Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3213

Circuitos Elétricos II

Bloco 1

Transformada de Laplace

Profª Denise Consonni

Introdução à Transformada de Laplace

Solução de Circuitos no Domínio do Tempo →

- Equações não homogêneas → apenas alguns tipos de excitação

- Redes de ordem mais alta → sistemas de equações íntegro-diferenciais

- Problema de descontinuidades → imposição de condições iniciais

Introdução à Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

Derivadas $\rightarrow$ Multiplicações
Integrais $\rightarrow$ Divisões

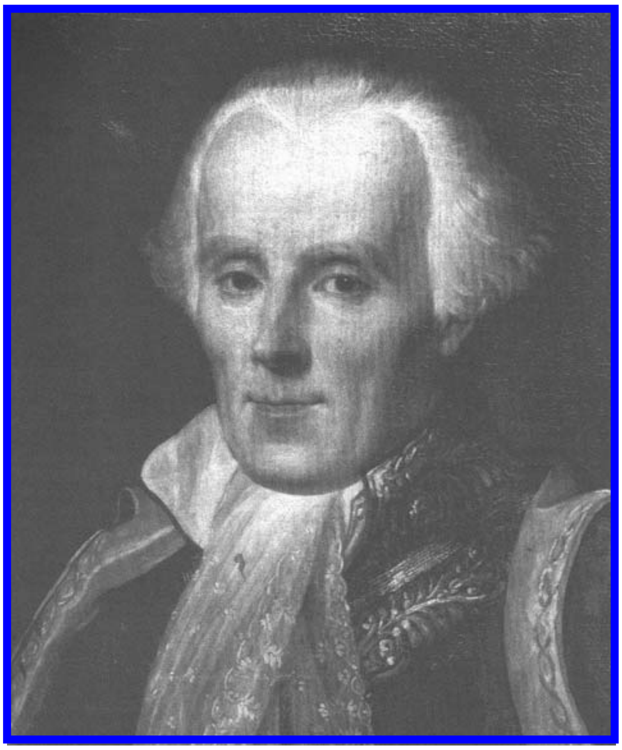
Equações íntegro-diferenciais $\rightarrow$ equações algébricas no campo complexo

Solução no Domínio da Frequência Complexa

Antitransformada $\rightarrow$ solução da equação diferencial

Inclui o problema do valor inicial

Pierre Simon Laplace



- **Francês (Normandia, 1749; Paris, 1827)**
- **Líder em Física-Matemática**
- **Ministro do Interior no império de Napoleão e marquês na restauração dos Bourbons**
- **Obra mais importante: *Mécanique céleste***
- **Importante trabalho em astronomia, cálculo integral, equações diferenciais e teoria das probabilidades.**

Transformada de Laplace

f(t) $\rightarrow$ função real ou complexa

definida em [0, ∞)

$$\mathcal{L}[\, f(t) \,] = \boxed{\int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

Transformação Integral

$\boxed{s = \sigma + j\,\omega}$ (variável complexa, 1/seg)

$$F(s) = \mathcal{L}[\, f(t) \,]$$

t $\rightarrow$ **s**

Domínio do **tempo** $\rightarrow$ Domínio da **frequência complexa**

Funções $\mathcal{L}$- transformáveis

Condições suficientes:

f(t) $\rightarrow$ contínua e integrável em intervalos

f(t) $\rightarrow$ ordem exponencial

i.e. se

$$\left| f(t) \right| < A.e^{\alpha t}$$

para $0_- < t < \infty$, A, α reais

ou seja, $\exists \lim \; e^{-s_0 t} . f(t)$

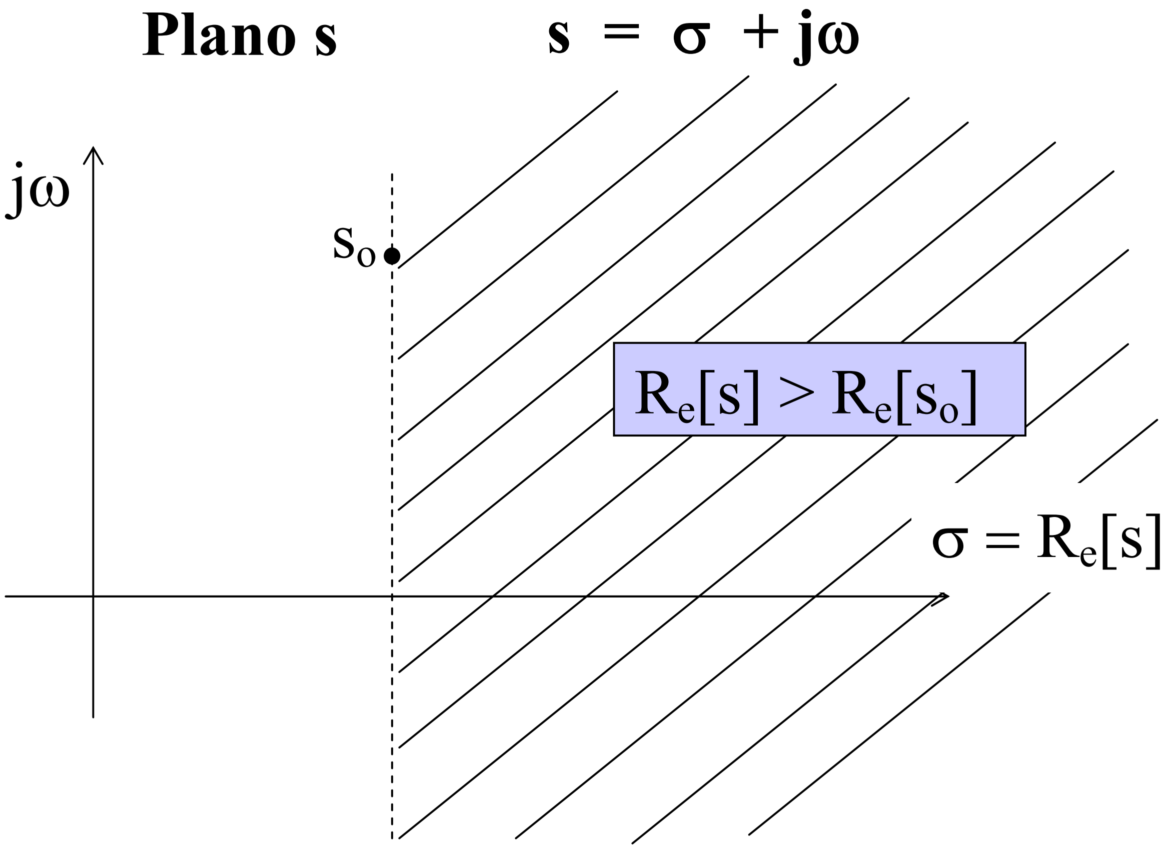
para algum valor de s_0

$s_0 \rightarrow$ abscissa de convergência

$\Rightarrow$ a integral é convergente para

$Re\,[s] > Re\,[s_0]$

Região de Convergência



$s_0 \rightarrow$ abscissa de convergência

$\Rightarrow$ a integral $$\int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

é convergente para Re [s] > Re [s_0]

Transformada de Laplace

- ∃ Transformada Bilateral : $\int_{-\infty}^{+\infty}$
- Unilateral → mais apropriada para Circuitos
- Funções não $\mathcal{L}$- transformáveis:

Ex. : e^{e^t} , e^{t^2} , t^t

- Funções com impulso ou descontinuidade em t=0 →

Integral inclui, pois é tomada de $t=0_-$

- **Antitransformação**:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)}$$

Unicidade !

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[\,f\ (t)\,] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$s = \sigma + j\,\omega$

$F(s) = \mathcal{L}[\,f\ (t)\,]$

Linearidade:

$\mathcal{L}[\,c_1 .\, f_1\,(t) + c_2 .\, f_2(t)\,] =$

$c_1 .\, F_1\,(s) + c_2 .\, F_2\,(s)$

c_1, c_2 constantes

Transformada de Laplace de Funções

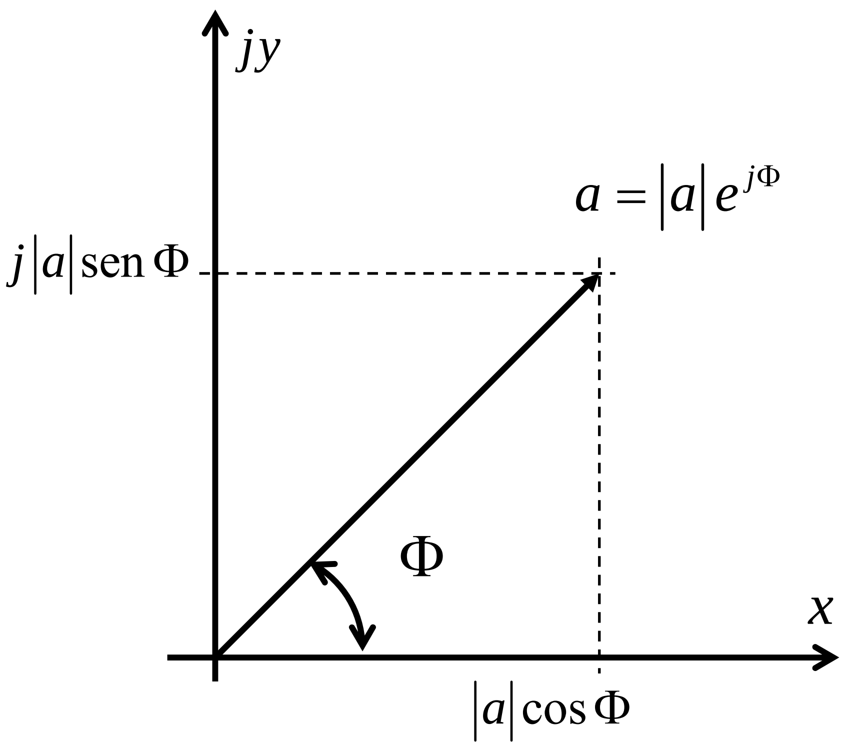
$f(t)$	$F(s)$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1

Fórmulas de Euler-Moivre e Representação Gráfica de Complexos

$$e^{j\Phi} = \cos\Phi + \mathrm{j}\,\mathrm{sen}\,\Phi$$

$$\cos\Phi = \frac{1}{2}\left(e^{j\Phi} + e^{-j\Phi}\right)$$

$$\mathrm{sen}\,\Phi = \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(e^{j\Phi} - e^{-j\Phi}\right)$$



Teorema da Derivada da Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

Aplicação para a função **degrau**:

$$\mathcal{L}[H(t)] = 1/s$$

$$\mathcal{L}[t \cdot H(t)] = 1/s^2$$

$$\mathcal{L}[t^2 \cdot H(t)] = 2/s^3$$

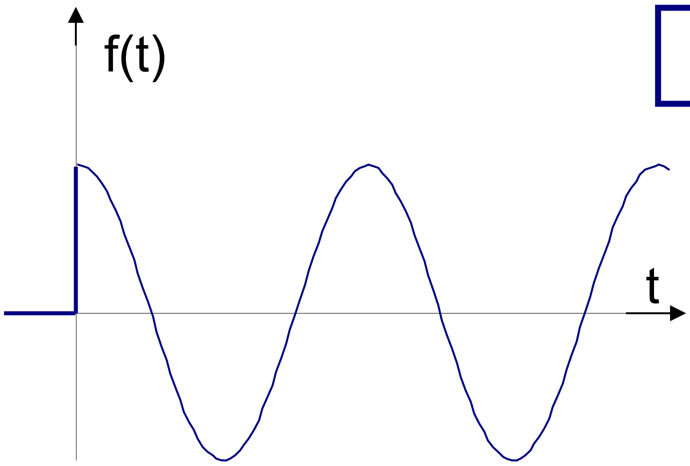
$$\vdots$$

$$\mathcal{L}[t^n \cdot H(t)] = n!/s^{n+1}$$

Teorema do Deslocamento no campo real

$$\mathcal{L}\,[\,f\ (t)\,] = F(s) \Rightarrow$$

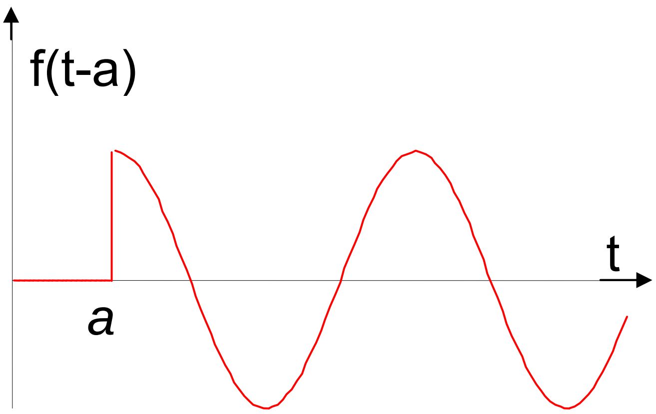
$$\mathcal{L}\,[\,f\ (\,t - a\,)\,] = e^{-as}\ .\ F(s)$$



$$f(t) = \cos \omega t\ .\ H(t)$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t-a) = \cos\left[\omega\,(t - a)\right]\ .\ H(t-a)$$



$$F(s) = \frac{e^{-as}\ .\ s}{s^2 + \omega^2}$$

Translação no Campo Complexo

$$\mathcal{L}\,[\,e^{-at}\,.\,f\ (t)\,] = F(s+a)$$

Multiplicação de argumento por constante

$$\mathcal{L}\,[\ f\ (\omega t)\,] = \frac{1}{\omega}\,.\,F(\,s\,/\,\omega\,)$$

Transformada de funções periódicas

$$\mathcal{L}\,[\,f\ (t)\,] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{0_-}^{T} e^{-st}\,.\,f(t)\,dt$$

Exemplo de Cálculo com o MATLAB

(Toolbox Symbolic)

```
» syms a s t w
» f=exp(-a*t)*cos(w*t)
f =

exp(-a*t)*cos(w*t)

» L=Laplace(f,t,s)

L =

(s+a)/((s+a)^2+w^2)

» pretty(L)
                    s + a
               -----------------
               (s + a)2  + w2
```

Teorema da Derivada

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s.\,F(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2.\,F(s) - s.f(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^n.\,F(s) - s^{n-1}.f(0_-) - \\ &\quad - s^{n-2}.\,\dot{f}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)\end{aligned}}$$

Caso Particular: c.i.q.

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s.\,F(s)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n.\,F(s)$$

Teorema da Integral

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau)\, d\tau}{s}$$

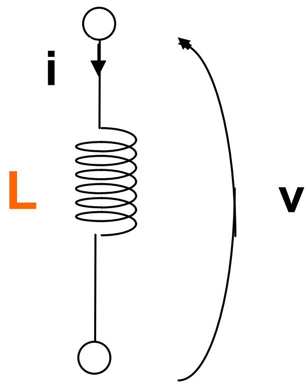
Caso Particular: **c.i.q.**

$$\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^{t} f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Transformada de Laplace

Indutor

$$\boxed{v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}}$$



$$V(s) = \mathcal{L}\,[\,v(t)\,]$$

$$I(s) = \mathcal{L}\,[\,i(t)\,]$$

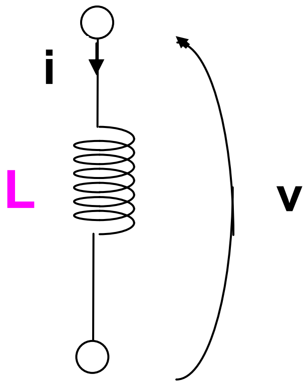
$$\boxed{V(s) = s\,L\,I(s) - L\,i(0_-)}$$

$$\underbrace{}_{\text{Fluxo em } t=0_-}$$

Transformada de Laplace

Indutor

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau}$$



$$I(s) = \mathcal{L}\,[\,i\,(t)\,]$$

$$V(s) = \mathcal{L}\,[\,v\,(t)\,]$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}\,V(s) + \frac{1}{sL}\int_{-\infty}^{0_-} v(\tau)d\tau$$

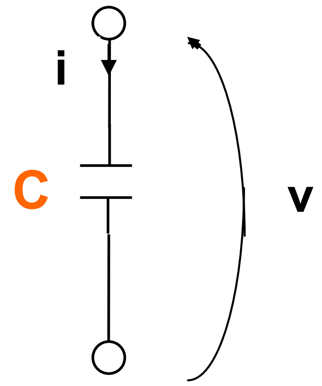
$i(0_-)$

$$\boxed{I(s) = \frac{1}{sL}\,V(s) + \frac{i(0_-)}{s}}$$

Transformada de Laplace

Capacitor

$$\boxed{i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}}$$



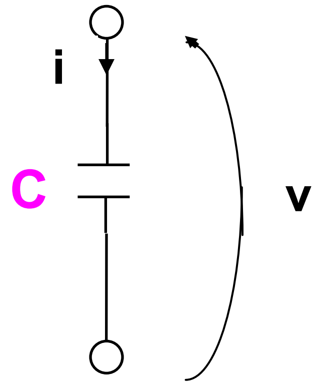
$$I\,(s) = \mathcal{L}\,[\,i\,(t)\,]$$

$$V\,(s) = \mathcal{L}\,[\,v\,(t)\,]$$

$$\boxed{I\,(s) = s\,C\,V(s) - \underbrace{C\,v\,(0_-)}_{\text{Carga em } t=0_-}}$$

Transformada de Laplace

Capacitor



$$\boxed{v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau}$$

$$V(s) = \mathcal{L}\,[\,v(t)\,]$$

$$I(s) = \mathcal{L}\,[\,i(t)\,]$$

$$V(s) = \frac{1}{sC}\,I(s) + \underbrace{\frac{1}{sC}\int_{-\infty}^{0_-} i(\tau)\,d\tau}_{v(0_-)}$$

$$\boxed{V(s) = \frac{1}{sC}\,I(s) + \frac{v(0_-)}{s}}$$

Inversão da Transformada de Laplace

Antitransformada:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,F(s)\,]}$$

Unicidade : $f(t) \leftrightarrow F(s)$

1º. Método
- Tabelas
- Linearidade
- Teoremas

2º. Método : Fórmula de inversão

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds}$$

integral sobre a reta $s=\sigma$

Inversão da Transformada de Laplace

3º. Método : Antitransformação de Funções Racionais

$$\boxed{F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n}}$$

$$a_i \;,\; b_i \;\in\; \Re \qquad\qquad a_0 \;,\; b_0 \;\neq\; 0$$

Forma Fatorada:

$$\boxed{F(s) = K \,.\, \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{k=1}^{n} (s - p_k)}}$$

K = fator de escala (ganho) = $\dfrac{b_0}{a_0}$

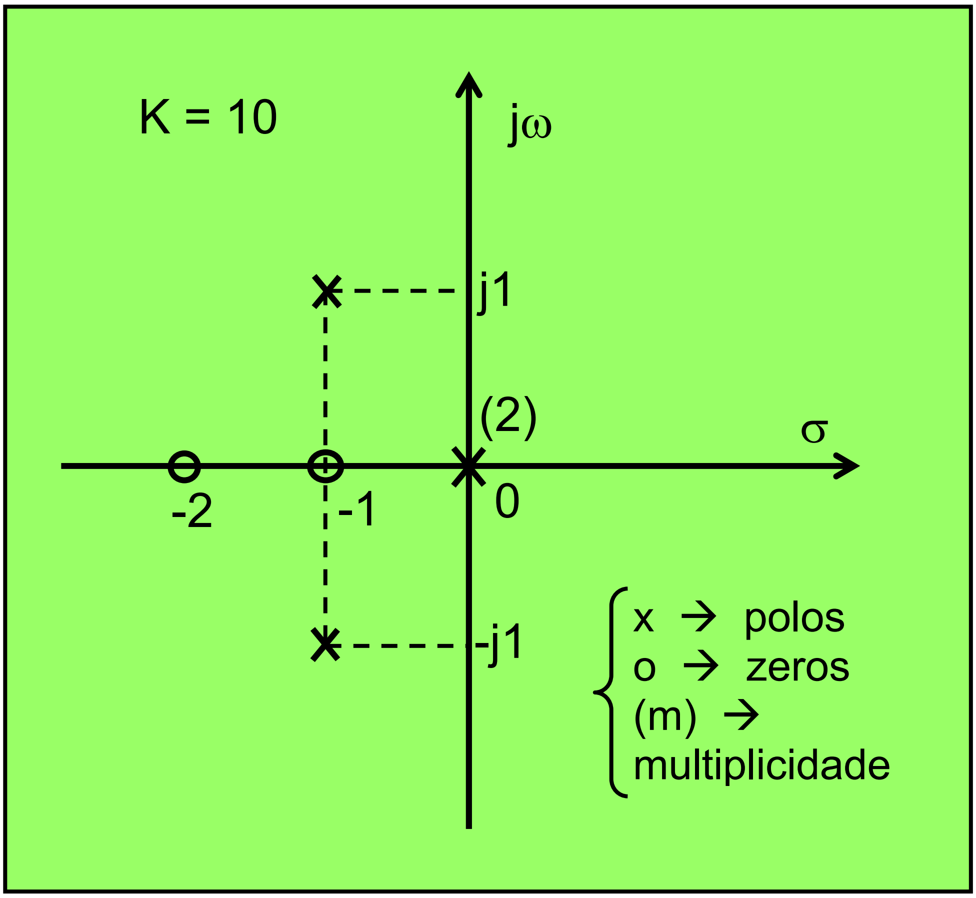
$z_i \rightarrow$ zeros (i = 1,2,....m)

$p_k \rightarrow$ polos (k= 1,2,...n) $\left\{ \begin{array}{l} \text{simples ou múltiplos} \\ \text{reais ou complexos} \end{array} \right.$

Diagrama de polos e zeros de Funções Racionais

$$F(s) = \frac{10.(s^2 + 3s + 2)}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} = 10.\ \frac{(s+1)(s+2)}{s^2\left[(s+1)^2 + 1\right]}$$

- um polo duplo na origem: $p_{1,2} = 0$
- dois polos complexos conjugados: $p_{3,4} = (-1 \pm j\,1)$
- dois zeros simples: $z_1 = -1$; $z_2 = -2$
- fator de escala: $K = 10$



Antitransformação de Funções Racionais

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n}$$

Própria : $m \leq n$

Estritamente própria : $m < n$

$a_0 = 1 \rightarrow$ polinômio $D(s)$ é mônico

Expansão em Frações Parciais:

$$F(s) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_k} A_{kj} \frac{1}{(s - p_k)^j}$$

A_{kj} = resíduos – coeficientes a determinar

p_k = k-ésimo polo

m_k = multiplicidade do k-ésimo polo

$(m_1 + m_2 + \ldots + m_q) = n =$ grau de $D(s)$

Antitransformação de Funções Racionais

Expansão em Frações Parciais:

$$\boxed{F(s) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_k} A_{kj} \frac{1}{(s - p_k)^j}}$$

Antitransformar termo a termo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - p_k)^j}\right] = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_k t}$$

- Derivada da Transformada
- Translação no campo complexo

Contribuição de Polos Complexos

$$A_k e^{p_k t} + A_k^* e^{p_k^* t} = 2\Re e\left[A_k e^{p_k t}\right]$$

1º. caso

Resíduo : $A_k = |A_k|\, e^{j\phi_k}$

Polo : $p_k = \sigma_k + j\,\omega_k$

$$2\,\Re e\left[A_k e^{p_k t}\right] = 2\,|A_k|\; e^{\sigma_k t}\;\cos\,(\omega_k t + \phi_k)$$

2º. caso

Resíduo : $A_k = A_k' + j\,A_k''$

Polo : $p_k = \sigma_k + j\,\omega_k$

$$2\,\Re e\left[A_k e^{p_k t}\right] =$$

$$2\,e^{\sigma_k t}\left[A_k'\cos\,(\omega_k t) - A_k''\mathrm{sen}\,(\omega_k t)\right]$$

Polos Múltiplos - Exemplo

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)\,(s - p_2)^2\,(s - p_3)^3}$$

$$F(s) = \frac{A_{11}}{(s - p_1)} + \frac{A_{21}}{(s - p_2)} + \frac{A_{22}}{(s - p_2)^2}$$

$$+ \frac{A_{31}}{(s - p_3)} + \frac{A_{32}}{(s - p_3)^2} + \frac{A_{33}}{(s - p_3)^3}$$

Transformada de Laplace

Exemplo 1

$$\frac{20\,s^2 + 60\,s + 40}{2\,s^4 + 4\,s^3 + 4\,s^2}$$

Expansão em Frações Parciais:

$$\boxed{\frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{s^2} + \frac{A_2}{(s + 1 - j)} + \frac{A_2^*}{(s + 1 + j)}}$$

$A_{11} = 5$ $\quad$ $A_{12} = 10$

$A_2 = 2{,}5\,(-1 + j)$ $\quad$ $A_2^* = 2{,}5\,(-1 - j)$

Antitransformada:

$$\boxed{5 + 10\,t + 5\sqrt{2}\,e^{-t}\,\cos\,(t + 135^\circ)}$$

ou

$$\boxed{5 + 10t - 5\,e^{-t}\left[\cos t - \operatorname{sen} t\right]}$$

Transformada de Laplace

Exemplo 2

$$\frac{s^4 + 5\,s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 1}{s^3 + 3\,s^2 + 2\,s}$$

Expansão em Frações Parciais:

$$\boxed{s + 2 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(\,s+1\,)} + \frac{A_3}{(\,s+2\,)}}$$

$A_1 = 0{,}5$ $A_2 = 2$ $A_3 = -6{,}5$

Antitransformada:

$$\boxed{\delta'(t) + 2\,\delta(t) + 0{,}5 + 2\,e^{-t} - 6{,}5\,e^{-2t}}$$