Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3213

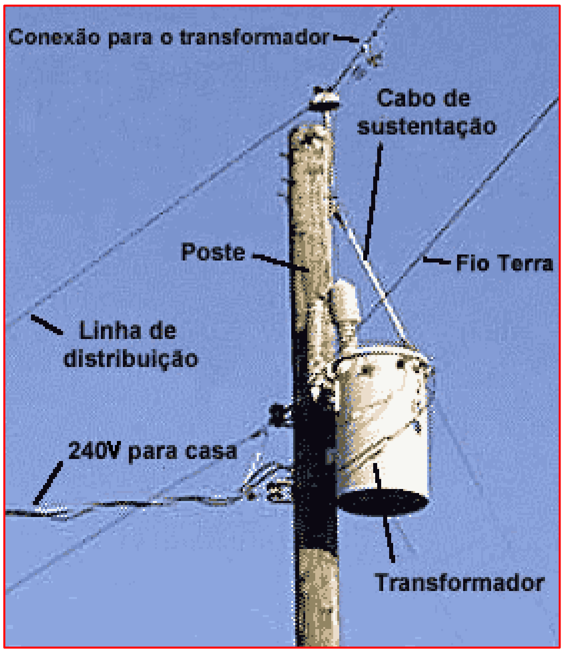
Circuitos Elétricos II

Bloco 7

Indutância Mútua e Transformadores

Prof<u>ª</u> Denise Consonni

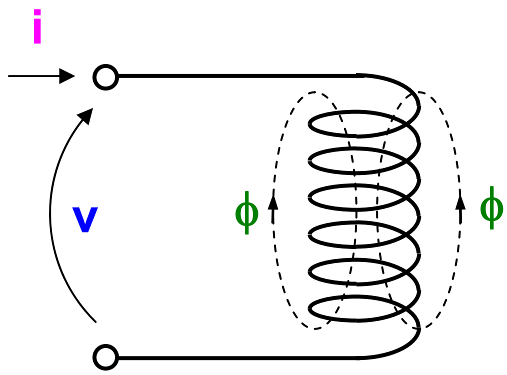
TRANSFORMADORES



7200V para 240V - (ciencia.hsw.uol.com.br)

(http://paginas.terra.com.br/arte/sarmentocampos/Interferencia.htm)

Indutância Própria



N espiras

ϕ → fluxo em cada espira (Wb)

$$\boxed{v = \frac{d\psi}{dt}}$$

ψ → fluxo concatenado (weber-espira)

$$\boxed{\psi = N\phi}$$

$$\boxed{v = \frac{d(N\phi)}{dt} = N\frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\left(N\frac{d\phi}{di}\right)}_{L}\frac{di}{dt}}$$

permeância do meio

$$\boxed{\phi = P\ N\ i}$$

(Lei de Ampère)

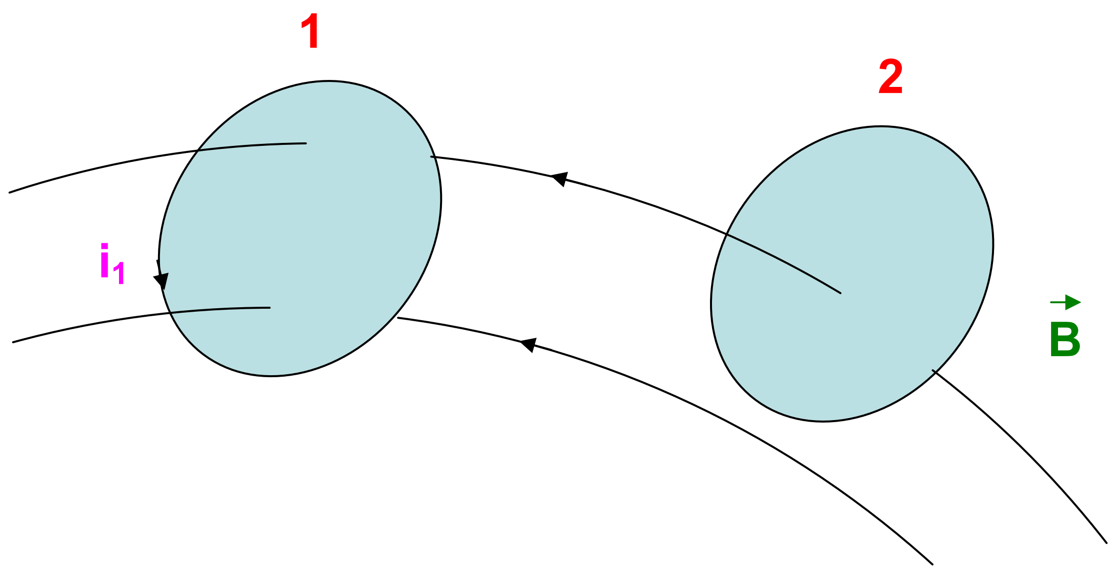
$$\boxed{v = N\frac{d(PNi)}{dt} = \underbrace{N^2 P}\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}}$$

$$\boxed{\psi = L\ i}$$

$$\boxed{L = N^2 P}$$

→ **indutância própria**

Indutância Mútua

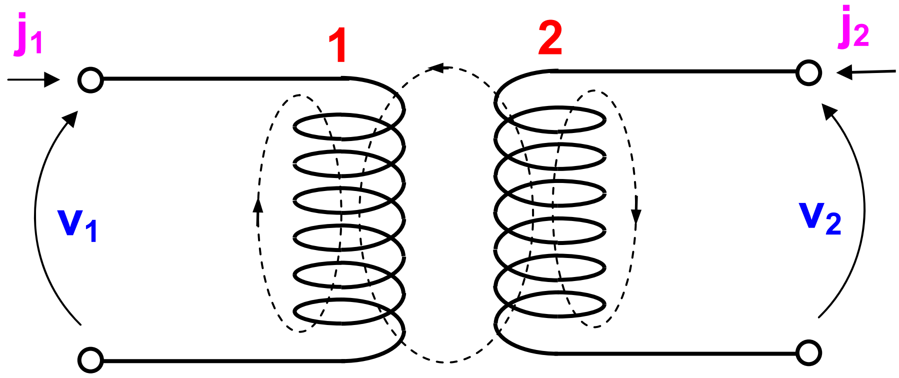


$\psi_{21} \rightarrow$ Fluxo em 2 causado por i_1

$$\boxed{\psi_{21} = L_{21}.i_1}$$

$L_{21} \rightarrow$ Indutância Mútua $\rightarrow$ depende da **geometria**

Indutância Mútua



Fluxos concatenados com 1 e 2:

$$\psi_1(j_1, j_2) \qquad \psi_2(j_1, j_2)$$

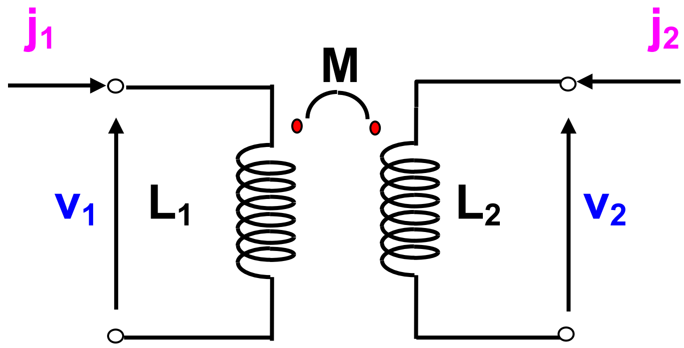
j_1 e j_2 → variáveis com o tempo

$$v_1(t) = \frac{d\psi_1(j_1, j_2)}{dt} \qquad v_2(t) = \frac{d\psi_2(j_1, j_2)}{dt}$$

$$\psi_1 = \underbrace{L_{11} j_1}_{\psi_{11}} + \underbrace{L_{12} j_2}_{\psi_{12}} \qquad \psi_2 = \underbrace{L_{21} j_1}_{\psi_{21}} + \underbrace{L_{22} j_2}_{\psi_{22}}$$

$$v_1(t) = L_{11}\frac{dj_1}{dt} + L_{12}\frac{dj_2}{dt} \qquad v_2(t) = L_{21}\frac{dj_1}{dt} + L_{22}\frac{dj_2}{dt}$$

ENERGIA ARMAZENADA EM DUAS BOBINAS COM MÚTUA



$$w(t)=\frac{1}{2}.L_1\,j_1^2(t)+\frac{1}{2}.L_2\,j_2^2(t)+M.\,j_1(t).j_2(t)$$

Vale $w(t)>0$, para qualquer $\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$

Forma quadrática da energia armazenada:

$$w=\frac{1}{2}.[j_1 \quad j_2].\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}.\mathbf{j}^T.\mathbf{L}.\mathbf{j}$$

Atenção: A matriz **L** é *positiva definida* !

L.Q.O

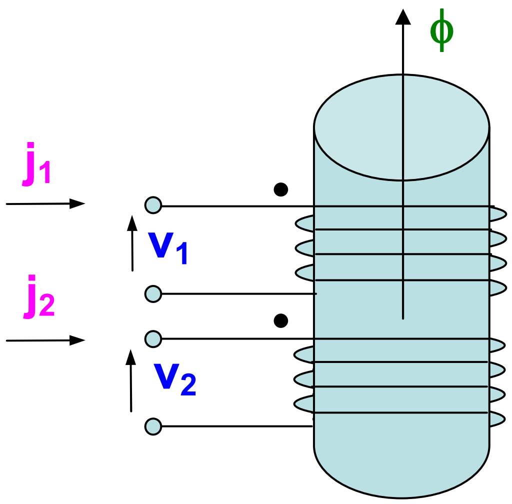
Sinal da Indutância Mútua

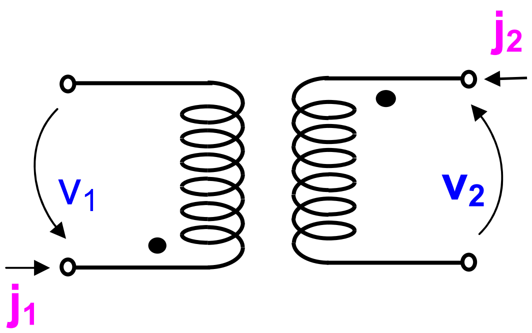
Fluxos Aditivos → **M>0**

Fluxos Subtrativos → **M<0**

1- Geometria Conhecida

2- Convenção do Ponto (marcas de polaridade)



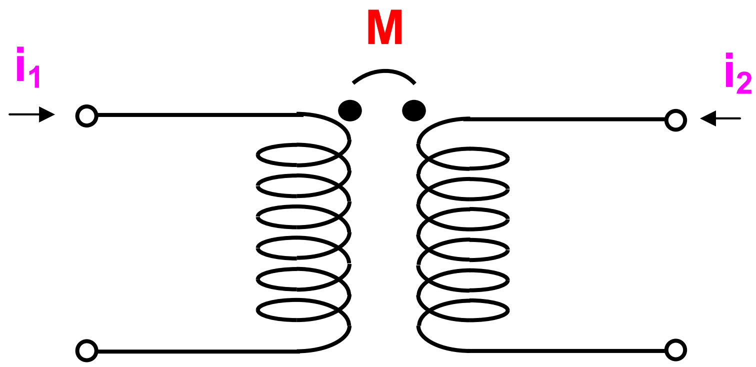


3- Matriz das indutâncias

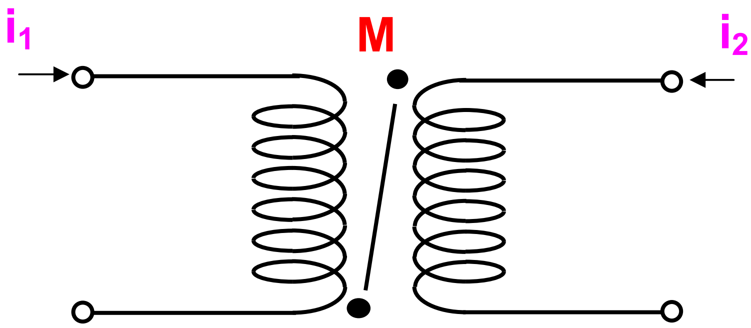
$$\boxed{L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}}$$

$L_1, L_2 > 0$ sempre **M < 0** ou **M > 0**

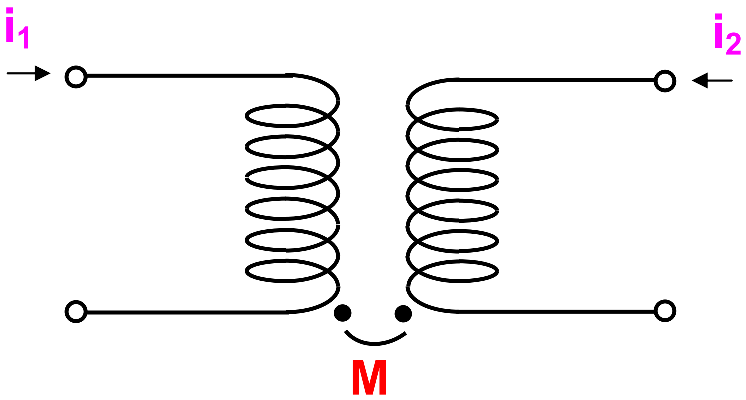
Sinal da Indutância Mútua



$M > 0$

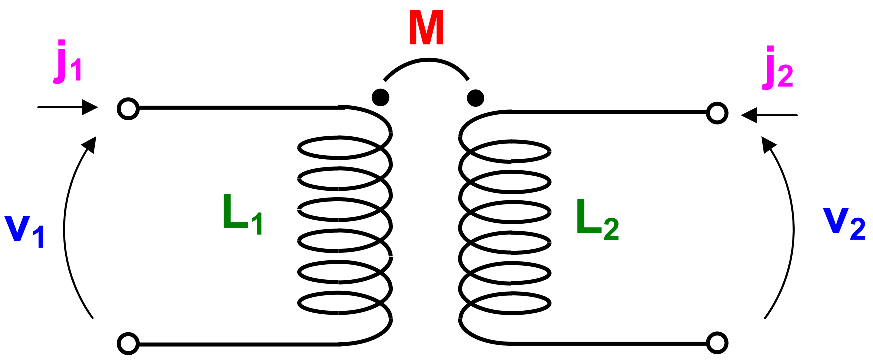


$M < 0$



$M > 0$

Relações v/ j com Indutância Mútua



(convenção do receptor)

Domínio do Tempo

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{dj_1}{dt} + M \dfrac{dj_2}{dt} \\ v_2(t) = M \dfrac{dj_1}{dt} + L_2 \dfrac{dj_2}{dt} \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

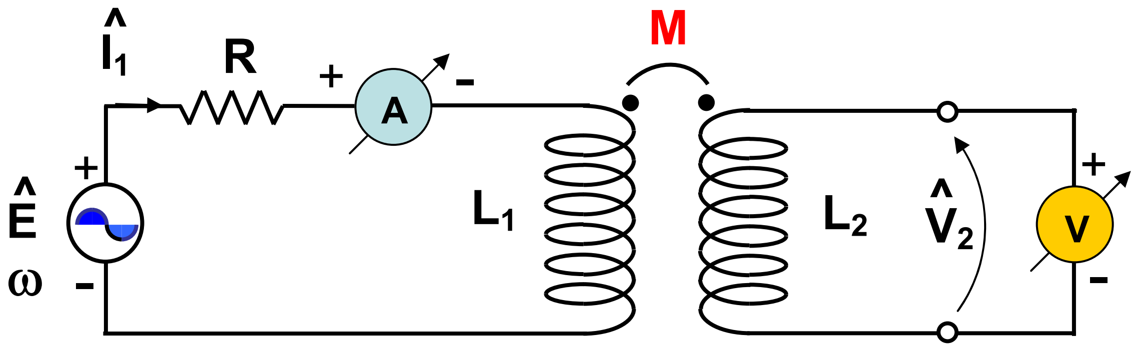
Domínio de Laplace

$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1 \; J_1(s) - L_1 \; j_{10} + sM \; J_2(s) - M \; j_{20} \\ V_2(s) = sMJ_1(s) - Mj_{10} + sL_2 J_2(s) - L_2 \, j_{20} \end{cases}$$

RPS

$$\begin{cases} \hat{V}_1 = j\omega \, L_1 \; \hat{J}_1 + j\omega \, M \; \hat{J}_2 \\ \hat{V}_2 = j\omega \, M \; \hat{J}_1 + j\omega \, L_2 \; \hat{J}_2 \end{cases}$$

Determinação de M com Voltímetro e Amperímetro em RPS

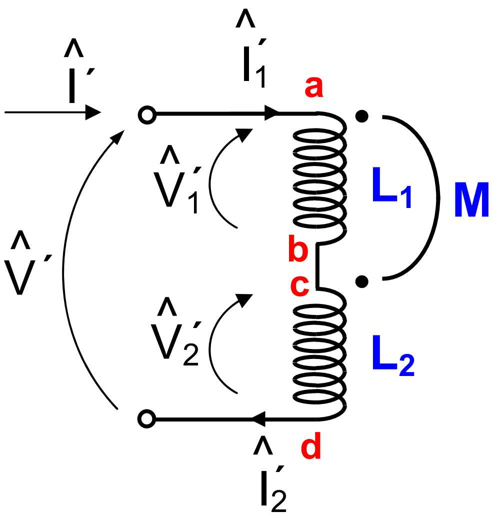


$$\boxed{\hat{V}_2 = j\omega M \hat{I}_1}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad M = \frac{\left|\hat{V}_2\right|}{\omega\left|\hat{I}_1\right|}}$$

Determinação de M e marcas de polaridade

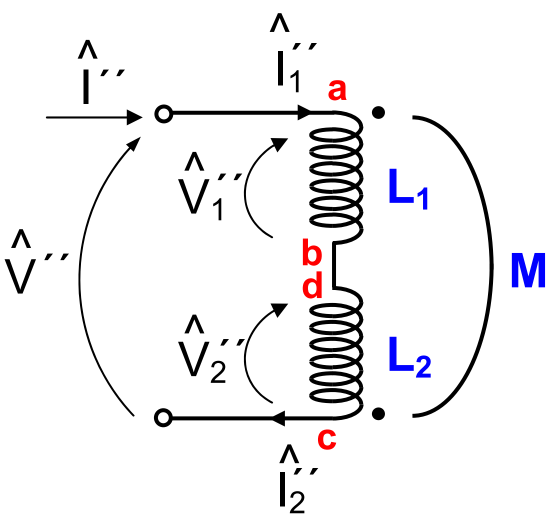
1ª. ligação



$$\hat{V}' = j\omega\,\overbrace{(L_1 + L_2 + 2|M|)}^{L'_{eq}}\,\hat{I}'$$

M > 0

2ª. ligação



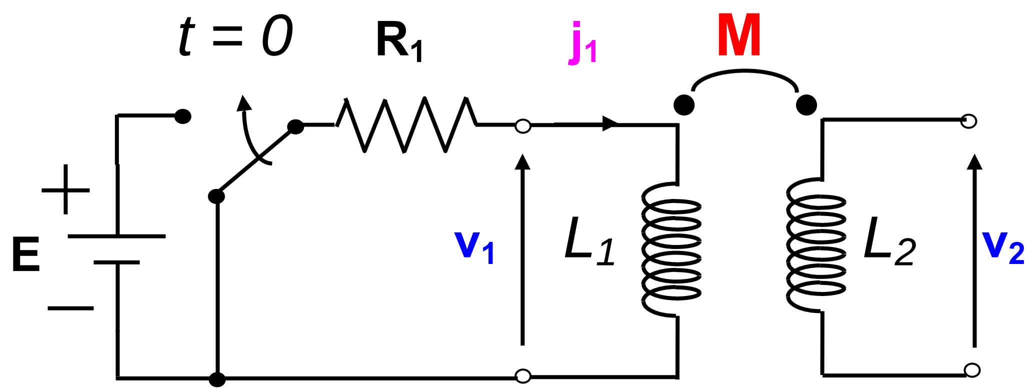
$$\hat{V}'' = j\omega\,\overbrace{(L_1 + L_2 - 2|M|)}^{L''_{eq}}\,\hat{I}''$$

M < 0

$$\boxed{|M| = \frac{L'_{eq} - L''_{eq}}{4}}$$

TRANSITÓRIO EM CIRCUITO COM INDUTÂNCIA MÚTUA

Secundário em aberto:



$t \geq 0$:

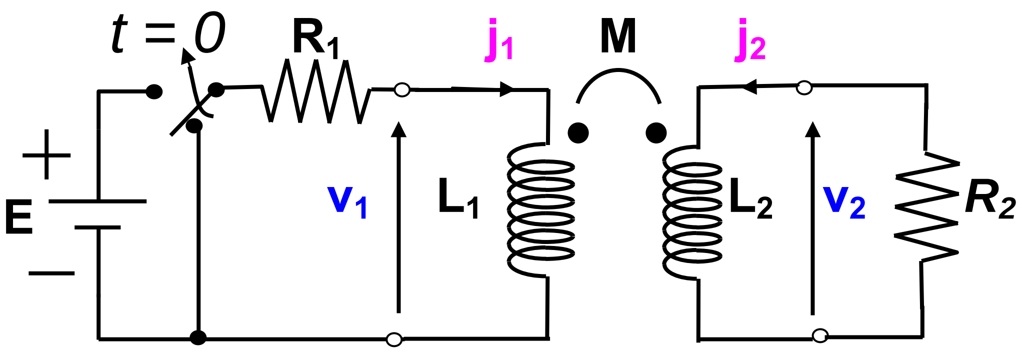
$$\begin{cases} R_1 j_1 + L_1 \dfrac{d j_1}{d t} = E \\ M \dfrac{d j_1}{d t} = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \dfrac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L_1}t}\right).H(t) \\ v_2 = \dfrac{M}{L_1}.E.e^{-\frac{R_1}{L_1}t}.H(t) \end{cases}$$

L.Q.O

TRANSITÓRIO EM CIRCUITO COM INDUTÂNCIA MÚTUA

Secundário com carga:



$t \geq 0$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R_1 + L_1 D & M D \\ M D & R_2 + L_2 D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 = -R_2 \, j_2 \end{cases}$$

L.Q.O

TRANSITÓRIO EM CIRCUITO COM INDUTÂNCIA MÚTUA

Condição de acoplamento perfeito:

$$\boxed{M^2 = L_1 L_2}$$

- O circuito fica redutível, com a única frequência complexa própria:

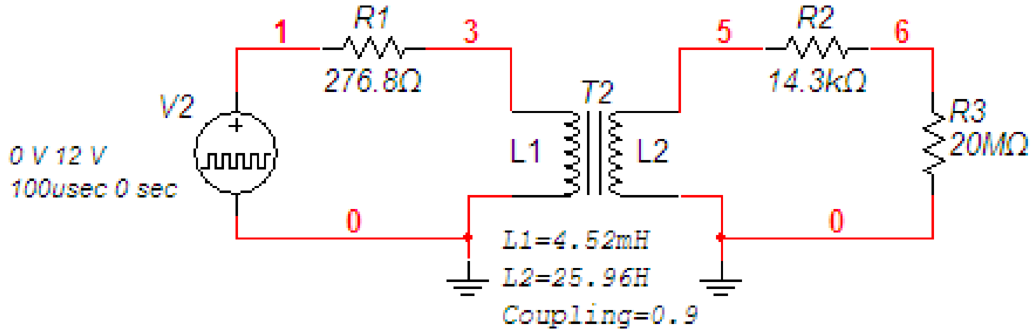
$$\boxed{\omega_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1}}$$

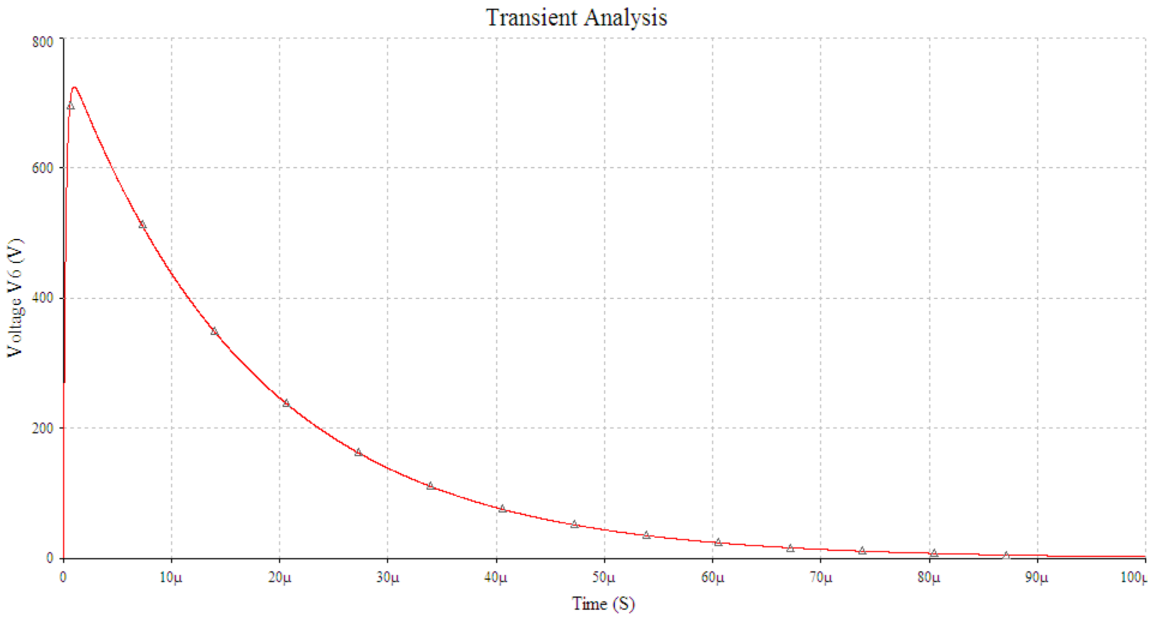
- A tensão no secundário, para os $t \geq 0$, resulta:

$$\boxed{v_2(t) = \frac{\omega_1 M E}{R_1} . e^{-\omega_1 t}}$$

L.Q.O

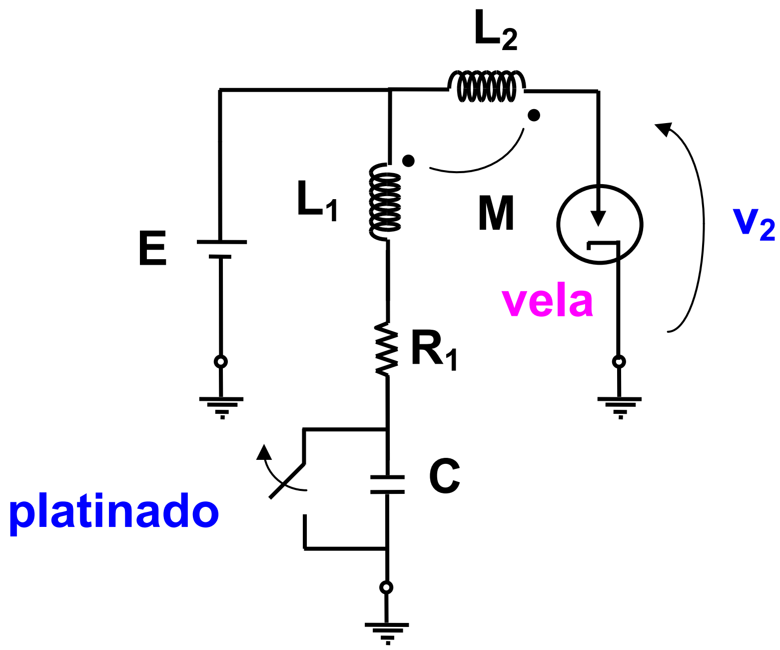
Exemplo de Transitório com Mútua





Tensão no primário : **12V**
Pico de Tensão no secundário : **700V**

CIRCUITO DE IGNIÇÃO



Valores Típicos:

$E = 12V$

$L_1 = 3mH$ $L_2 = 30H$ $M = 0,3H$

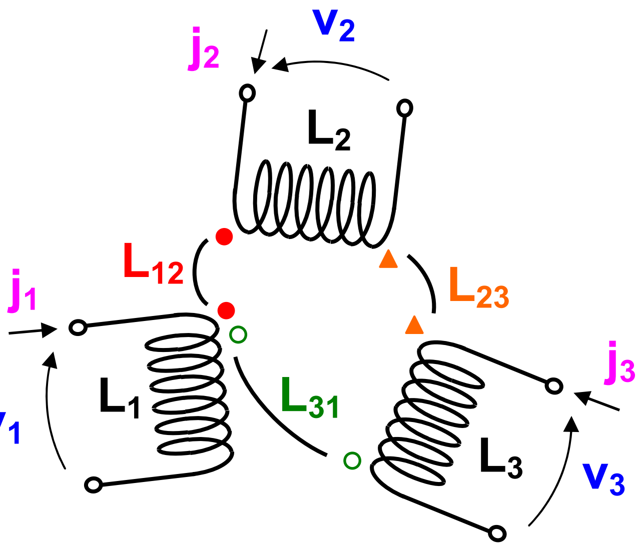
$C = 0,4\ \mu F$ $R_1 = 4\Omega$

$v_{2pico} = -26.000\ V$

L.Q.O

(Nilsson & Riedel, Electric Circuits, 5ª. Edição)

Indutância Mútua : Generalização



$$
\begin{cases}
\psi_1 = L_{11} j_1 + L_{12} j_2 + \ldots + L_{1l} j_l \\
\psi_2 = L_{21} j_1 + L_{22} j_2 + \ldots + L_{2l} j_l \\
\vdots \\
\psi_l = L_{l1} j_1 + L_{l2} j_2 + \ldots + L_{ll} j_l
\end{cases}
$$

$\boxed{L_{jj} > 0}$

$\boxed{L_{ij} = L_{ji}}$

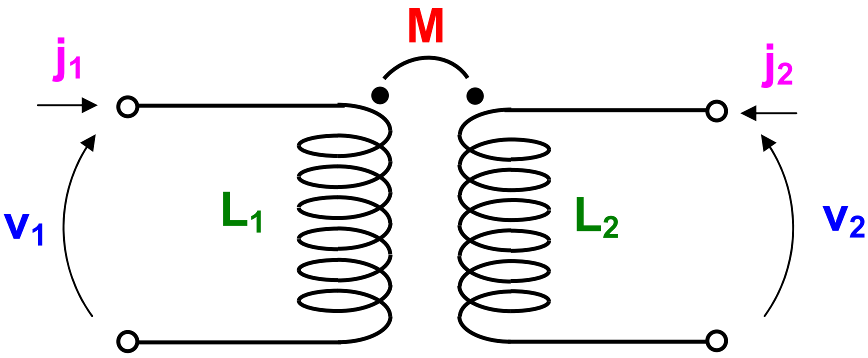
> 0 ou < 0

Matriz das indutâncias

$$
\boxed{L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1l} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2l} \\ \vdots & & & \\ L_{l1} & L_{l2} & \ldots & L_{ll} \end{bmatrix}}
\qquad
\boxed{\underset{\sim}{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_l \end{bmatrix}}
$$

$$
\boxed{\underset{\sim}{\psi} = \mathbf{L}.\underset{\sim}{j}}
\qquad
\boxed{\underset{\sim}{j} = \Gamma.\underset{\sim}{\psi}}
\qquad
\boxed{\Gamma = \mathbf{L}^{-1}}
$$

Relações j/ v com Indutância Mútua



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\psi} = \mathbf{L}.\underset{\sim}{j}$$

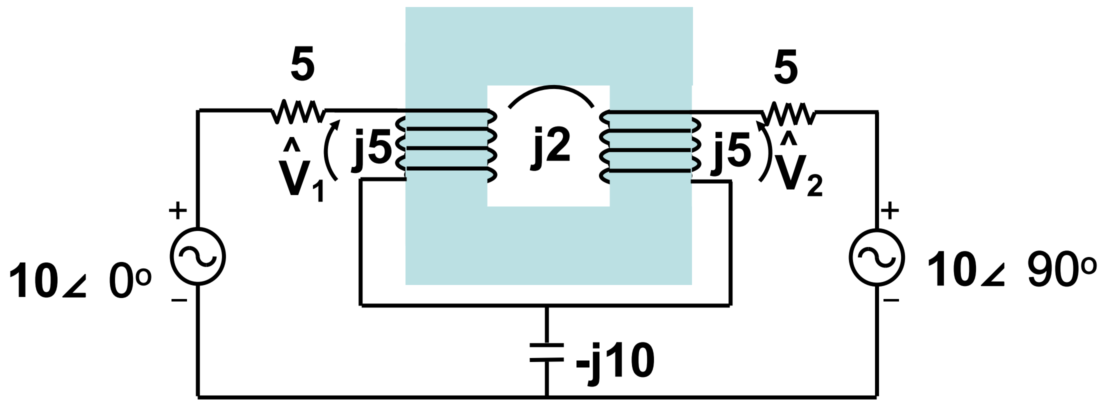
$$\underset{\sim}{v} = \frac{d\,\underset{\sim}{\psi}}{dt}$$

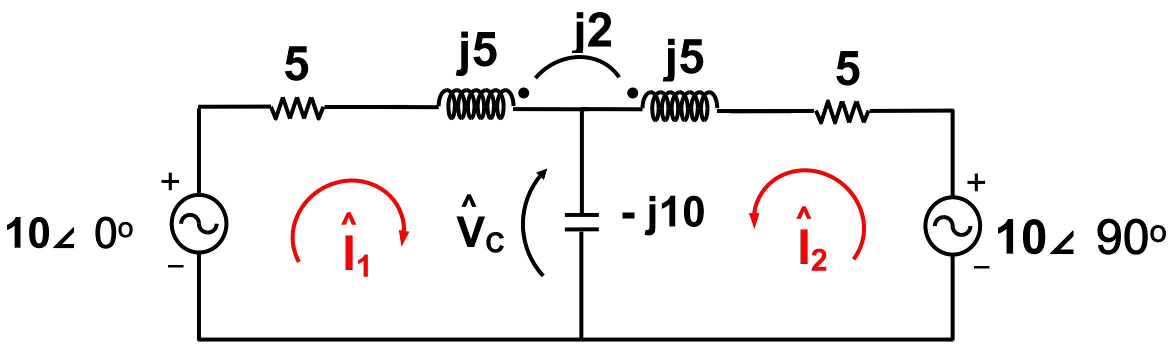
$$\underset{\sim}{v} = \mathbf{L}\ D\,\underset{\sim}{j}$$

$$\underset{\sim}{j} = \Gamma\ D^{-1}.\underset{\sim}{v}\ +\ \underset{\sim}{j_0}$$

$$\Gamma = \mathbf{L}^{-1}$$

Exemplo de Circuito com Mútua



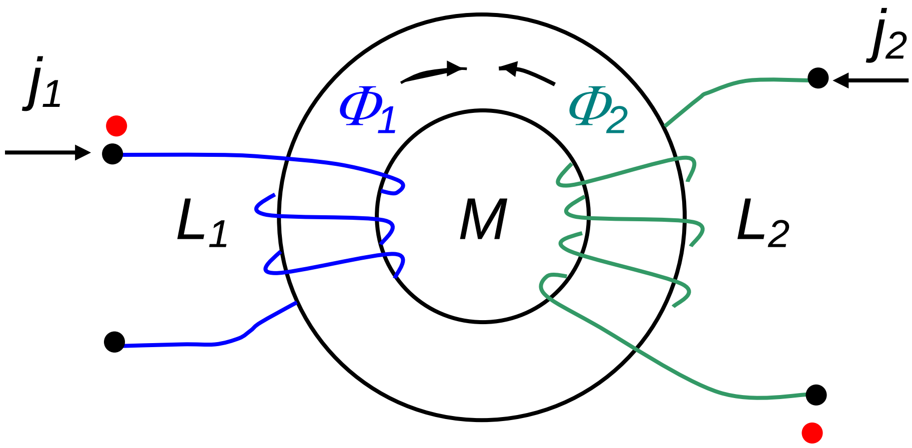


$$\begin{bmatrix} 5-j5 & -j8 \\ -j8 & 5-j5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ j10 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}_c = -j10\ (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) = 10{,}14\angle 23{,}96^o$$

L.Q.O

COMPOSIÇÃO DOS FLUXOS NAS MÚTUAS



$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \longrightarrow \text{marcas de polaridade} \\ \Phi_1\,,\ \Phi_2 \longrightarrow \text{fluxos ligados} \end{array} \right.$$

FLUXOS CONCATENADOS COM AS BOBINAS:

$$\begin{cases} \Psi_1 = L_1\, j_1 + M\, j_2 \\ \Psi_2 = M\, j_1 + L_2\, j_2 \end{cases} \qquad (M < 0)$$

MATRIZ DE INDUTÂNCIAS:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$$

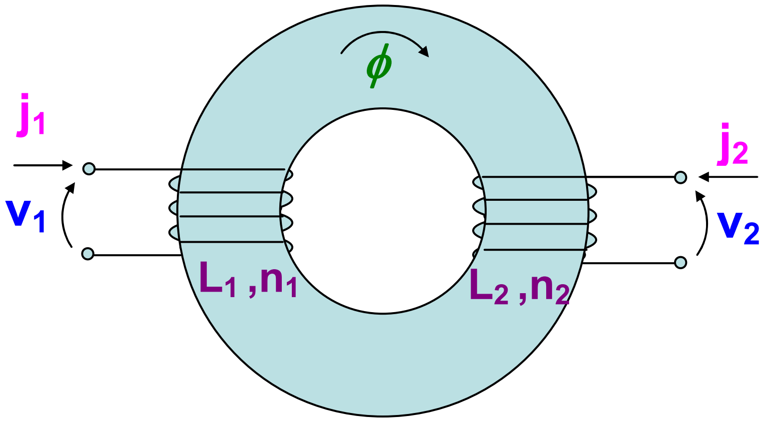
Matriz simétrica e positiva definida !

$M > 0 \longrightarrow$ fluxos magnéticos **aditivos**

$M < 0 \longrightarrow$ fluxos magnéticos **subtrativos**

L.Q.O

Acoplamento Perfeito



Fluxos concatenados:

$$\psi_1 = n_1\ \phi = L_1\ j_1 + M\ j_2$$
$$\psi_2 = n_2\ \phi = M\ j_1 + L_2\ j_2$$

Meio linear

Para $j_2 = 0$

$$L_1 = \frac{n_1\ \phi}{j_1} \qquad M = \frac{n_2\ \phi}{j_1} \qquad \frac{L_1}{M} = \frac{n_1}{n_2}$$

Para $j_1 = 0$

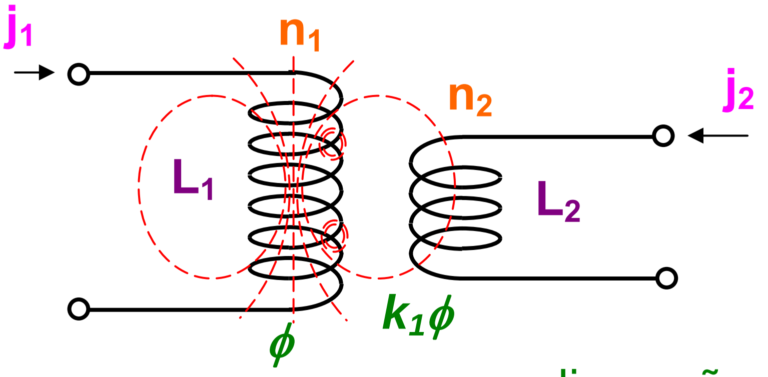
$$\frac{L_2}{M} = \frac{n_2}{n_1}$$

Portanto:

$$M^2 = L_1 L_2 \qquad M = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

Acoplamento Imperfeito



dispersão de fluxo

$0 < k_1 < 1$

Para $j_2 = 0$

$$\psi_1 = L_1 j_1 = n_1 \phi$$
$$\psi_2 = M j_1 = n_2 k_1 \phi$$

$$\frac{L_1}{M} = \frac{n_1}{k_1 n_2}$$

Para $j_1 = 0$

$$\psi_1 = M j_2 = n_1 k_2 \phi$$
$$\psi_2 = L_2 j_2 = n_2 \phi$$

$$\frac{L_2}{M} = \frac{n_2}{k_2 n_1}$$

Portanto:

$$M^2 = k_1 k_2 L_1 L_2 = k^2 L_1 L_2$$

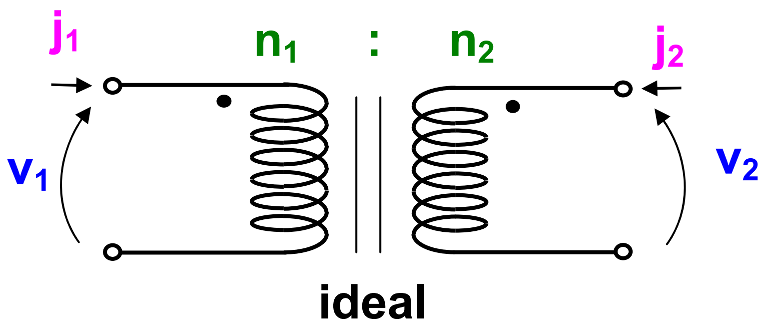
$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

coeficiente de acoplamento

$k = 1 \rightarrow$ acoplamento perfeito

$k = 0 \rightarrow$ sem mútua

Transformador Ideal



$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{j_2}{j_1} = -\frac{n_1}{n_2}$$

$$r = \frac{n_1}{n_2}$$

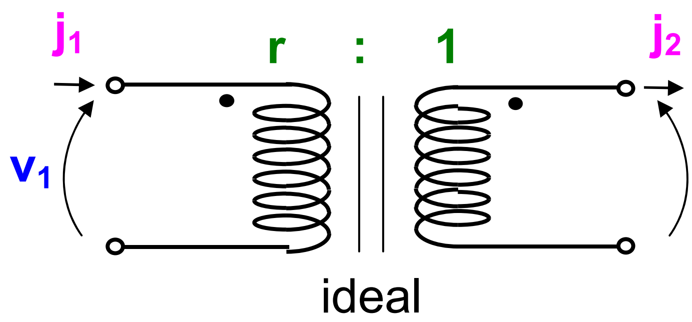
Hipóteses:

1- Coeficiente de Acoplamento unitário **$k = 1$**

2- Indutâncias Próprias Infinitas **$L_1 = L_2 = \infty$**

3- Não há dissipação de energia **(Perdas nulas)**

Convenção usual:



$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{j_2}{j_1} = r$$

Analogia

Circuito Elétrico | **Circuito Magnético**

$$V = R\,I$$

$$fmm = \Re\;\phi$$

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

$$\Re = \frac{l}{\mu A}$$

$$V = \int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{d}l$$

$$fmm = \oint_{\Gamma} \vec{H}.\vec{d}l = N.I$$

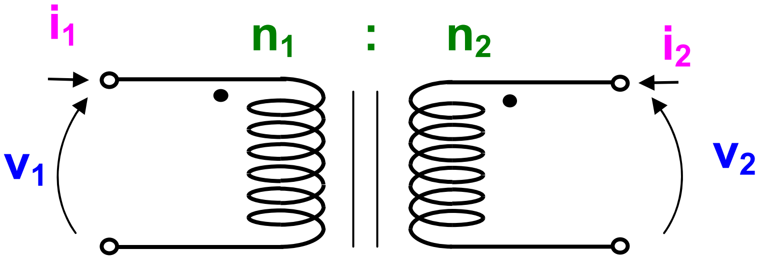
No Trafo:

$$fmm = \; n_1 j_1 + n_2 j_2 = \Re\phi$$

Para $\boxed{\mu \rightarrow \infty} \longrightarrow \boxed{\Re \rightarrow 0}$ **relutância nula**

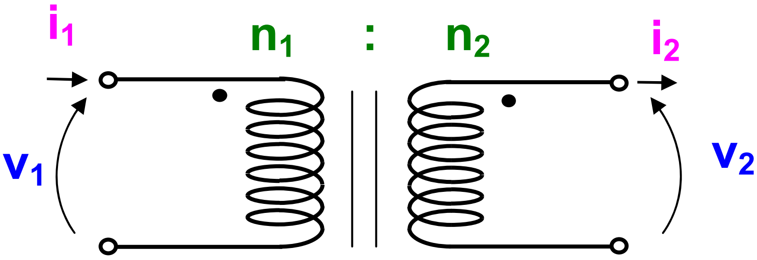
$$L = N^2 P = \frac{N^2}{\Re} \longrightarrow \boxed{L \rightarrow \infty}$$

Trafo Ideal



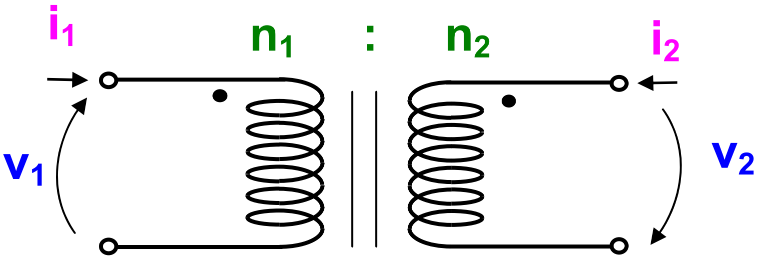
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$



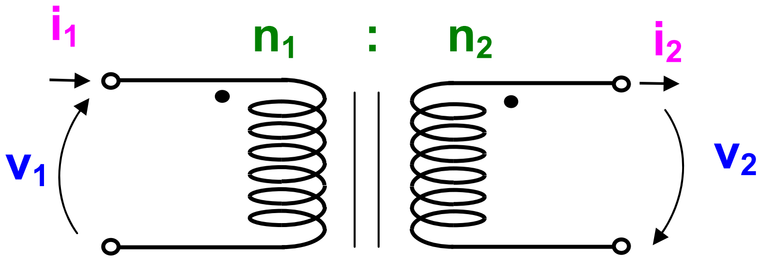
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

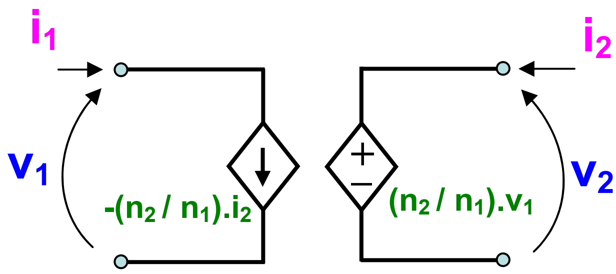
$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$



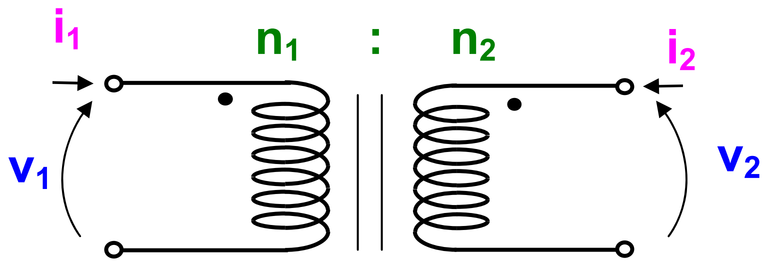
$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Modelo para o PSpice



Transformador Ideal



$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad \boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

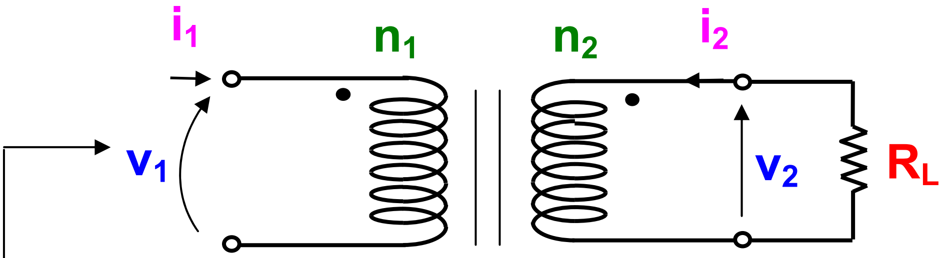
Laplace:

$$\boxed{\frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad \boxed{\frac{I_1(s)}{I_2(s)} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

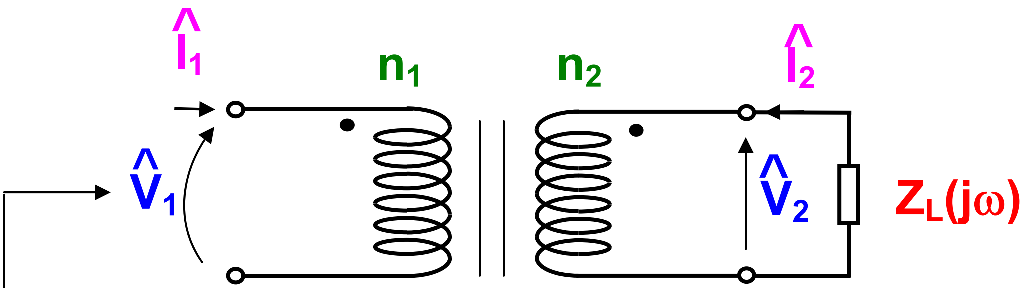
RPS:

$$\boxed{\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad \boxed{\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

Transformação de Impedância

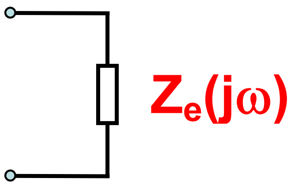


$$R_e = \frac{v_1}{i_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 . R_L$$



$$Z_e(j\omega) = \frac{\hat{V}_1}{\hat{I}_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 . Z_L(j\omega)$$

$\Rightarrow$



Impedância Refletida ou Referida ao Primário

Transformadores Ideais

1. Não têm perdas
2. Coeficiente de Acoplamento unitário $\rightarrow$ k=1
3. Lineares
4. Relutância do circuito magnético: $\Re \rightarrow 0$

   Indutâncias próprias $\rightarrow \infty$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} = r}$$

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{1}{r}}$$

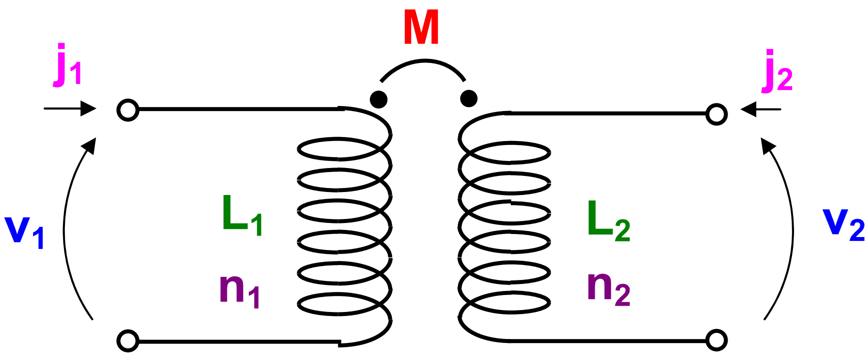
r$\rightarrow$ relação de transformação

Transformadores Perfeitos

1. Não têm perdas
2. Coeficiente de Acoplamento unitário $\rightarrow$ k=1
3. Indutâncias Próprias são finitas
4. Não têm capacitâncias parasitas
5. Vale:

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} = r}$$

Transformador Perfeito



$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$$

k = 1 → acoplamento perfeito

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 D j_1 + M D j_2 \\ v_2(t) = M D j_1 + L_2 D j_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{L_1}{M} = \frac{n_1}{n_2}} \qquad \boxed{\frac{L_2}{M} = \frac{n_2}{n_1}}$$

L_1 e L_2 finitos

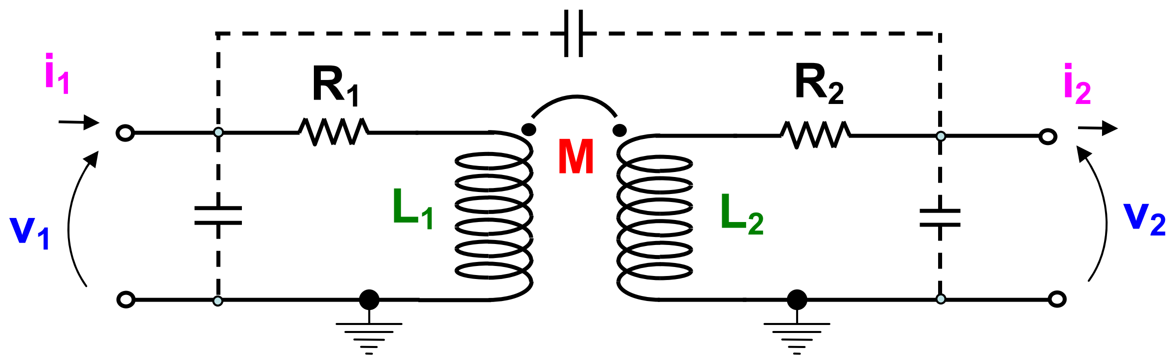
Transformadores Reais

1. **Têm perdas:**
   - **Nos condutores (perdas no cobre: Joule e Foucault)**
   - **No núcleo magnético (perdas no ferro: histeréticas e Foucault)**
2. **Coeficiente de Acoplamento**

   $k < 1$
3. **São não lineares**
4. **Têm capacitâncias parasitas**
5. **Indutâncias Finitas**

Modelos de Transformadores

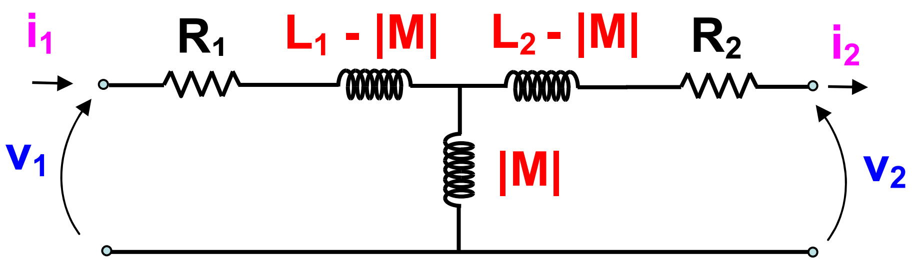
1. Núcleo não magnético



R_1 e R_2 $\rightarrow$ perdas nos enrolamentos

Capacitâncias parasitas

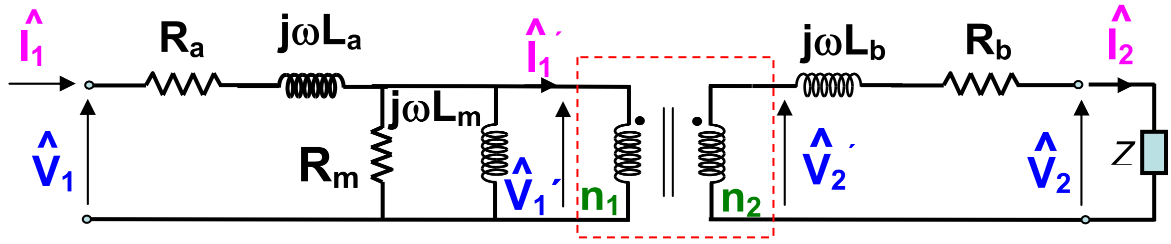
Circuito T equivalente



Indutâncias podem resultar negativas!

Modelos de transformadores

2. Núcleo ferromagnético (linear)



RPS

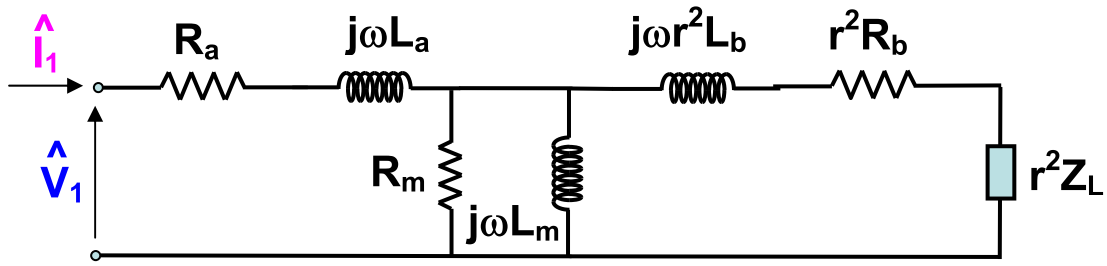
$$r = \frac{n_1}{n_2}$$

L_m – indutância de magnetização
L_a, L_b – indutâncias de dispersão
R_a, R_b – perdas no enrolamento
R_m – perdas no núcleo

$$\hat{V}_2' = \frac{\hat{V}_1'}{r}$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1'.r$$

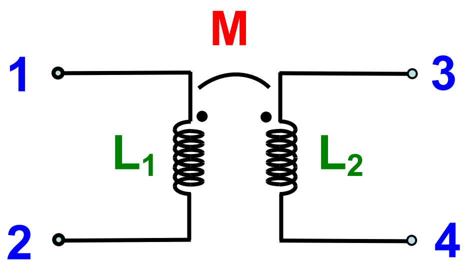
$$\hat{V}_1' = r^2\left[R_b + j\omega L_b + Z_L\right]\hat{I}_1'$$



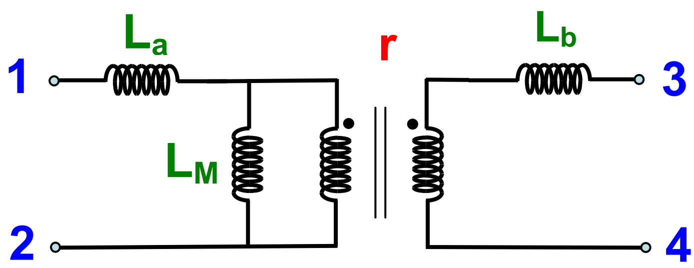
Modelo referido ao primário

Relações entre Modelos de Transformadores

- Modelo de 3 parâmetros



- Modelo de 4 parâmetros



$$\begin{cases} r = \sqrt{L_1 / L_2} = n_1 / n_2 \longrightarrow \\ L_M = r|M| \\ L_a = L_1 - r|M| \\ L_b = L_2 - \dfrac{1}{r}|M| \end{cases}$$

escolhido

$$\begin{cases} L_1 = L_a + L_M \\ |M| = L_M / r \\ L_2 = L_b + L_M / r^2 \end{cases}$$

Transformadores de Medidas

1. Potencial

Primário: alta tensão
isolado do secundário

Secundário: tensões até 150V
ligado a voltímetro aterrado

R_a e L_a $\rightarrow$ erro de fase

$$n_2 < n_1$$

$$\frac{\hat{V}_2}{\hat{V}_1} \cong \frac{1}{r} = \frac{n_2}{n_1}$$

secundário em aberto

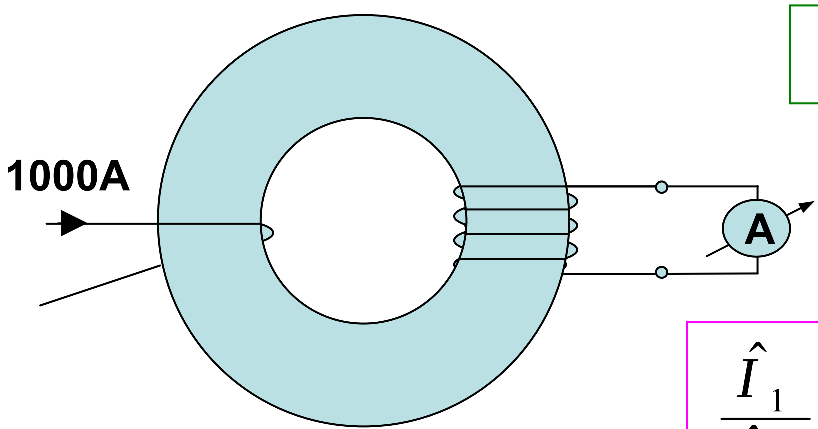
2. Corrente

Primário: alta corrente

Secundário: ligado a amperímetro
secundário em curto

R_b e L_b $\rightarrow$ erro de fase

$$n_1 < n_2$$



$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} \cong \frac{1}{r} = \frac{n_2}{n_1}$$