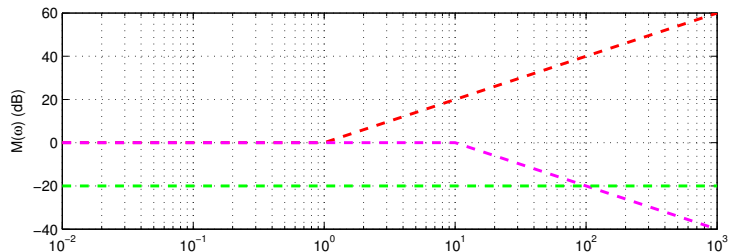
$$G_v(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 10} = \frac{1}{10} \frac{j\omega + 1}{j\frac{\omega}{10} + 1}$$

com

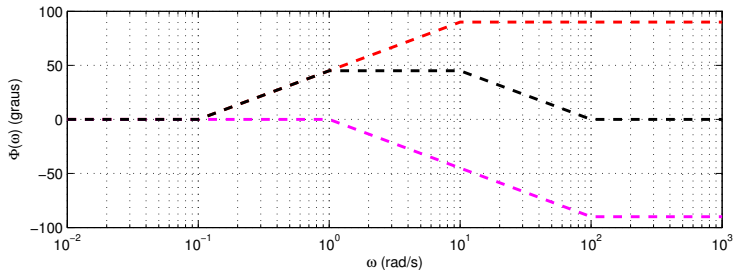
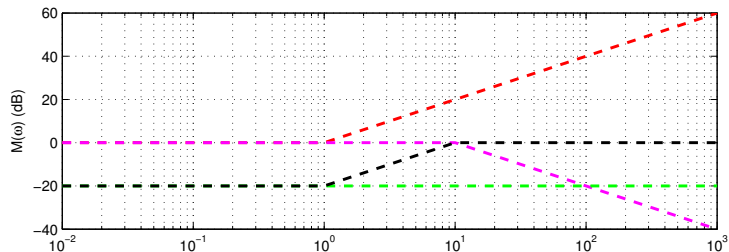
$$M(\omega) = -20 \log(10) + 20 \log |j\omega + 1| - 20 \log \left| j\frac{\omega}{10} + 1 \right|$$

$$\Phi(\omega) = \arg(j\omega + 1) - \arg \left(j\frac{\omega}{10} + 1 \right)$$

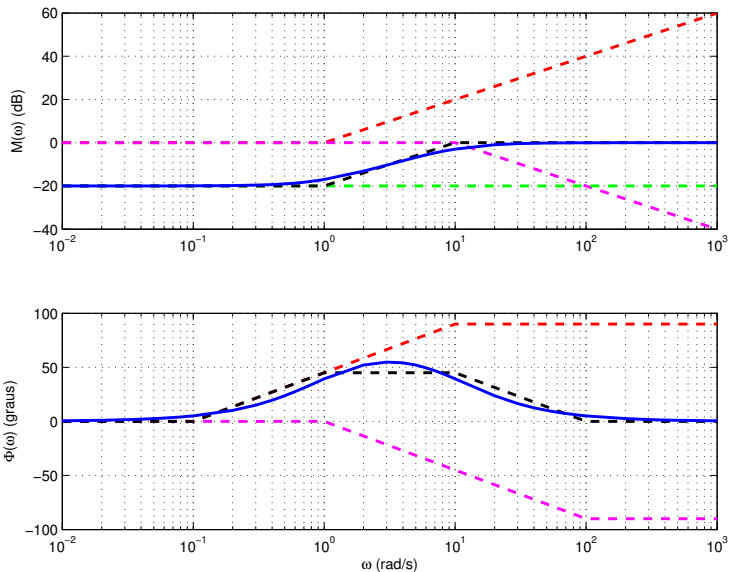
FR com zero em $z_1 = -1$ e polo em $p_1 = -10$ – Assíntotas



FR com zero em $z_1 = -1$ e polo em $p_1 = -10$ – Assintota Composta



FR com zero em $z_1 = -1$ e polo em $p_1 = -10$ – Resposta em frequência exata



Pares conjugados de polos e zeros complexos

Sejam $s_1 = -\alpha + j\omega_d$ e $s_1^* = -\alpha - j\omega_d$ os polos ou zeros de um par conjugado.

A contribuição desse par para a função de rede será um termo quadrático

$$(s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega_d^2$$

Introduzindo os parâmetros

- ▶ frequência característica do par

$$\omega_n^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$$

- ▶ e o fator de amortecimento normalizado

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}, \quad 0 < \zeta < 1$$

o termo fica

$$(s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Pares conjugados de polos e zeros complexos

ou ainda

$$(s - s_1)(s - s_1^*) = \omega_n^2 \left[\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right]$$

Em RPS

$$(j\omega - s_1)(j\omega - s_1^*) = \omega_n^2 \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right]$$

Tomando o módulo em dB

$$M_c(dB) = \underbrace{\pm 40 \log \omega_n}_{\text{constante}} \pm 10 \log \underbrace{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]}_{M_{c_2}(dB)}$$

em que o sinal + corresponde ao par de zeros e o sinal - ao par de polos

Pares conjugados de polos e zeros complexos

Vamos analisar o termo

$$M_{c_2}(dB) = \pm 10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]$$

- ▶ em frequências baixas, $\omega \ll \omega_n$

$$M_{c_2}(\omega \ll \omega_n) \approx 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Assíntota 1: Eixo horizontal do plano $[\log \omega, M(\omega)]$ para $\omega \leq \omega_n$

- ▶ em frequências altas, $\omega \gg \omega_n$

$$M_{c_2}(\omega \gg \omega_n) \approx \pm 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \text{ dB}$$

Assíntota 2: Reta que corta o eixo horizontal em $\omega = \omega_n$ e sobe (zero) ou desce (polo) à taxa de 40 dB/década (ou 12 dB/oitava) para $\omega \geq \omega_n$

Pares conjugados de polos e zeros complexos

Contribuição para a fase

$$\Phi_c(\omega) = \pm \arctan 2 \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}, 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

em que o sinal $+$ corresponde ao par de zeros e o sinal $-$ ao par de polos

- ▶ em frequências baixas, $\omega \ll \omega_n$ (ou simplesmente $\omega < \omega_n$)

$$\Phi_c(\omega \ll \omega_n) \approx 0^\circ$$

- ▶ para $\omega = \omega_n$

$$\Phi_c(\omega = \omega_n) = \pm 90^\circ$$

- ▶ em frequências altas, $\omega \gg \omega_n$ (ou simplesmente $\omega > \omega_n$)

$$\Phi_c(\omega \gg \omega_n) \approx \pm 180^\circ$$

em que o sinal $+$ corresponde ao par de zeros e o sinal $-$ ao par de polos

A função arctan 2

A função arctan usual não diferencia pontos no 1º quadrante de pontos simétricos com relação a zero no 3º quadrante, nem pontos do 2º e 4º quadrantes.

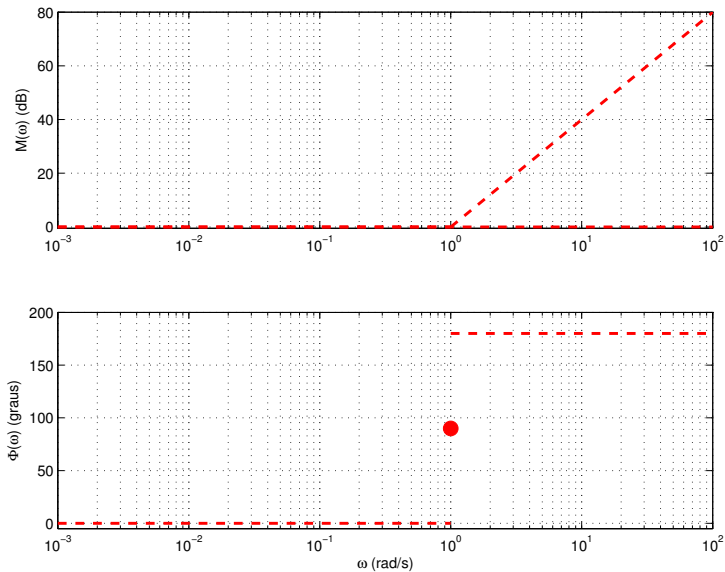
Por isso, usamos a função arctan 2 definida como

$$\arctan 2(b,a) = \begin{cases} \arctan(b/a), & a > 0 \\ \arctan(b/a) - \text{sinal}(b/a).180^\circ, & a < 0 \\ +90^\circ, & a = 0 \text{ e } b > 0 \\ -90^\circ, & a = 0 \text{ e } b < 0 \\ 0, & a = b = 0 \end{cases}$$

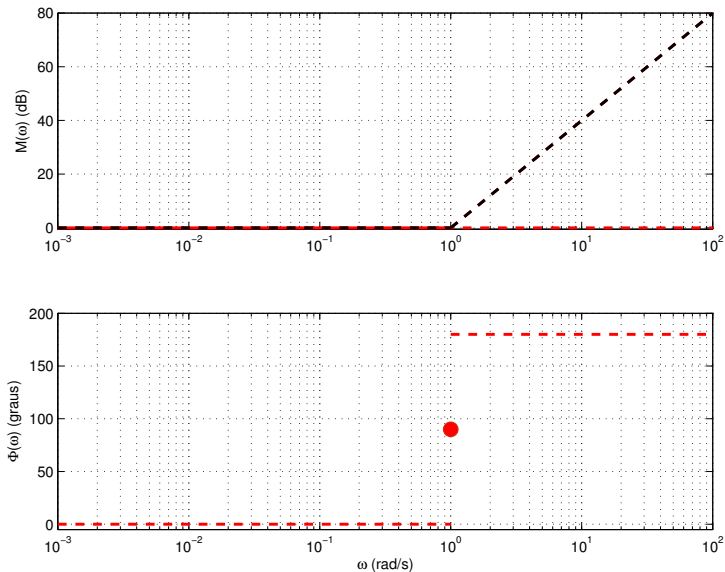
em que

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

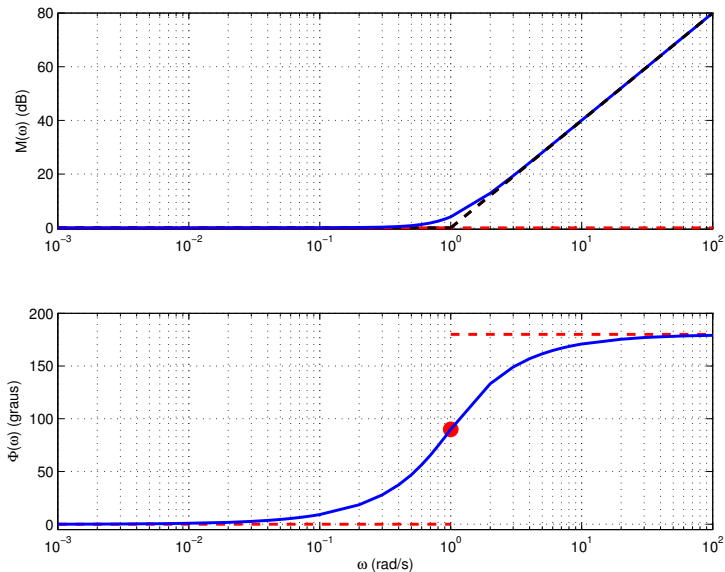
Contribuição dos zeros $z_{1,2} = -0,8 \pm j0,6$ – assíntotas



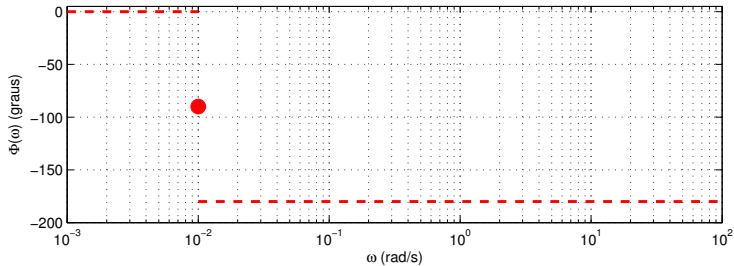
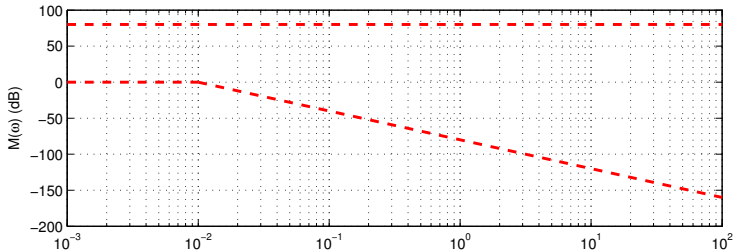
Contribuição dos zeros $z_{1,2} = -0,8 \pm j0,6$ – assíntota composta



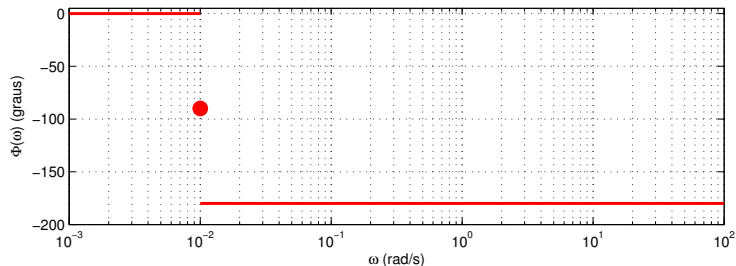
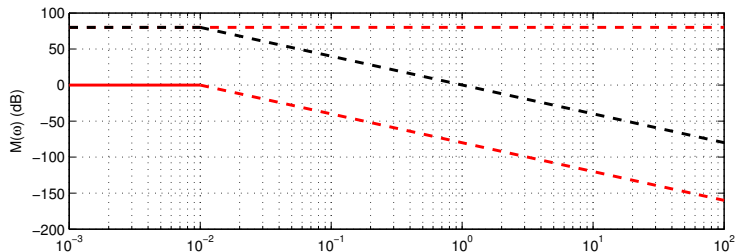
Contribuição dos zeros $z_{1,2} = -0,8 \pm j0,6$ – resposta em frequência exata



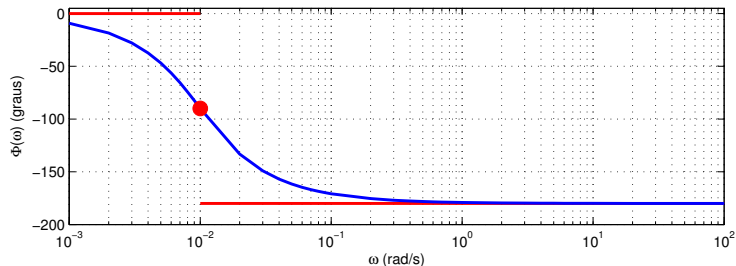
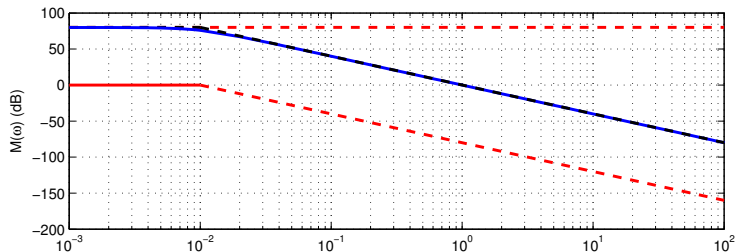
Contribuição dos polos $p_{1,2} = -0,008 \pm j0,006$ – assíntotas



Contribuição dos polos $p_{1,2} = -0,008 \pm j0,006$ – assíntota composta



Contribuição dos polos $p_{1,2} = -0,008 \pm j0,006$ – resposta em frequência exata



Função de transferência com zeros e polos complexos

Vamos considerar a resposta em frequência

$$\mathcal{G}_v(s) = \frac{s^2 + 1,6s + 1}{s^2 + 0,0160s + 0,0001}$$

que tem

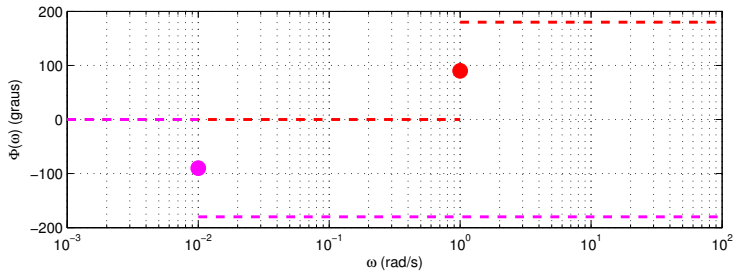
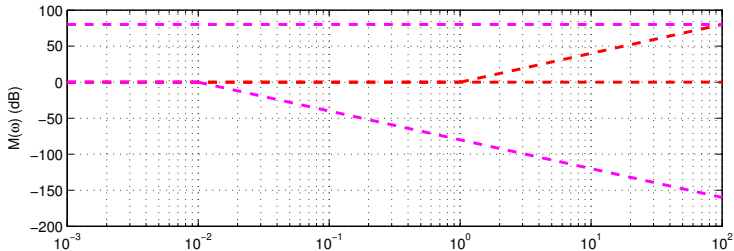
- ▶ zeros: $z_{1,2} = -0,8 \pm j0,6$
- ▶ polos: $p_{1,2} = -0,008 \pm 0,006$

É mais adequado reescrever $\mathcal{G}_v(s)$ na forma

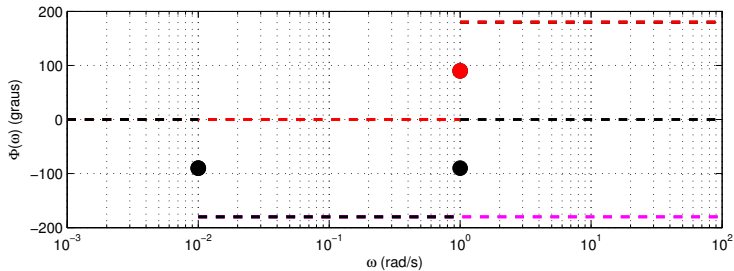
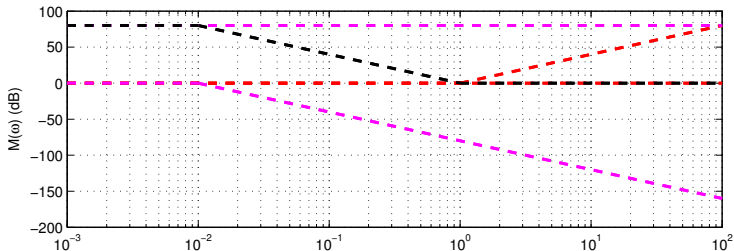
$$\mathcal{G}_v(s) = 10^4 \frac{s^2 + 1,6s + 1}{10^4 s^2 + 160s + 1}$$

para que fique evidente a constante $20 \log 10^4 = 80$ dB

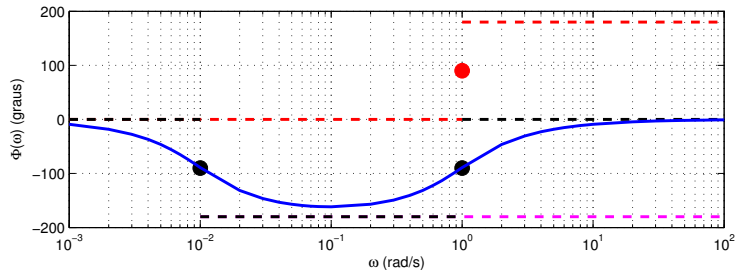
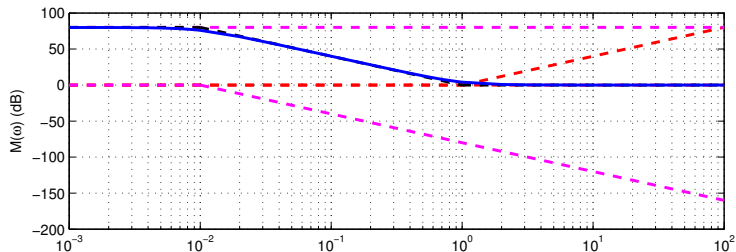
Função de transferência $\mathcal{G}_v(s)$ – assíntotas



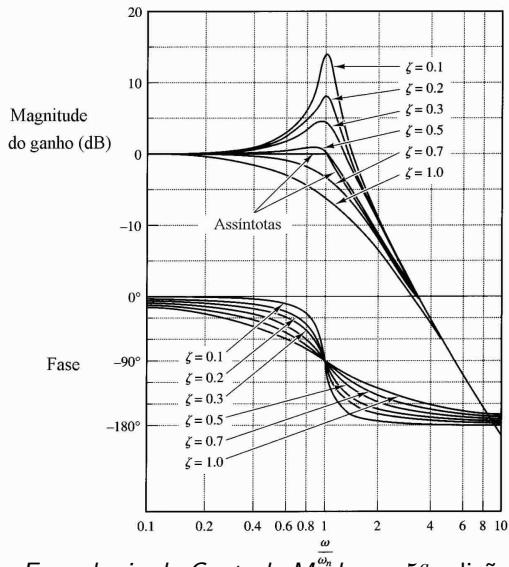
Função de transferência $\mathcal{G}_v(s)$ – assíntotas compostas



Função de transferência $\mathcal{G}_v(s)$ – resposta em frequência exata



Dependendo do valor de ζ , o erro próximo de ω/ω_n pode ser grande



Fonte: Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 5^a edição, Pearson, 2011