

Coordenadas Polares

Física 1

28 de Março de 2019

Há algumas repetições com outras textos... mas é só para complementar a aula de 28 de Março.

1 Fórmulas básicas de cálculo usadas na aula

Derivada de um produto:

$$\frac{d(ab)}{dt} = \frac{d(a)}{dt}b + a\frac{d(b)}{dt} \quad (1)$$

(2)

Suponha que temos uma função $f_3(t) = a_1(t)a_2(t)a_3(t)$. Qual é derivada de $f_3(t)$?

(Para aqueles que estão inspirados, generalize: defina o produto $f_n(t) = \prod_{i=1}^n a_i(t)$ e encontre a sua derivada com respeito a t .)

Derivada de uma função de função, regra da cadeia. A grandeza y é dada como função de x , que por sua vez é função de t . Assim $y(t) = y(x(t))$. A derivada de y com respeito a t é dada por

$$\frac{d(y)}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

(4)

1.1 Algumas propriedades de vetores

1.1.1 Base Cartesiana em 3 dimensões

$$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \quad (5)$$

1.1.2 Produto escalar

O ponto $\cdot$ denota um produto escalar entre dois vetores (vetores podem ser multiplicados por números mas não colocamos o ponto).

$$0 = \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} \quad (6)$$

$$1 = \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} \quad (7)$$

As componentes de um vetor $\vec{A}$ numa base cartesiana são

$$A_x = \hat{A} \cdot \hat{i} \quad (8)$$

$$A_y = \hat{A} \cdot \hat{j} \quad (9)$$

$$A_z = \hat{A} \cdot \hat{k} \quad (10)$$

$$(11)$$

Produto escalar entre dois vetores $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é dado em termos das suas componentes

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (12)$$

O módulo de um vetor $\vec{A}$ será escrito como $|\vec{A}|$ ou simplesmente A e é dado por

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\hat{A} \cdot \hat{A}} \quad (13)$$

$$A^2 = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z \quad (14)$$

$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (15)$$

Se um vetor satisfaz $\vec{A} = 0$, todas as suas componentes são nulas.

2 coordenadas polares

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (16)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (17)$$

$$(18)$$

as derivadas temporais

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} \quad (19)$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{i} - \dot{\theta} \sin \theta \hat{j} \quad (20)$$

$$(21)$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (22)$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r \quad (23)$$

assim temos velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \quad (24)$$

$$= \frac{d(r\hat{e}_r)}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \quad (25)$$

$$= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (26)$$

e a aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \quad (27)$$

$$= \frac{d(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)}{dt} = \quad (28)$$

$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta = \quad (29)$$

$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{e}_\theta) + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{e}_r) \quad (30)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \quad (31)$$

Se a força for escrita na forma

$$\vec{F} = f\hat{e}_r + g\hat{e}_\theta$$

onde f e g são funções que podem depender de algum conjunto de variáveis (e.g. r, θ e derivadas) então as equações de movimento serão:

$$\begin{aligned} f &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \\ g &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}). \end{aligned} \quad (32)$$

Se a componente "angular" g (na direção de $\hat{e}_\theta$) for nula a força é dita central pois aponta ao longo da linha entre a partícula e o centro das coordenadas. A equação 32 leva a

$$\begin{aligned} 0 &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \\ 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

e portanto a

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \quad (34)$$

mas vocês vão aprender mais sobre isso depois. Mas veja figura abaixo.....

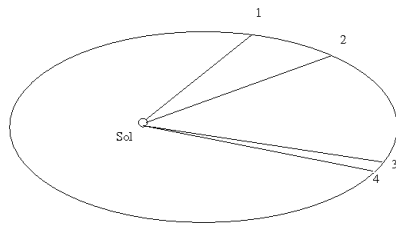


Figura 1: Um exemplo é a força central gravitacional. A área varrida pelo raio vetor para pequenos ângulos $dA \sim \frac{1}{2}r^2d\theta$. Portanto, no limite de $dt \rightarrow 0$, vale $dA/dt = \frac{1}{2}r^2d\theta/dt = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ Mais sobre isso quando for introduzido o conceito de momento angular, que é constante.