

Escola Politécnica da USP  
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos

## **Transformada de Laplace aplicada a circuitos elétricos**

Magno T. M. Silva

Junho de 2015

### **Sumário**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definição</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Existência e abscissa de convergência</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Transformadas de Laplace úteis em circuitos</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Propriedades</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Exemplo – Circuito RLC série</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>A transformada inversa de Laplace</b>	<b>10</b>
7.1	Tabelas de transformadas e propriedades . . . . .	10
7.2	Fórmula de inversão . . . . .	10
7.3	Transformada inversa de funções racionais . . . . .	11
7.3.1	Definição de polos e zeros . . . . .	11
7.4	Inversa de funções racionais estritamente próprias . . . . .	12
7.5	Inversa de funções racionais impróprias . . . . .	17
	<b>Referências</b>	<b>18</b>

# 1 Introdução

Para introduzir a transformada de Laplace, vamos estudar o comportamento livre de um circuito RL, mostrado na Figura 1.

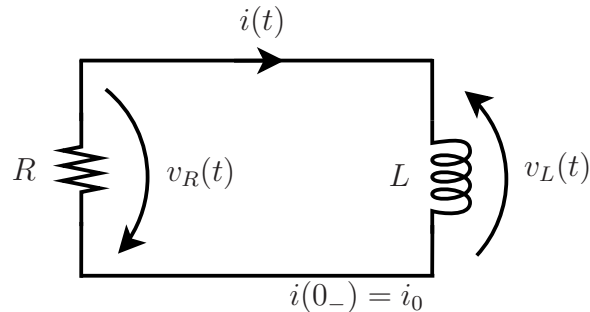


Figura 1: Circuito RL livre com condição inicial  $i_0$ .

Aplicando a segunda Lei de Kirchhoff ao único laço do circuito da Figura 1, obtemos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0, \quad (1)$$

ou ainda,

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0. \quad (2)$$

É interessante observar que se trata de uma equação a coeficientes constantes pois supostamente os valores dos componentes  $R$  e  $L$  não variam ao longo do tempo. Para resolver essa equação, vamos aplicar uma transformação a ela e resolver a equação resultante em um *domínio transformado*. Depois devemos aplicar uma transformação inversa para se obter a solução no tempo.

Multiplicando ambos os lados de (2) por  $e^{-st}$ , e integrando de  $t = 0_-$  a  $t \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0_-}^{\infty} \frac{R}{L} i(t) e^{-st} dt = 0$$

ou ainda

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt + \frac{R}{L} \underbrace{\int_{0_-}^{\infty} i(t) e^{-st} dt}_{I(s)} = 0. \quad (3)$$

Aqui cabem três observações:

- $s$  é uma variável complexa  $s = \sigma + j\omega$  que tem dimensão de frequência. Por isso, é usualmente chamada de *frequência complexa*;
- a integral é calculada a partir de  $t = 0_-$  para contemplar o caso de impulso em  $t = 0$ ;

- a segunda integral em (3) é definida como uma *corrente transformada* e é uma função da frequência complexa  $s$ . Por isso, é denotada como  $I(s)$ .

Note que a função que aparece na primeira integral em (3) é a derivada da corrente. Para continuar, precisamos calcular a transformada da derivada de uma função. Usando integração por partes, pode-se mostrar que

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{di(t)}{dt} e^{-st} dt = sI(s) - i(0_-). \quad (4)$$

É importante observar que a transformada aplicada à derivada de uma função levou ao produto  $sI(s)$  e além disso apareceu automaticamente a condição inicial do indutor. Substituindo (4) em (3), obtemos a seguinte equação diferencial transformada

$$I(s)[s + R/L] = i_0 \Rightarrow I(s) = \frac{i_0}{s + R/L}. \quad (5)$$

Com a transformação aplicada à equação diferencial (2), obtivemos uma equação algébrica simples na variável complexa  $s$ . Obter a corrente transformada é simples. No entanto, ainda precisamos obter  $i(t)$ . Como obter  $i(t)$  a partir de  $I(s)$ ?

Para responder essa pergunta, vamos aplicar a mesma transformação à função exponencial  $Ae^{-\alpha t}H(t)$ , em que  $H(t)$  representa o degrau unitário. Assim, obtemos

$$\int_{0_-}^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{A}{s + \alpha}. \quad (6)$$

Usando esse resultado, conclui-se que

$$I(s) = \frac{i_0}{s + R/L} = \int_{0_-}^{\infty} i_0 e^{-(R/L)t} e^{-st} dt \quad (7)$$

e portanto, a solução do problema é

$$i(t) = i_0 e^{-(R/L)t} H(t). \quad (8)$$

Obter a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e a coeficientes constantes é relativamente simples e não justifica a resolução no domínio transformado. No entanto, as equações diferenciais que descrevem circuitos elétricos podem ter ordem elevada. A solução dessas equações diferenciais corresponde à soma da solução geral da equação homogênea com a solução particular da equação completa. Obter a solução particular da equação completa pode ser complicado. Em geral, essas soluções são conhecidas para um conjunto particular de excitações como, por exemplo, degrau, impulso ou senóide. Além disso, deve-se impor as condições iniciais para resolver o problema, o que também pode ser complicado.

A resolução de equações diferenciais (ou íntegro-diferenciais) ordinárias e a coeficientes constantes em um domínio transformado facilita sobremaneira os cálculos já que a derivada de uma função é transformada em um produto e a integral em uma divisão na variável complexa  $s$ . Assim, obtemos equações algébricas no domínio transformado que levam em

conta as condições iniciais. Para obter a solução no tempo devemos aplicar a transformada inversa e para isso podemos usar técnicas bem conhecidas e relativamente simples, como a decomposição em frações parciais como veremos mais adiante. Assim, o procedimento de se aplicar a transformada de Laplace para resolução de equações diferenciais pode ser resumido através do diagrama mostrado na Figura 2.

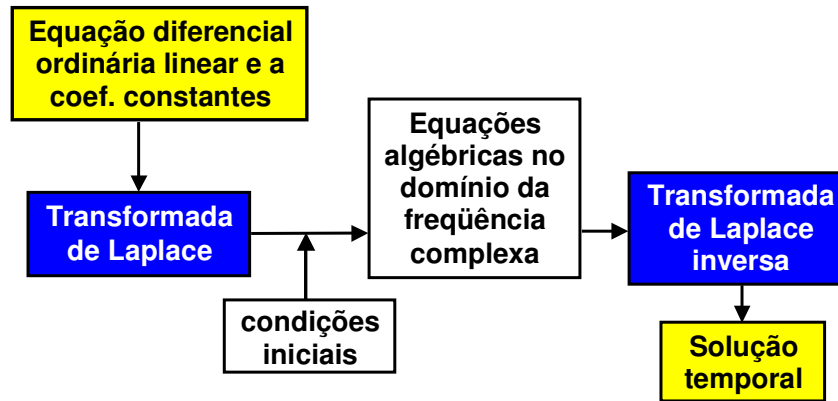


Figura 2: Transformada de Laplace aplicada a Circuitos Elétricos.

## 2 Definição

Seja  $f(t)$  uma função real ou complexa definida em  $[0_-, \infty]$ . Sua transformada de Laplace unilateral é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \triangleq \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9)$$

sendo  $s = \sigma + j\omega$  uma variável complexa.

Cabe observar que a transformada de Laplace bilateral é definida de  $t \rightarrow -\infty$  a  $t \rightarrow \infty$  e é importante quando se trabalha com sinais não causais (sinais que são diferentes de zero para  $t < 0$ ). Em redes elétricas, um circuito sempre começa a operar a partir de um instante de tempo inicial ( $t = 0_-$ ) em que há ou não energia armazenada no campo elétrico dos capacitores e no campo magnético dos indutores (condições iniciais). Além disso, as excitações são aplicadas ao circuito a partir desse instante inicial. Por isso, a definição unilateral é mais conveniente para essa aplicação.

## 3 Existência e abscissa de convergência

Para que a transformada de Laplace exista, é necessário que a integral (9) convirja. Substituindo  $s = \sigma + j\omega$  em (9), obtemos

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt. \quad (10)$$

Como  $|e^{-j\omega t}| = 1$ , a integral do lado direito dessa equação converge se

$$\int_{0_-}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty. \quad (11)$$

Dessa forma, a existência da transformada de Laplace unilateral é garantida se a integral em (11) é finita para algum valor de  $\sigma$ . Qualquer sinal que não cresce mais rápido do que um sinal exponencial  $Me^{\sigma_0 t}$  para algum  $M$  e  $\sigma_0$  satisfaz a condição (11). Dessa forma, se para algum  $M$  e  $\sigma_0$ ,

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \quad (12)$$

basta escolher  $\sigma > \sigma_0$  para satisfazer (11).

**Exemplo 3.1.** Qual o valor de  $\sigma_0$  para que a transformada de Laplace unilateral do sinal  $e^{2t}$  convirja? Calculando a transformada de Laplace desse sinal, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{2t}] &= \int_{0_-}^{\infty} e^{2t} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{2t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-(\sigma-2)t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \sigma_0 = 2. \end{aligned}$$

A região de convergência para essa transformada está mostrada na Figura 3.

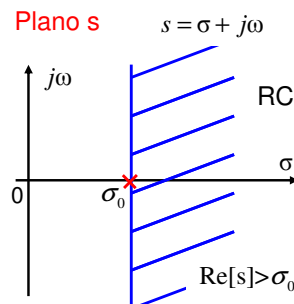


Figura 3: Abscissa de convergência da transformada de Laplace unilateral.

Os sinais  $e^{t^2}$ ,  $e^{e^t}$  e  $t^t$  crescem com uma taxa mais rápida que  $e^{\sigma_0 t}$  e conseqüentemente não possuem transformada de Laplace. Felizmente, esses sinais têm pouca importância na prática. Resumindo, as condições suficientes para a existência da transformada de Laplace unilateral são:

- $f(t)$  contínua e integrável em intervalos;
- $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$ ,  $\forall t \in [0_-, \infty]$  para  $M$  e  $\sigma_0$  reais;
- $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} f(t)$  para algum valor de  $s_0 = \sigma_0 + j\omega$  que é abscissa de convergência da transformada;
- a integral é convergente para  $\text{Re}[s] > \text{Re}[s_0]$ .

É importante observar ainda que a transformada de Laplace unilateral  $F(s)$  tem uma única inversa  $f(t)$  e por isso, não é necessário explicitar a região de convergência. Por essa razão, raramente vamos falar de região de convergência ao longo do texto.

## 4 Transformadas de Laplace úteis em circuitos

Usando a definição (9), pode-se obter algumas transformadas de funções úteis na análise de circuitos elétricos. Essas transformadas estão mostradas na Tabela 1.

Tabela 1: Transformadas de Laplace de funções elementares.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\text{sen}(\omega t)H(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{cos}(\omega t)H(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$kH(t)$	$\frac{k}{s}$	$e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{s + a}$

Usando os pares de transformadas da Tabela 1, podemos derivar transformadas de Laplace de outras funções. Por exemplo, vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \cos(2t + \varphi) = \cos \varphi \cos 2t - \text{sen} \varphi \text{sen} 2t.$$

Como veremos a seguir, a transformada de Laplace atende à propriedade de linearidade. Por isso, podemos calcular

$$F(s) = \cos \varphi \mathcal{L}[\cos 2t] - \text{sen} \varphi \mathcal{L}[\text{sen} 2t] = \frac{s \cos \varphi - 2 \text{sen} \varphi}{s^2 + 4}.$$

## 5 Propriedades

A seguir enumeramos as propriedades básicas da Transformada de Laplace unilateral. As demonstrações dessas propriedades seguem diretamente da definição (9) e por isso não serão mostradas.

P1- A primeira propriedade que segue diretamente da definição (9) é a linearidade, ou seja, a transformada de Laplace de uma combinação linear das funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  é dada pela combinação linear de suas transformadas:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s),$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes reais ou complexas.

P2- Derivada da transformada em relação a  $s$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow -\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}[tf(t)]$$

Essa propriedade é importante para calcularmos a transformada de funções do tipo

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t}$$

com  $k \geq 1$  e inteiro, que podem aparecer em circuitos elétricos. A partir do par de transformadas

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha}$$

e usando essa propriedade, obtemos

$$te^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^2}$$

e

$$\frac{t^2}{2}e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^3}.$$

Aplicando essa propriedade sucessivamente, chegamos a

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^k}.$$

P3- Translação no campo real

$$\mathcal{L}[f(t - a)] = e^{-as}F(s)$$

P4- Translação no campo complexo

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$$

P5- Multiplicação do argumento por constante

$$\mathcal{L}[f(\omega t)] = \frac{1}{\omega}F(s/\omega)$$

P6- Transformada de funções periódicas

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{sT}} \int_{0_-}^T e^{-st} f(t) dt$$

P7- Transformada da derivada de uma função

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}\dot{f}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

Caso particular: condições iniciais nulas

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$$

P8- Transformada da integral de uma função

$$\mathcal{L} \left[ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0-} f(\tau) d\tau}{s}$$

Caso particular: condições iniciais nulas

$$\mathcal{L} \left[ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

## 6 Exemplo – Circuito RLC série

**Exemplo 6.1.** Considere o circuito RLC série da Figura 4 com valores de componentes no sistema de unidades de audiodfrequências, excitado por um gerador de tensão.

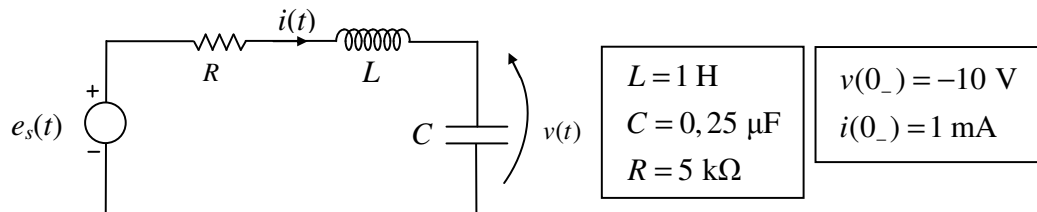


Figura 4: Circuito RLC série.

Aplicando a segunda Lei de Kirchhoff ao laço, obtém-se

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{0-}^t i(\lambda) d\lambda + v(0_-) = e_s(t)$$

Essa equação íntegro-diferencial pode ser transformada em uma equação diferencial de segunda ordem. Derivando ambos os lados em relação a  $t$  e dividindo a equação resultante por  $L$ , obtemos

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{de_s(t)}{dt}.$$

O fator de amortecimento e a frequência própria não amortecida (frequência de ressonância) valem respectivamente

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 2,5 \text{ ms}^{-1} \text{ e } \omega_0 = 2 \text{ krd/s}$$

Vamos estudar o comportamento livre desse circuito ( $e_s(t) = 0$ ). Como  $\alpha > \omega_0$  o circuito livre tem um comportamento super-amortecido. A resolução da equação diferencial no tempo leva à seguinte expressão para a corrente

$$i(t) = e^{-\alpha t} \left[ i_0 \left( \cosh(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \sinh(\beta t) \right) - \frac{v_0}{\beta L} \sinh(\beta t) \right]$$

para  $t \geq 0$ , sendo  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ . No problema,  $\beta = 1,5 \text{ ms}^{-1}$  e a partir de manipulações algébricas chega-se a

$$i(t) = (3e^{-t} - 2e^{-4t})H(t).$$



Vamos agora obter essa expressão usando a transformada de Laplace. Usando a Propriedade P7, a equação diferencial de segunda ordem pode ser descrita no domínio transformado como

$$s^2 I(s) - si(0_-) - \frac{di(0_-)}{dt} + \frac{R}{L} I(s) - \frac{R}{L} s I(s) - \frac{R}{L} i(0_-) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{1}{L} s E_s(s).$$

Dessa equação, obtemos a seguinte expressão para a corrente transformada

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L} s E_s(s) + si(0_-) + \left[ \frac{di(0_-)}{dt} + \frac{R}{L} i(0_-) \right]}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}.$$

Não dispomos da derivada da corrente em  $t = 0_-$ , mas podemos calcular essa condição inicial a partir de  $v(0_-)$ . A partir da equação integro-diferencial, calculada em  $t = 0_-$ , obtemos

$$L \frac{di(0_-)}{dt} + Ri(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_-} i(\lambda) d\lambda + v(0_-) = e_s(0_-).$$

Dessa equação, obtemos

$$\left[ \frac{di(0_-)}{dt} + \frac{R}{L} i(0_-) \right] = -\frac{1}{L} v(0_-).$$

Usando esse resultado, a corrente transformada fica

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L} s E_s(s) + si(0_-) - \frac{1}{L} v(0_-)}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}.$$

Cabe observar que poderíamos obter esse resultado aplicando as Propriedades P7 e P8 diretamente na equação íntegro-diferencial. Isso evitaria o passo adicional de obter a condição inicial da derivada da corrente em função do valor inicial da tensão.

Substituindo os valores dos componentes e das condições iniciais e lembrando que para obter a resposta livre  $E_s(s) = 0$ , chega-se

$$I(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 5s + 4} = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 4)}.$$

O próximo passo é aplicar a transformada inversa para obter a expressão da corrente no tempo. Note que, a corrente transformada pode ser reescrita da forma

$$I(s) = \frac{3}{s + 1} + \frac{-2}{s + 4}.$$

Usando os pares de transformadas da Tabela 1, obtemos

$$i(t) = (3e^{-t} - 2e^{-4t})H(t),$$

que coincide com o resultado da resolução da equação diferencial. O gráfico dessa corrente ao longo do tempo está mostrado na Figura 5.

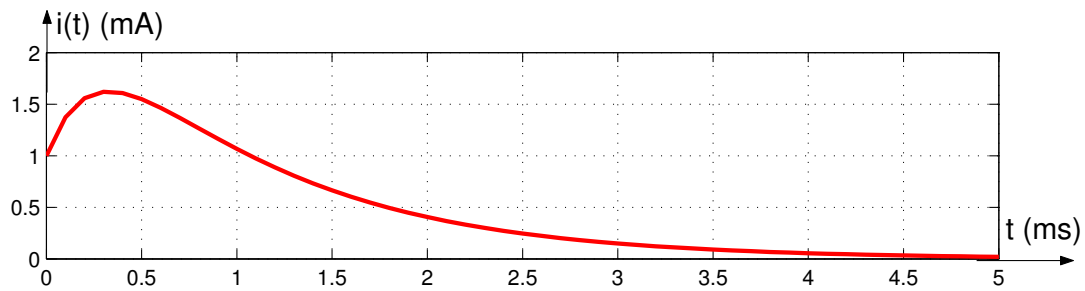


Figura 5: Corrente do circuito RLC série da Figura 4; comportamento livre.

## 7 A transformada inversa de Laplace

Até agora vimos como calcular a transformada de Laplace unilateral e sua aplicação para resolver equações diferenciais. Como calcular a transformada inversa? Como reescrever uma expressão racional no domínio transformado como uma soma de frações parciais como fizemos no exemplo anterior? Vamos responder essas perguntas a seguir.

### 7.1 Tabelas de transformadas e propriedades

Lembrando que a transformada de Laplace unilateral é unívoca e linear, podemos anti-transformá-la usando tabelas de pares de transformadas e de propriedades. Vamos ver isso no próximo exemplo.

**Exemplo 7.1.** *Vamos anti-transformar a função racional*

$$F(s) = \frac{s+5}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2}.$$

Usando o seguinte resultado

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^k},$$

por inspeção visual obtemos  $f(t) = (e^{-2t} + 3te^{-2t})H(t)$ .

### 7.2 Fórmula de inversão

A transformada de Laplace inversa pode ser calculada a partir da fórmula de inversão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds.$$

Para isso, devemos calcular a integral no campo complexo, o que muitas vezes é complicado. Por isso, o uso da fórmula de inversão é evitado em geral, principalmente porque a maior parte das transformadas que aparecem em circuitos elétricos são funções racionais.

### 7.3 Transformada inversa de funções racionais

As transformadas que aparecem em circuitos elétricos são funções racionais do tipo

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n},$$

em que  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  são constantes reais e  $a_0 \neq 0$  e  $b_0 \neq 0$ . Se  $n > m$  então  $F(s)$  é uma *função racional estritamente própria* e pode ser expandida em frações parciais. Se  $n \leq m$  então  $F(s)$  deve ser reduzida em uma função polinomial mais um resto que é uma função racional estritamente própria, obtido a partir de divisão de polinômios. Neste caso, o resto da divisão pode ser expandido em frações parciais como veremos mais adiante.

#### 7.3.1 Definição de polos e zeros

Uma função racional pode ser fatorada da seguinte forma

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad (13)$$

em que  $K = b_0/a_0$  é um fator de escala,  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são os zeros (raízes do polinômio do numerador,  $N(s)$ ) e  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  são os polos (raízes do polinômio do denominador). Uma função racional é descrita completamente a partir dos polos, zeros e do fator de escala, como veremos no exemplo seguinte.

**Exemplo 7.2.** *Seja*

$$F(s) = 10 \frac{s^2 + 3s}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 5}$$

uma função racional no domínio da transformada complexa  $s$ . Determine os polos, zeros e represente-os no plano  $s$ . A função  $F(s)$  pode ser fatorada na forma (13), ou seja,

$$F(s) = 10 \frac{s(s+3)}{(s+1)^2(s+2-j)(s+2+j)},$$

de onde podemos identificar os polos  $p_{1,2} = -1$  e  $p_{3,4} = -2 \pm j$ , os zeros  $z_1 = 0$  e  $z_2 = -3$  e o fator de escala  $K = 10$ . O diagrama de polos e zeros está mostrado na Figura 6.

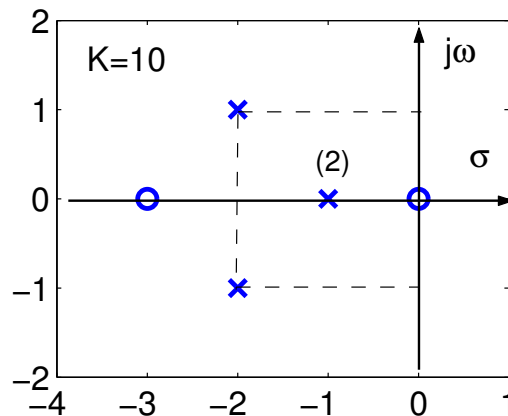


Figura 6: Diagrama de polos e zeros da função  $F(s)$ .

## 7.4 Inversa de funções racionais estritamente próprias

As funções racionais estritamente próprias ( $n > m$ ) podem ser expandidas em frações parciais da forma

$$F(s) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} A_{kj} \frac{1}{(s - p_j)^k}$$

em que  $A_{kj}$  são coeficientes reais ou complexos chamados de *resíduos*  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  são os polos de  $F(s)$ , cada um deles com multiplicidade  $m_j$  de modo que  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ .

Reescrever a função  $F(s)$  dessa forma é conveniente pois sabemos que

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(s - \alpha)^k}.$$

Como calcular os resíduos? Vamos estudar o cálculo dos resíduos através de vários exemplos. As constas serão conferidas com a função `residue.m` do Matlab.

**Exemplo 7.3. Polos simples e reais.** Vamos obter a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+2s} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}.$$

com polos  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$  e  $p_3 = -2$  e zero  $z_1 = -3$ . A expansão em frações parciais dessa função é dada por

$$F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}.$$

O resíduo  $A_1$  pode ser calculado, multiplicando a expansão em frações parciais de  $F(s)$  por  $s$  e calculando a expressão resultante em  $s = 0$ , ou seja,

$$A_1 = F(s)s|_{s=0} = \left[ A_1 + \frac{A_2 s}{s+1} + \frac{A_3 s}{s+2} \right]_{s=0} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = 1,5.$$

O resíduo  $A_2$ , por sua vez, pode ser calculado como

$$A_2 = F(s)(s+1)|_{s=-1} = \left[ \frac{A_1(s+1)}{s} + A_2 + \frac{A_3(s+1)}{s+2} \right]_{s=-1} = -2 = \frac{s+3}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -2.$$

Por fim, o resíduo  $A_3$  é calculado de forma análoga, ou seja,

$$A_3 = F(s)(s+2)|_{s=-2} = \left[ \frac{A_1(s+2)}{s} + \frac{A_2(s+2)}{s+1} + A_3 \right]_{s=-2} = \frac{s+3}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = 0,5.$$

Dessa forma, a expansão em frações parciais de  $F(s)$  se reduz a

$$F(s) = \frac{1,5}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{0,5}{s+2},$$

cuja transformada inversa é dada por

$$f(t) = [1,5 - 2e^{-t} + 0,5e^{-2t}] H(t).$$

Podemos obter esses resíduos usando a função `residue.m` do Matlab. Entrando com os coeficientes do polinômio do numerador e do denominador, obtemos os resíduos na variável  $R$ , os polos na variável  $P$  e coeficientes na variável  $K$ , que aparecem caso a função não seja estritamente própria. Ou seja, a expansão em frações parciais é do tipo

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R(1)}{s - P(1)} + \frac{R(2)}{s - P(2)} + \dots + \frac{R(n)}{s - P(n)} + K(s)$$

Para o nosso exemplo, obtemos

$$b = [1, 3];$$

$$a = [1, 3, 2, 0];$$

$$[R, P, K] = \text{residue}(b, a)$$

$$R =$$

$$0.5000$$

$$-2.0000$$

$$1.5000$$

$$P =$$

$$-2$$

$$-1$$

$$0$$

$$K = []$$

**Exemplo 7.4. Polos simples e complexos conjugados.** Quando há polos complexos conjugados  $p_k$  e  $p_k^*$ , uma parcela da expansão em frações parciais de  $F(s)$  é dada por

$$F_k(s) = \frac{A_k}{s - p_k} + \frac{A_k^*}{s - p_k^*},$$

sendo  $A_k = |A_k|e^{j\phi_k}$  e  $A_k^* = |A_k|e^{-j\phi_k}$  resíduos que também são complexos conjugados e estão relacionados ao polos  $p_k = \sigma_k + j\omega_k$  e  $p_k^* = \sigma_k - j\omega_k$ , respectivamente. A transformada inversa de  $F_k(s)$  é dada por

$$f_k(t) = A_k e^{p_k t} + A_k^* e^{p_k^* t} = 2\text{Re}\{A_k e^{p_k t}\}.$$

Usando a descrição do polo  $p_k$  em parte real e imaginária e do resíduo  $A_k$  em módulo e fase, podemos reescrever essa função como

$$f_k(t) = 2|A_k|e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

Vamos então calcular a transformada inversa da função

$$F(s) = 20 \frac{s + 3}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10}.$$

Usando a função `residue.m` do Matlab obtemos

```
b=20*[1 3];
a=[ 1    5    13    19    10];
```

```
[R,P,K]=residue(b,a)
```

```
R =
-3.0000 + 1.0000i
-3.0000 - 1.0000i
-4.0000
10.0000
```

```
P =
-1.0000 + 2.0000i
-1.0000 - 2.0000i
-2.0000
-1.0000
```

```
K = []
```

Novamente, a variável  $K$  é vazia pois  $F(s)$  é uma função racional estritamente própria. Neste caso temos dois polos complexos conjugados e dois reais e um zero real, como podemos ver no diagrama de polos e zeros de  $F(s)$  e no gráfico do  $|F(s)|$  em função da parte real  $\sigma$  e parte imaginária  $\omega$  da variável complexa  $s$ , mostrados nas Figuras 7 e 8, respectivamente. Na Figura 7, a reta tracejada indica a abscissa de convergência de  $F(s)$ .

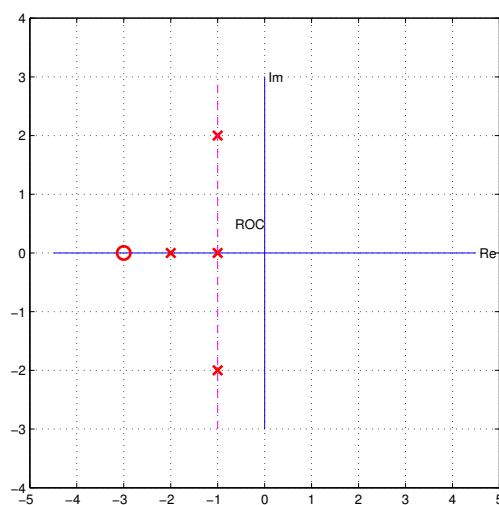


Figura 7: Diagrama de polos e zeros da função  $F(s)$ .

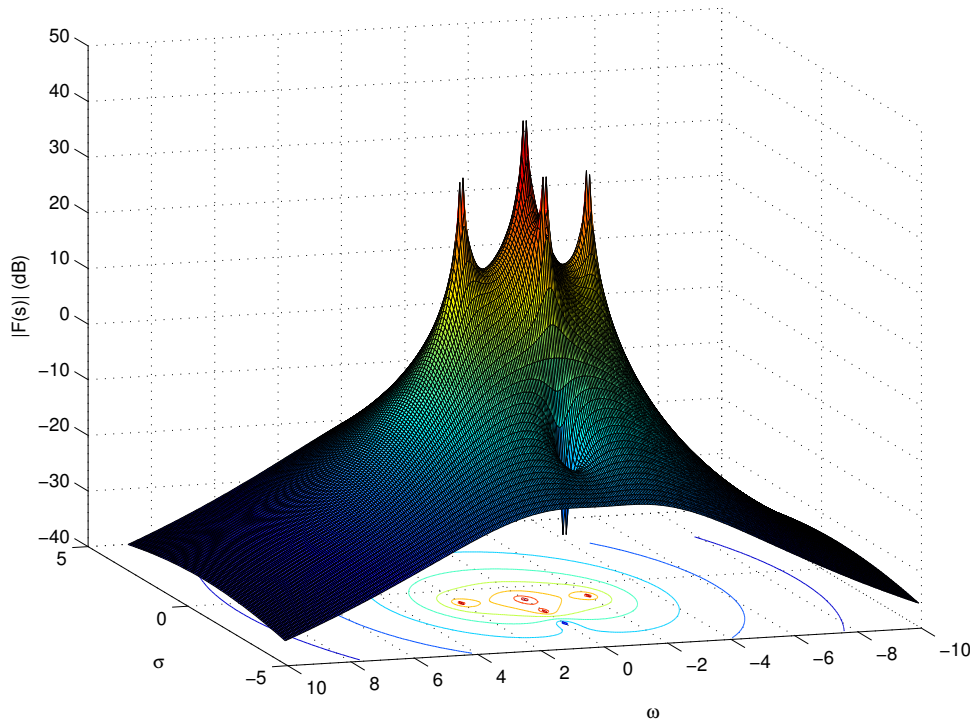


Figura 8: Módulo de  $F(s)$  em dB em função da parte real  $\sigma$  e parte imaginária  $\omega$  da variável complexa  $s$ .

Usando os resultados da função `residue.m`, a expansão em frações parciais de  $F(s)$  é dada por

$$F(s) = \frac{\sqrt{10}e^{j161,6^\circ}}{s+1-2j} + \frac{\sqrt{10}e^{-j161,6^\circ}}{s+1+2j} + \frac{-4}{s+2} + \frac{10}{s+1}.$$

Usando o resultado anterior para anti-transformar parcelas complexas conjugadas, obtém-se

$$f(t) = \left[ 2\sqrt{10}e^{-t} \cos(2t + 161,6^\circ) - 4e^{-2t} + 10e^{-t} \right] H(t).$$

**Exemplo 7.5. Polos múltiplos.** Neste exemplo vamos calcular a inversa de uma função racional estritamente própria que tem polos múltiplos. Seja a seguinte função racional estritamente própria

$$F(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+s} = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

com zero  $z_1 = -2$  e polos em  $p_1 = 0$  e  $p_2 = p_3 = -1$  (multiplicidade 2). A decomposição em frações parciais dessa função é dada por

$$F(s) = \frac{A_{11}}{s} + \frac{A_{12}}{(s+1)} + \frac{A_{22}}{(s+1)^2}.$$

Os resíduos  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são calculados como nos casos anteriores, ou seja

$$A_{11} = sF(s)|_{s=0} = 2$$

$$A_{22} = (s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = -1.$$

Com os valores de  $A_{11}$  e  $A_{22}$ , é possível calcular o resíduo  $A_{12}$  igualando a expansão em frações parciais a  $F(s)$ , ou seja,

$$\frac{A_{11}(s+1)^2 + A_{12}(s+1) + A_{22}s}{s(s+1)^2} = \frac{s+2}{s(s+1)^2}.$$

Os numeradores dessas funções racionais devem ser iguais para todo  $s$  na região de convergência de  $F(s)$ . Em particular para  $s = 1$ , obtemos

$$2(2)^2 + A_{12}(2)1 + (-1)1 = 3 \Rightarrow 2A_{12} = -4 \Rightarrow A_{12} = -2.$$

Assim, a expansão em frações parciais fica

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+1)^2}$$

e a transformada inversa é dada por

$$f(t) = [2 - 2e^{-t} - te^{-t}]H(t).$$

Usando a função `residue.m` do Matlab, obtemos

```
b=[1, 2];
```

```
a=[1, 2, 1, 0];
```

```
[R,P,K]=residue(b,a)
```

```
R =
```

```
-2
```

```
-1
```

```
2
```

```
P =
```

```
-1
```

```
-1
```

```
0
```

```
K = []
```

É importante observar que no caso em que um polo

$$P(j) = \dots = P(j+m-1)$$

aparece com multiplicidade  $m$ , a expansão em frações parciais inclui termos da forma

$$\frac{R(j)}{s - P(j)} + \frac{R(j+1)}{(s - P(j))^2} + \dots + \frac{R(j+m-1)}{(s - P(j))^m}$$

Usando essa expressão podemos identificar os resíduos e relacioná-los com os termos da expansão.



## 7.5 Inversa de funções racionais impróprias

Quando o grau do numerador da função racional é maior ou igual que o grau do denominador  $m \geq n$ , temos uma função racional imprópria. Neste caso, antes de fazer a expansão em frações parciais, devemos fazer uma divisão de polinômios de modo a escrever a função  $F(s)$  como a soma de um polinômio em  $s$  e uma função racional estritamente própria.

**Exemplo 7.6.** *Vamos anti-transformar a função imprópria*

$$F(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

*Devemos fazer primeiramente uma divisão de polinômios até obtermos uma função estritamente própria. Dessa forma, chega-se a*

$$F(s) = s + 2 + \frac{-4s^2 - s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

*Usando a função `residue.m` do Matlab, obtemos*

```
b=[1 5 4 3 1];
```

```
a=[1 3 2 0];
```

```
[R,P,K]=residue(b,a)
```

```
R =
```

```
-6.5000
```

```
2.0000
```

```
0.5000
```

```
P =
```

```
-2
```

```
-1
```

```
0
```

```
K =
```

```
1
```

```
2
```

*Neste caso, a variável  $K$  não é vazia e corresponde aos coeficientes do polinômio  $s + 2$  que aparece em  $F(s)$ , através da divisão de polinômios. Os resíduos e os polos obtidos com essa função correspondem à expansão em frações parciais da parcela estritamente própria de  $F(s)$ .*

*Assim,*

$$F(s) = s + 2 + \frac{-6,5}{s + 2} + \frac{2}{s + 1} + \frac{0,5}{s}.$$

*Para transformar a parcela  $s$  devemos lembrar que a transformada do impulso  $\delta(n)$  é igual a 1. Usando a Propriedade P7, obtemos*

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^{(n)}\delta(n)}{dt} \right] = s^n.$$

Assim,  $f(t)$  é dado por

$$f(t) = \frac{d\delta(n)}{dt} + 2\delta(n) + 0,5u(n) + 2e^{-t}u(n) - 6,5e^{-2t}u(n).$$

## Referências

- [1] OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. *Signals and Systems*, Prentice Hall, 2ª edição, 1997.
- [2] LATHI B. P., *Linear systems and signals*, Oxford, 2ª edição, 2005.
- [3] ORSINI, L. Q.; CONSONNI, D. *Curso de Circuitos Elétricos*, Edgard Blucher, vol.1, 2ª edição, 2002.
- [4] NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Riedel Electric Circuits*, 7ª edição, Prentice Hall, 2004.
- [5] HAYKIN, S.; VAN VEEN, B. *Signals and Systems*, 2ª edição, Wiley, 2002