



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3213

Circuitos Elétricos II

Bloco 5

Propriedades das redes: Teoremas

Prof^a Denise Consonni

MÉTODO DAS IMPEDÂNCIAS

- ◆ Transformadas ou Fasores obedecem às **Leis de Kirchhoff**

$$\sum \pm I_k(s) = 0 \quad \sum \pm \hat{I}_k = 0, \quad \text{Nó}$$

$$\sum \pm V_k(s) = 0 \quad \sum \pm \hat{V}_k = 0, \quad \text{Laço}$$

- ◆ Relações $V(s)/I(s)$ (com c.i.q.) ou $\hat{V}_k/\hat{I}_k$ são do tipo da **Lei de Ohm**

Circuito resistivo

$$v = R \cdot i$$

Circuito $\forall$

$$V(s) = R \cdot I(s)$$

$$V(s) = sL \cdot I(s)$$

$$V(s) = (1/sC) \cdot I(s)$$

$$V(s) = Z(s) \cdot I(s)$$

RPS

$$\hat{V} = R \cdot \hat{I}$$

$$\hat{V} = j\omega L \cdot \hat{I}$$

$$\hat{V} = (1/j\omega C) \cdot \hat{I}$$

$$\hat{V} = Z \cdot \hat{I}$$

MÉTODO DAS IMPEDÂNCIAS

Técnicas de Simplificação:

- ◆ Associação Série/Paralelo
- ◆ Divisor de Tensão/Corrente
- ◆ Transformação de Fontes
- ◆ Transformação Δ Y
- ◆ Proporcionalidade Excitação/Resposta

Função de Rede

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_n}$$

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)^{m_1} (s - z_2)^{m_2} \dots (s - z_g)^{m_g}}{(s - p_1)^{n_1} (s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_k)^{n_k}}$$

$$F(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\det M_a(s)} \cdot \text{adj } M_a(s)$$

Polos da Função de Rede → FCPs

FCP pode não ser polo se houver cancelamento

Função de Rede e FCP

Se os geradores independentes são conectados na rede tal que:

- **Gerador de Tensão** : em série com o ramo → **Regra do “Alicate”**

Gerador de Corrente : em paralelo

- com o ramo → **Regra do “Ferro de Solda”**

FCP



$$\det M_a(s) = 0$$

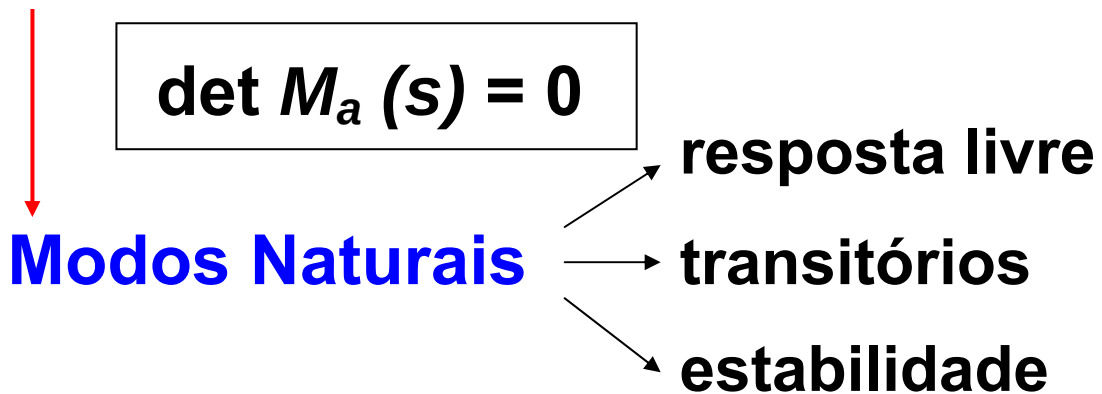
Função de Rede →

$$F(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\det M_a(s)} \cdot \text{adj } M_a(s)$$

Polos de $F(s) \equiv$ FCPs

FCP pode não ser polo
(se houver **cancelamento**)

- **FCPs da Rede Livre**



(não prevêm componentes constantes)

- **Polos de Função de Rede**



- **Polos de uma Resposta**

$$R(s) = F(s).U(s)$$

$$\{\text{polos de } R(s)\} = \{\text{polos de } F(s)\} \cup \{\text{polos de } U(s)\}$$

Computação de Funções de Rede

Programas **simbólicos** ou
semissimbólicos

Entrada : Descrição do circuito

Saídas :

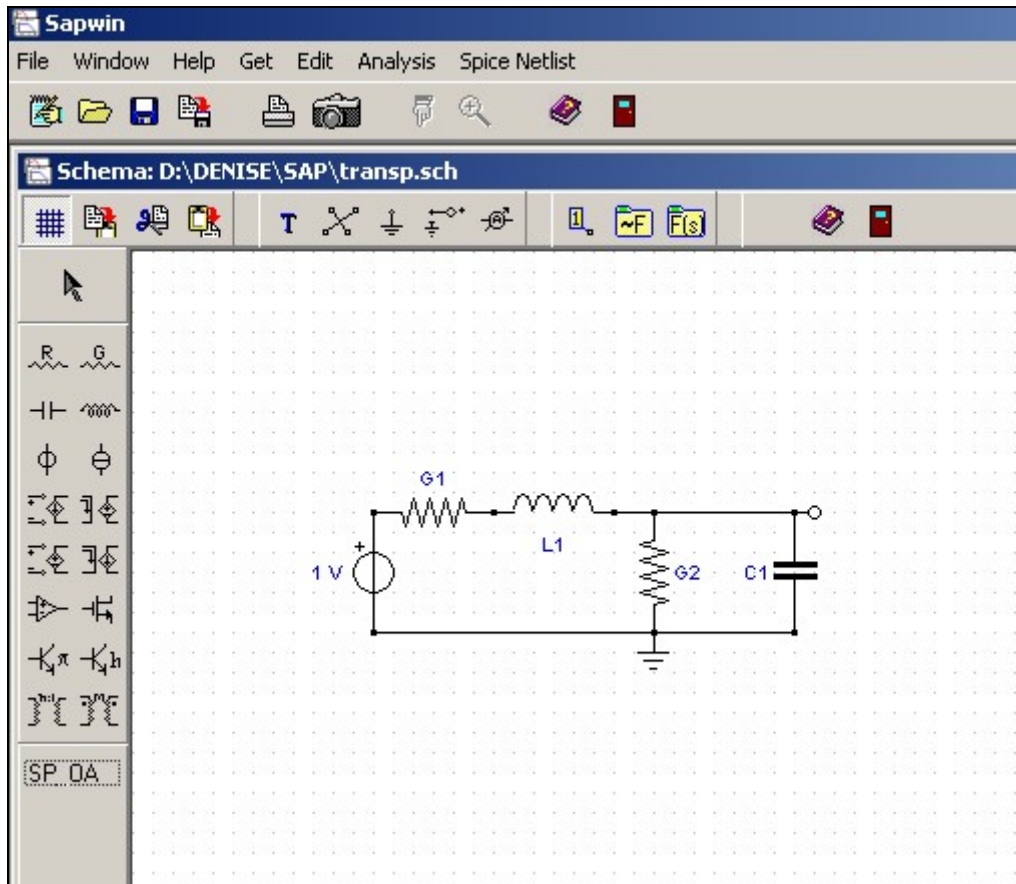
- ◆ Fator de Escala
- ◆ Polos e Zeros
- ◆ Coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador

Exemplos :

- Programa **TRF** (Prof. Vitor)
- Programa **SAPWIN**

<http://cirlab.det.unifi.it/SapWin/Download.htm>

Exemplo com SAPWIN



Função de Rede Simbólica

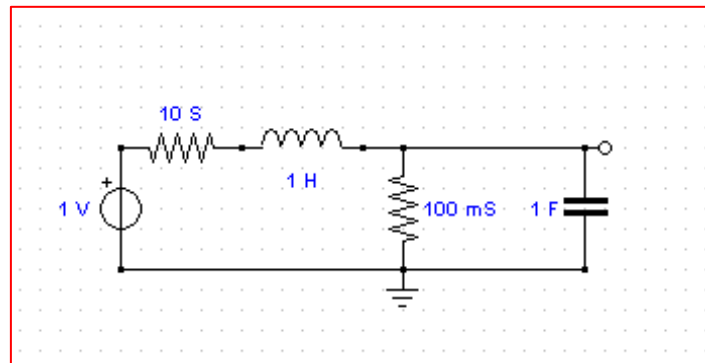
$$(+ G1)$$

$$(+ G1 + G2)$$

$$(+ C1 + G2 G1 L1) s$$

$$(+ G1 C1 L1) s^2$$

Exemplo com SAPWIN



Função de Rede Numérica

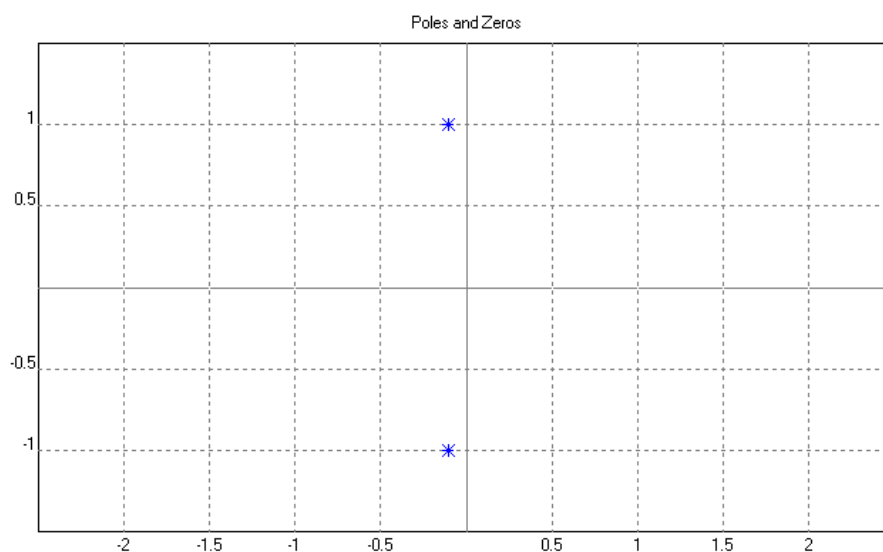
(+10)

(+10.1)

(+2) s

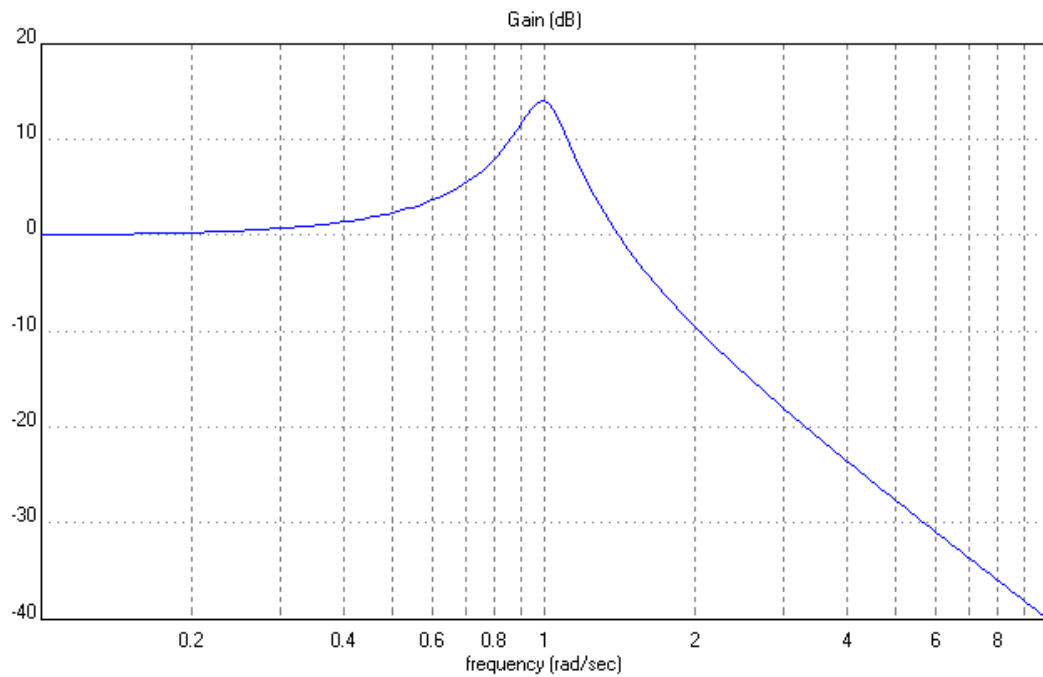
(+10) s²

Diagrama de Polos e Zeros

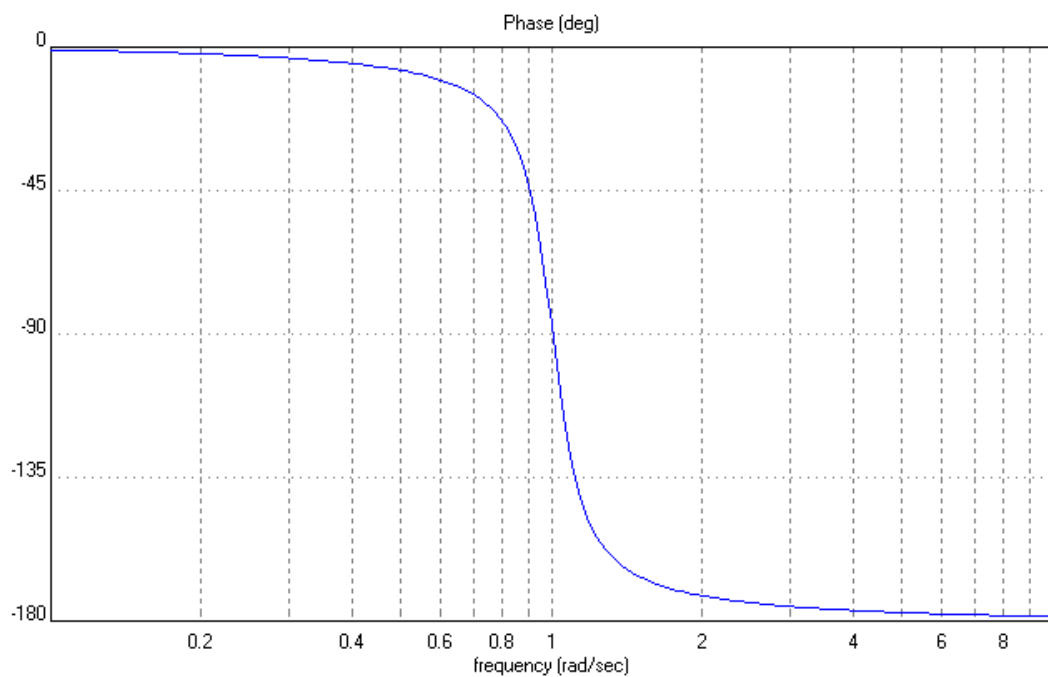


Resposta em Frequência

Módulo



Defasagem



Resposta em Frequência

Função de Rede : $F(s)$

Resposta em frequência : $s \rightarrow j\omega$
 $F(j\omega)$

$$F(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$$

$M(\omega) = |F(j\omega)| \rightarrow$ curva do módulo da resposta em frequência

$\Phi(\omega) = \arg F(j\omega) \rightarrow$ curva de defasagem

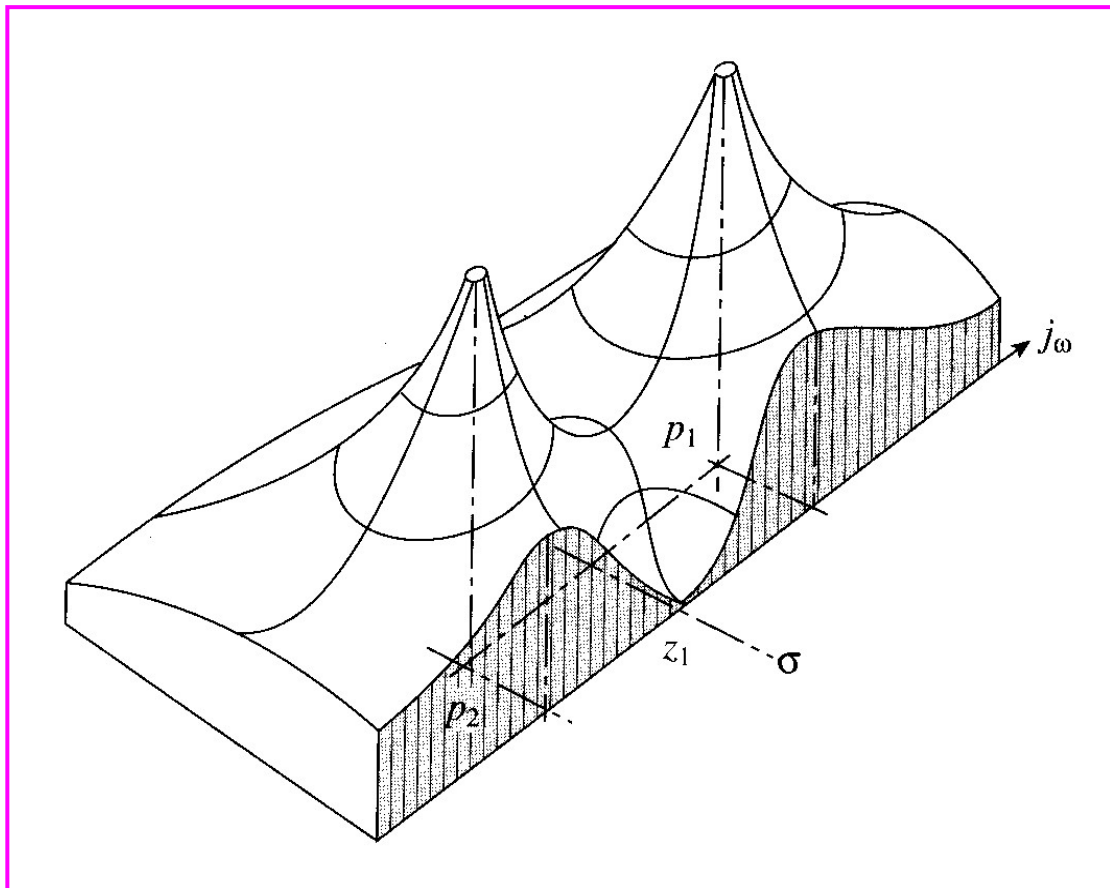
Propriedades

$$F(s^*) = F^*(s) \rightarrow F(j\omega^*) = F^*(j\omega)$$

$$M(-\omega) = M(\omega) \quad \text{simetria par}$$

$$\Phi(-\omega) = -\Phi(\omega) \quad \text{simetria impar}$$

Representação Tridimensional de uma Função de Rede



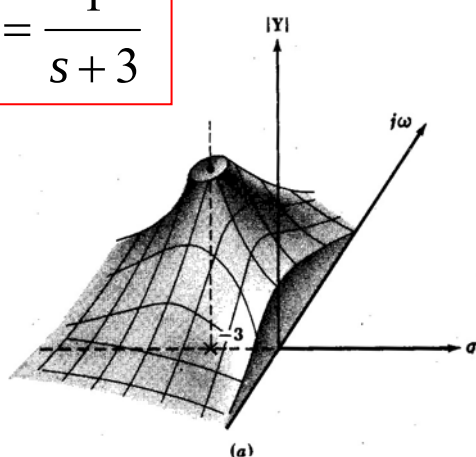
Plano s

Zero : $z_1 = 0$

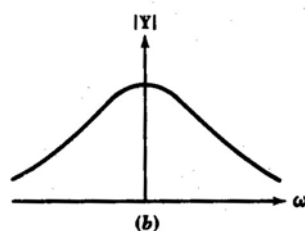
Polos complexos conjugados : p_1 e p_2

Função de Rede e Resposta em Frequência

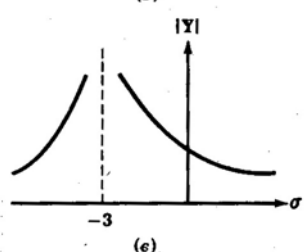
$$Y(s) = \frac{1}{s+3}$$



$$\sigma = 0$$

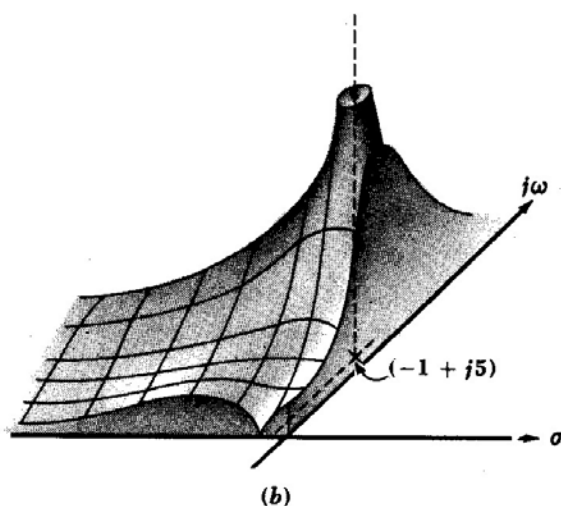
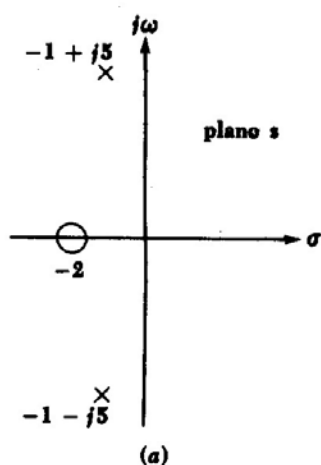


$$\omega = 0$$



$$s = \sigma + j\omega$$

$$|Y(s)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2 + \omega^2}}$$



$$Z(s) = K \frac{(s+2)}{(s+1-j5)(s+1+j5)}$$

TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

REDE **LINEAR**

VÁRIAS EXCITAÇÕES

RESPOSTA = $\sum$ respostas devidas a cada gerador independente, com os demais desativados

Fonte de Tensão = curto-circuito

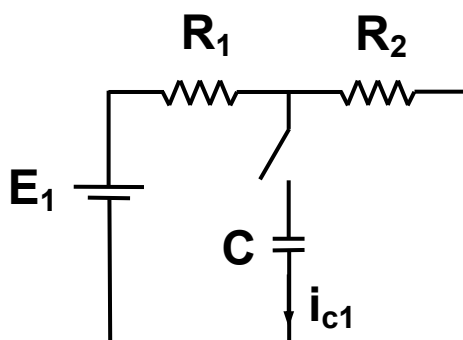
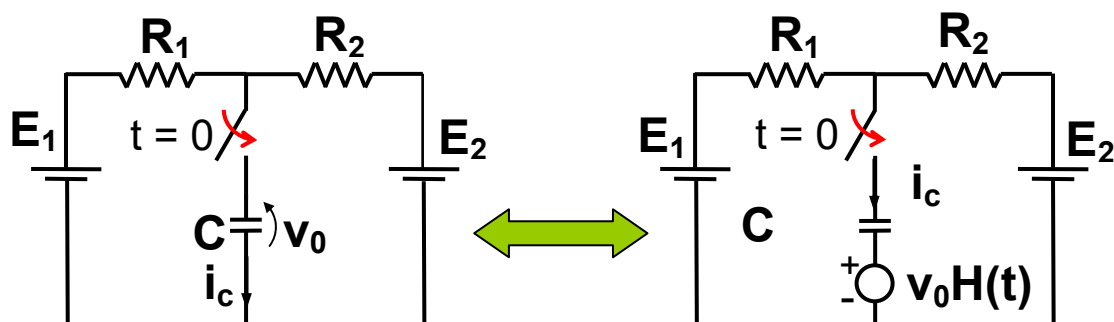
Fonte de Corrente = circuito aberto

ATENÇÃO : **Nunca** inativar

gerador vinculado

Teorema da Superposição

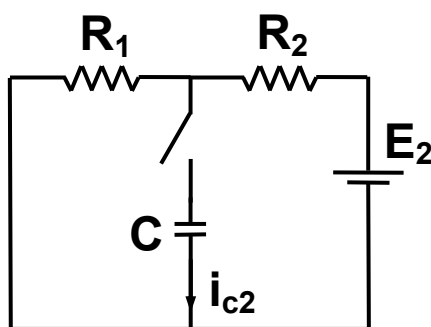
Exemplo com Condição Inicial



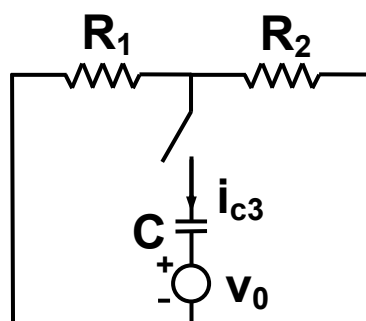
$$i_{c1} = \frac{E_1}{R_1} e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$

$$R = R_1 // R_2$$



$$i_{c2} = \frac{E_2}{R_2} e^{-t/\tau}$$



$$i_{c3} = \frac{-v_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Rede Linear Fixa

$$i_c = i_{c1} + i_{c2} + i_{c3}$$

TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

REDE N **LINEAR**

∀ **resposta em estado zero (c.i.q.) devida a todas as excitações** = soma das respostas em estado zero, devidas à ação separada de cada fonte independente, com as demais desativadas

Demonstração → linearidade das leis de Kirchhoff e das relações de ramos

Em termos de **Funções de Rede** :

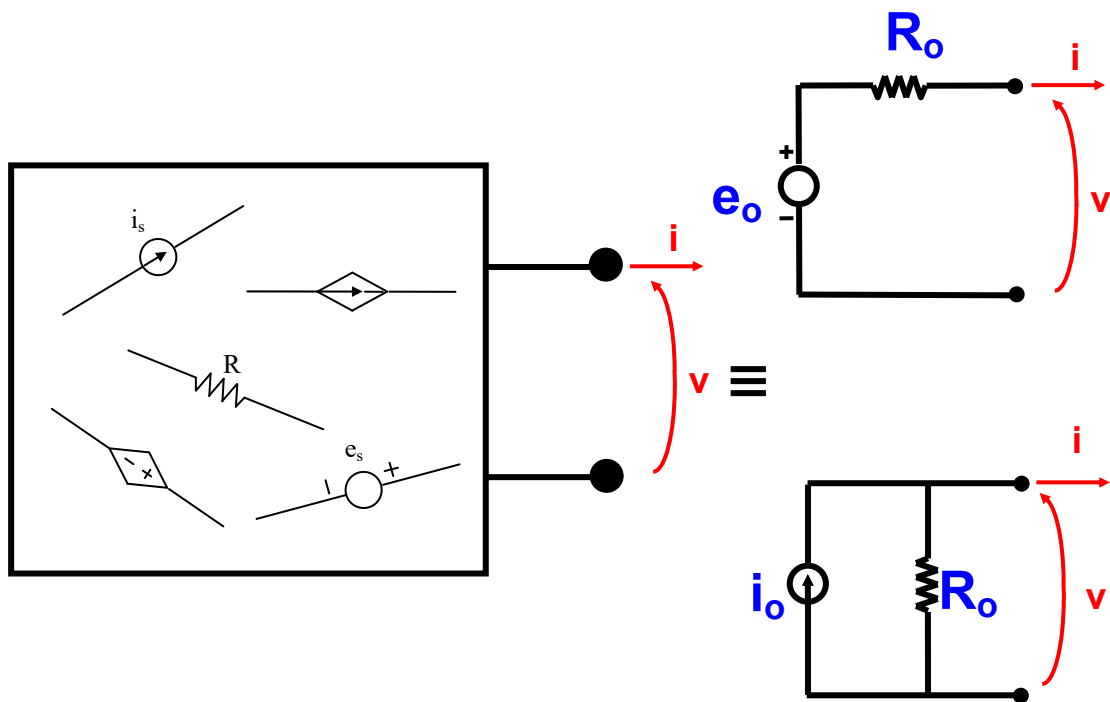
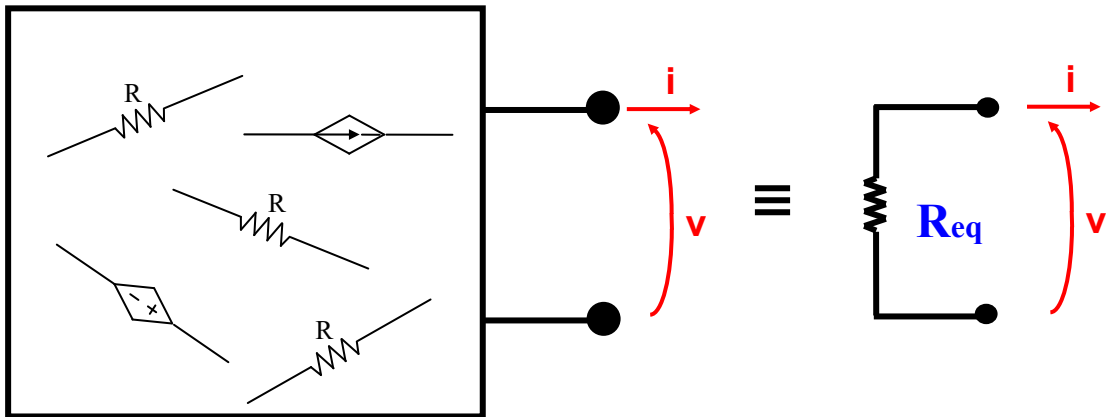
$$X(s) = \sum_{k=1}^m H_k(s) \cdot U_k(s)$$

X(s) = transformada da resposta

H_k(s) = funções de rede da resposta com relação a cada uma das excitações

U_k(s) = transformadas das excitações

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

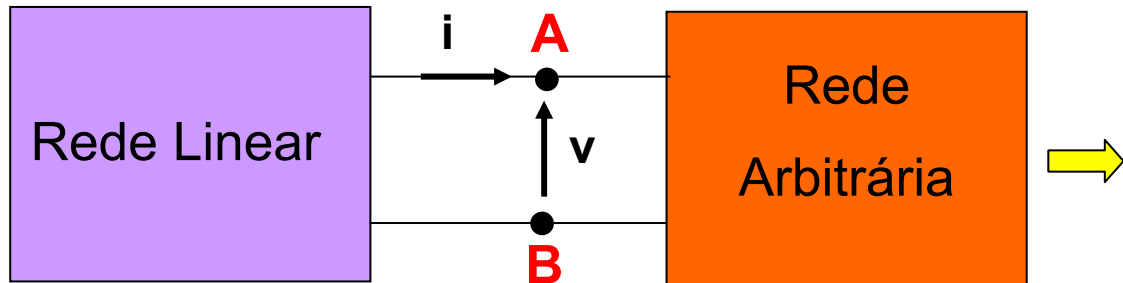


REDE LINEAR FIXA

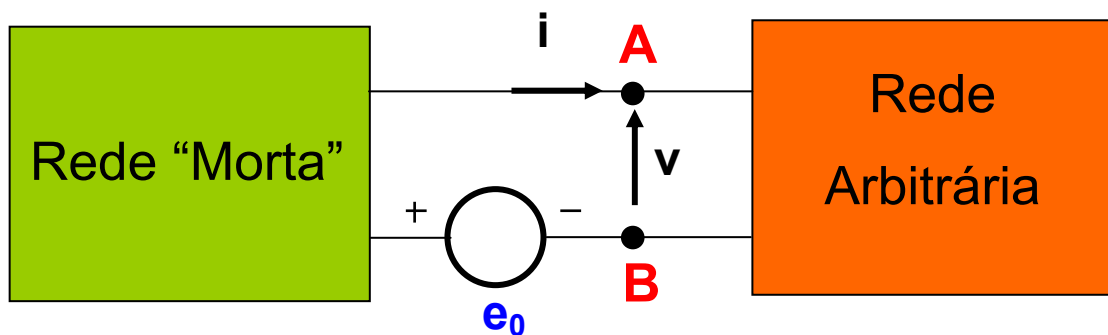
$$R_o = \frac{e_o}{i_o}$$

$$i_o = \frac{e_o}{R_o}$$

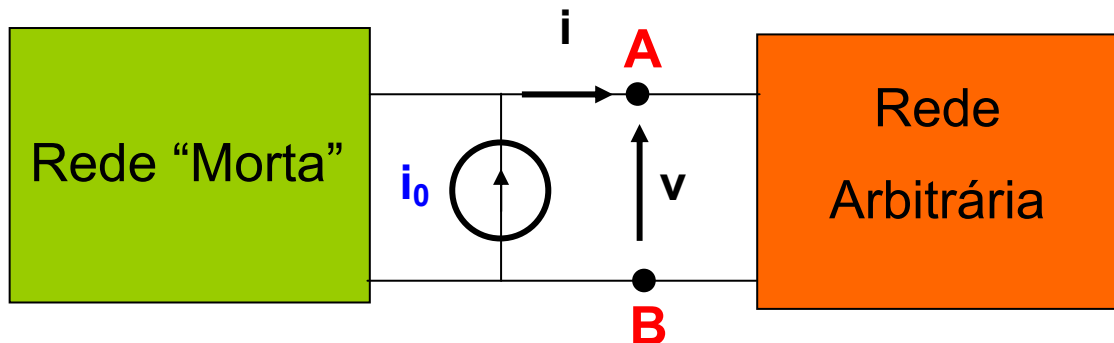
TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON



Thévenin:



Norton:



Rede "Morta" = Rede linear inativada

e_0 = tensão em aberto produzida pela rede linear entre os terminais A e B

i_0 = corrente de curto produzida pela rede linear entre os terminais A e B

Aplicação dos Teoremas de Thévenin e Norton

1- Circuito com Resistores e Geradores independentes:

- ♦ Calcular e_o ou i_o com geradores ativados
- ♦ Calcular R_o com geradores desativados

2- Circuito com Resistores e Geradores vinculados (nenhum gerador independente)

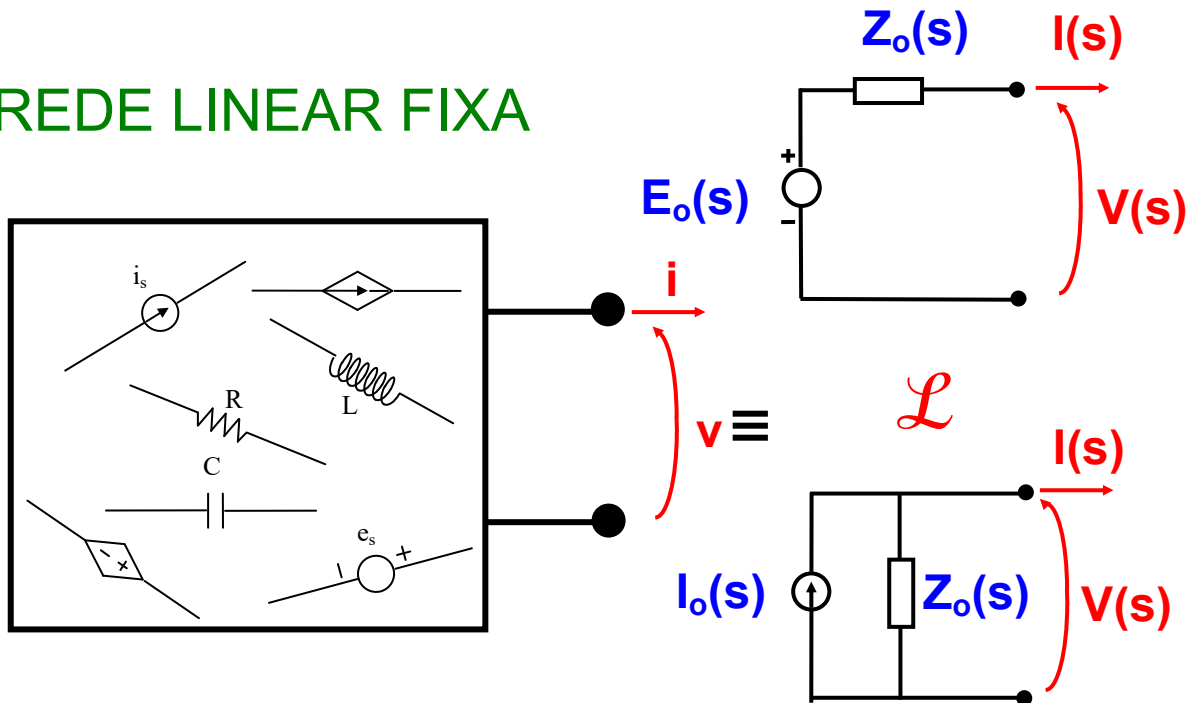
- ♦ $e_o = i_o = 0$
- ♦ Calcular R_o impondo tensão e calculando corrente (ou vice-versa)

3- Circuito com Resistores e Geradores vinculados e Geradores independentes

- ♦ Calcular e_o
- ♦ Calcular i_o
- ♦ Calcular $R_o = e_o / i_o$

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

REDE LINEAR FIXA



$$Z_o(s) = \frac{E_o(s)}{I_o(s)}$$

$$I_o(s) = \frac{E_o(s)}{Z_o(s)}$$

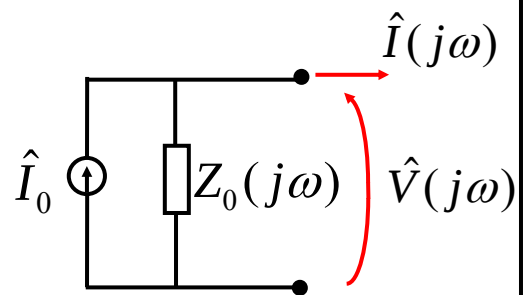
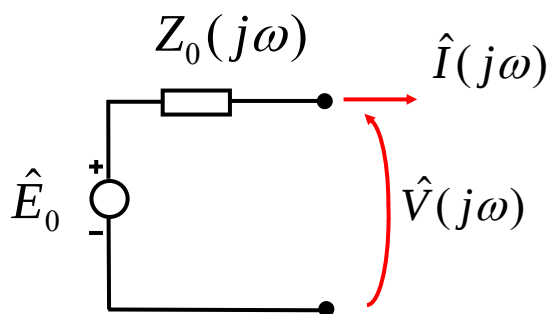
$E_o(s) \rightarrow$ Tensão em aberto (transformada)

$I_o(s) \rightarrow$ Corrente de curto (transformada)

$Z_o(s) \rightarrow$ Impedância interna
(com os geradores independentes inativados)

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Em RPS :



$$Z_o(j\omega) = \frac{\hat{E}_o}{\hat{I}_o}$$

$$\hat{I}_o = \frac{\hat{E}_o}{Z_o}$$

$\hat{E}_0 \rightarrow$ Fasor da tensão em aberto

$\hat{I}_0 \rightarrow$ Fasor da corrente de curto

$Z_o(j\omega) \rightarrow$ Impedância interna
(com os geradores independentes inativados)