

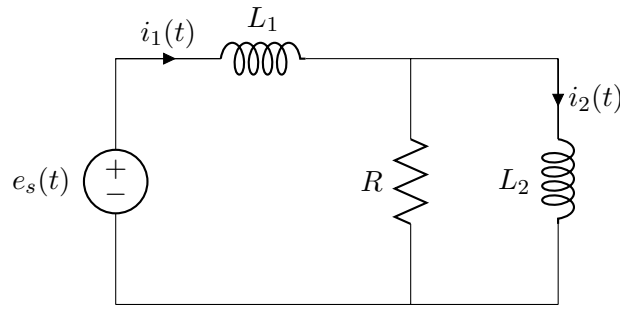
PSI3213: Circuitos Elétricos II

Exemplo sobre estabilidade e Regime Permanente Senoidal

FRMP,MTMS-2015

Considere o circuito da Figura 1. Neste exemplo, vamos

- (a) classificar o circuito quanto à estabilidade da rede livre e
- (b) determinar se o circuito pode atingir o Regime Permanente Senoidal (RPS).



$$e_s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) H(t) \text{ (V, s)}$$

$$i_1(0_-) = 0$$

$$i_2(0_-) = 0$$

Figura 1: Circuito elétrico considerado no exemplo.

- (a) Primeiramente, vamos encontrar a equação característica do circuito da Figura 1 para então classificá-lo quanto à estabilidade da rede livre. Como o circuito possui um laço de indutores, haverá uma frequência complexa própria (FCP) nula. Para que essa FCP não deixe de aparecer como raiz da equação característica, poderíamos usar Análise de Malhas, Análise Nodal com as correntes dos indutores como incógnitas, ou ainda Análise Nodal Modificada – todas no domínio de Laplace. O circuito esquematizado no domínio de Laplace é mostrado na Figura 2. Como estamos interessados em obter expressões para a tensão nodal $e_1(t)$ e para as correntes dos indutores $i_1(t)$ e $i_2(t)$, vamos usar Análise Nodal no domínio de Laplace com as incógnitas $E_1(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$.

Fazendo a Análise Nodal do circuito da Figura 2, temos o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{cases} GE_1(s) - I_1(s) + I_2(s) = 0 & (1^{\text{a}} \text{ LK no nó } 1) \\ E_1(s) + sL_1 I_1(s) = E_s(s) & (2^{\text{a}} \text{ LK no ramo de } L_1) \\ E_1(s) - sL_2 I_2(s) = 0 & (2^{\text{a}} \text{ LK no ramo de } L_2) \end{cases} \quad (1)$$

Reescrevendo o sistema linear de (1) como uma equação matricial, resulta

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G & -1 & 1 \\ 1 & sL_1 & 0 \\ 1 & 0 & -sL_2 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{T}(s)} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

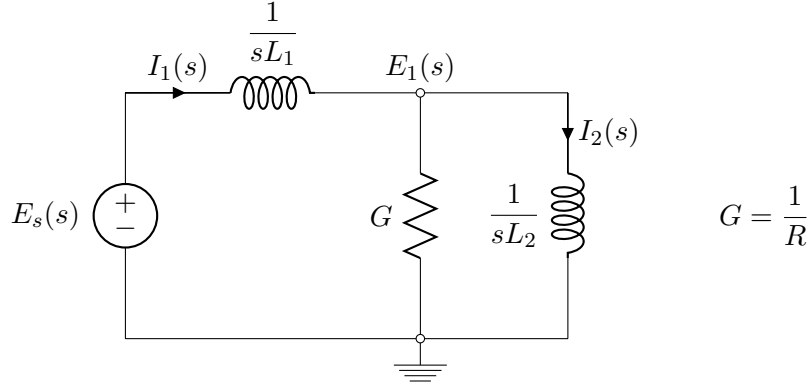


Figura 2: Circuito esquematizado em Laplace.

A equação característica do circuito é dada por

$$\det \mathbf{T}(s) = 0 \Leftrightarrow s^2 GL_1 L_2 - s(L_1 + L_2) = 0 \Leftrightarrow s \left(s - \frac{L_1 + L_2}{GL_1 L_2} \right) = 0. \quad (3)$$

Logo, as FCPs do circuito são $s_1 = 0$ e $s_2 = \frac{L_1 + L_2}{GL_1 L_2}$. A frequência complexa própria nula ocorre devido ao laço de indutores. Como $\text{Re}\{s_i\} \leq 0$ para $i = 1, 2$, o circuito é classificado como **marginalmente estável**.

- (b) Vimos em aula que todos os circuitos assintoticamente estáveis atingem o RPS, pois seus modos naturais decaem a zero quando $t \rightarrow +\infty$. Em geral, circuitos marginalmente estáveis como o da Figura 1 não atingem o RPS, pois seus modos naturais não decaem a zero com o passar do tempo. No entanto, vamos verificar que o circuito da Figura 1 atinge o RPS para alguns valores bem específicos da fase φ de $e_s(t)$.

Inicialmente, vamos encontrar as expressões de $E_1(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$ em função de $E_s(s)$, como mostrado a seguir.

$$E_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ E_s(s) & sL_1 & 0 \\ 0 & 0 & -sL_2 \end{vmatrix}}{\det \mathbf{T}(s)} = \frac{-E_s(s)}{GL_1 \left(s - \frac{L_1 + L_2}{GL_1 L_2} \right)}, \quad (4)$$

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} G & 0 & 1 \\ 1 & E_s(s) & 0 \\ 1 & 0 & -sL_2 \end{vmatrix}}{\det \mathbf{T}(s)} = \frac{-E_s(s)(sGL_2 + 1)}{GL_1 L_2 s \left(s - \frac{L_1 + L_2}{GL_1 L_2} \right)}, \quad (5)$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} G & -1 & 0 \\ 1 & sL_1 & 0 \\ 1 & 0 & E_s(s) \end{vmatrix}}{\det \mathbf{T}(s)} = \frac{E_s(s)(sGL_1 + 1)}{GL_1 L_2 s \left(s - \frac{L_1 + L_2}{GL_1 L_2} \right)}. \quad (6)$$

Utilizando o seguinte par transformado

$$e_s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) H(t) \longleftrightarrow E_s(s) = \frac{s \cos \varphi - \omega \text{sen } \varphi}{s^2 + \omega^2}, \quad (7)$$

e fazendo a substituição de $E_s(s)$ em (4), (5) e (6), respectivamente, temos

$$E_1(s) = \frac{-(s \cos \varphi - \omega \operatorname{sen} \varphi)}{GL_1 \left(s - \frac{L_1+L_2}{GL_1L_2} \right) (s^2 + \omega^2)}, \quad (8)$$

$$I_1(s) = \frac{-(s \cos \varphi - \omega \operatorname{sen} \varphi)(sGL_2 + 1)}{GL_1L_2s \left(s - \frac{L_1+L_2}{GL_1L_2} \right) (s^2 + \omega^2)}, \quad (9)$$

$$I_2(s) = \frac{(s \cos \varphi - \omega \operatorname{sen} \varphi)(sGL_1 + 1)}{GL_1L_2s \left(s - \frac{L_1+L_2}{GL_1L_2} \right) (s^2 + \omega^2)}. \quad (10)$$

Finalmente, expandimos as funções racionais estritamente próprias de (8), (9) e (10) em frações parciais com resíduos a determinar:

$$E_1(s) = \frac{A_1}{s - \frac{L_1+L_2}{GL_1L_2}} + \frac{A_2}{s - j\omega} + \frac{A_2^*}{s + j\omega}, \quad (11)$$

$$I_1(s) = \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s - \frac{L_1+L_2}{GL_1L_2}} + \frac{B_3}{s - j\omega} + \frac{B_3^*}{s + j\omega}, \quad (12)$$

$$I_2(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s - \frac{L_1+L_2}{GL_1L_2}} + \frac{C_3}{s - j\omega} + \frac{C_3^*}{s + j\omega}. \quad (13)$$

Para que o RPS se estabeleça, é preciso fazer com que as constantes B_1 e C_1 se anulem. Caso contrário, para $t \rightarrow +\infty$, teremos em $i_1(t)$ e $i_2(t)$ uma cossenoide somada a uma constante – o que **não** caracteriza um comportamento em regime permanente senoidal.

Portanto, calculamos as constantes B_1 e C_1 da seguinte forma:

$$B_1 = sI_1(s) \Big|_{s=0} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\omega(L_1 + L_2)}, \quad (14)$$

$$C_1 = sI_2(s) \Big|_{s=0} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\omega(L_1 + L_2)}. \quad (15)$$

Igualando B_1 e C_1 a zero, chegamos à condição suficiente e necessária para que o regime permanente senoidal se estabeleça nesse circuito:

$$\operatorname{sen} \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Verifique os resultados encontrados na resolução desse exemplo rodando uma simulação no Multisim 14.0. Utilize os arquivos `exemplo_estabilidade.ms14` e `exemplo_estabilidade.gra`, em que são adotados os seguintes valores para os parâmetros do circuito da Figura 1:

$$R = 1 \Omega, \quad L_1 = 2 \text{ H}, \quad L_2 = 1 \text{ H}, \quad A = 5 \text{ V} \text{ e } \omega = 3 \text{ rad/s}.$$

Lembre-se também que a fonte de tensão `AC_VOLTAGE` gera uma senoide e não um cosseno. Varie os valores de φ e observe o comportamento das tensões e correntes do circuito.