

Problema 7.34 do livro D. J. Griffiths - Electrodinâmica

Dados os campos elétrico e magnético

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \Theta(vt - r) \hat{e}_r; \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

em coordenadas esféricas;



$$\Theta(z) = 1, \text{ se } z > 0; \quad \Theta(z) = 0, \text{ se } z < 0,$$

$$\frac{d\Theta(z)}{dz} = \delta(z)$$

<http://math.mit.edu/~hrm/18.031/stepanddelta.pdf>

- a) Provar que eles satisfazem as Equações de Maxwell;
- b) Determinar a densidade de carga, ρ , e a densidade de corrente, $\vec{j}$, que criam estes campos;
- c) Descrever a situação física em que estes campos aparecem

Da definição de $\Theta(z) \rightarrow \vec{E}(z = vt - r) \neq 0$ se $z > 0 \rightarrow r < vt$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[\Theta(z) \frac{\hat{e}_r}{r^2} \right]$$

Relação vetorial:

$$\nabla \cdot (\phi \vec{V}) = \phi \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \phi$$

Portanto

$$\nabla \cdot \left[\Theta(z) \frac{\hat{e}_z}{r^2} \right] = \Theta(z) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{e}_r}{r^2} \right) + \frac{\hat{e}_r}{r^2} \cdot \nabla \Theta(z)$$

Na revisão de métodos matemáticos vimos que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{e}_r}{r^2} \right) = -\nabla \cdot \left[\nabla \frac{1}{r} \right] = -\nabla^2 \frac{1}{r} = -[-4\pi\delta(\vec{r})] = 4\pi\delta(\vec{r})$$

Em coordenadas esféricas

$$\nabla \Theta(z) = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{d\Theta}{dz} \hat{e}_r = -\delta(vt - r) \hat{e}_r$$

Então

$$\nabla \cdot \vec{E} = \Theta(vt - r) 4\pi \delta(\vec{r}) \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \delta(vt - r) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

portanto,

$$\rho(\vec{r}, t) = -q\delta(\vec{r})\Theta(t) + \frac{q}{4\pi r^2} \delta(vt - r)$$

No primeiro termo escrevemos $\Theta(t)$ porque a função $\delta(\vec{r}) = 0$ para $r \neq 0$.

$$\nabla \times \vec{E} = \left[\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \times \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \Theta(vt - r) \hat{e}_r \right]$$

mas,

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta; \quad \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \hat{e}_\varphi \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Finalmente,

$$\vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \rightarrow \vec{j} = -\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{qv}{4\pi r^2} \delta(vt - r) \hat{e}_r$$

Situação física

No instante $t = 0$ surge uma carga $-q$ na origem e outra $+q$ que se desloca radialmente com velocidade v , distribuída uniformemente sobre uma superfície esférica de raio r . O campo elétrico $\vec{E}$ aponta radialmente para a origem.

