Robôs Móveis

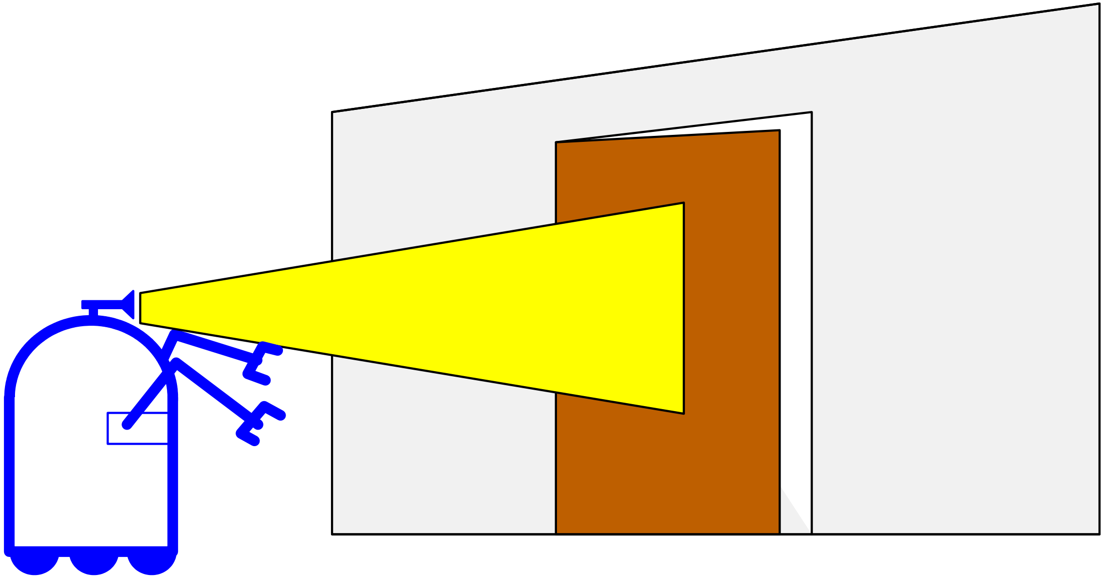
Estimadores Bayesianos de Estado e o Filtro de Kallman

Estimação Bayesiana de Estado

$$P(x|y,z)=\frac{P(y|x,z)\ P(x|z)}{P(y|z)}$$

Estimação Bayesiana de Estado

Exemplo:



Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

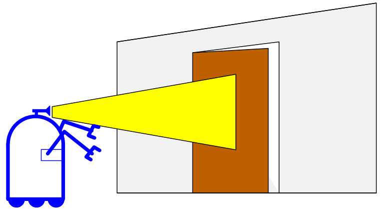
- *p(aberta|z) é* diagóstica.
- *p(z|aberta) é* causal.
- Conhecimento causal é mais facilmente obtido.
- Regra de Bayes permite obter diagnóstico de conhecimento causal.

$$P(x|y,z)=\frac{P(y|x,z)\;P(x|z)}{P(y|z)}$$

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

- $P(z|aberta) = 0.6$ $\quad$ $P(z|\neg aberta) = 0.3$
- $P(aberta) = P(\neg fechada) = 0.5$



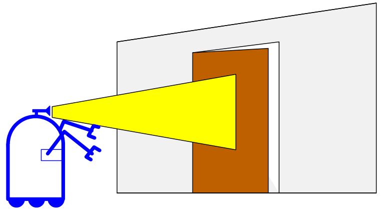
$$P(aberta|z) = \frac{P(z|aberta)P(aberta)}{P(z|aberta)p(aberta) + P(z|\neg aberta)p(\neg aberta)}$$

$$P(aberta|z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{2}{3} = 0.67$$

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

- Suponha uma sequência de leituras,
  $z_1, z_2, \ldots, z_n$



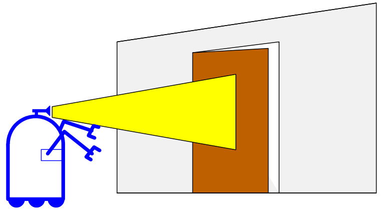
- Como estimar $p(x_n \mid z_1, z_2, \ldots, z_n)$?

$$P(x \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1, \ldots, z_{n-1})\, P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

- Hipótese de Markov: O estado é **completo.**
- A probabilidade de z_n dado x_{n-1} é *independente* de z_1, z_2, …, z_n



$$P(x|z_1,\ldots,z_n) = \frac{P(z_n|x)\, P(x|z_1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\ldots,z_{n-1})}$$

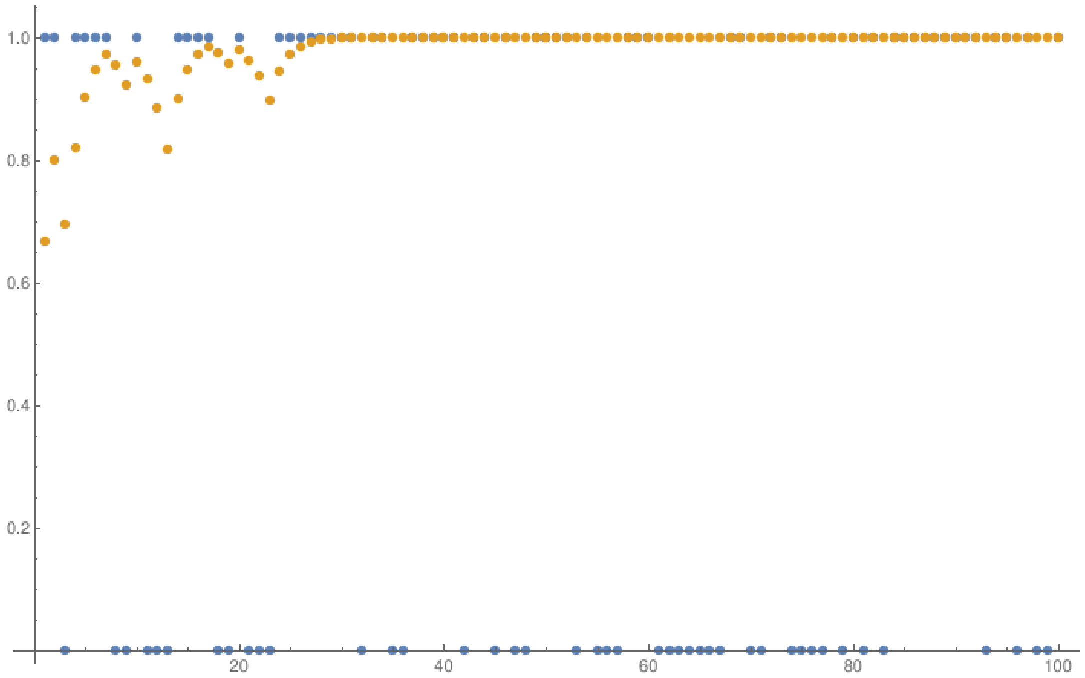
$$= \eta\, P(z_n|x)\, P(x|z_1,\ldots,z_{n-1})$$ ¿

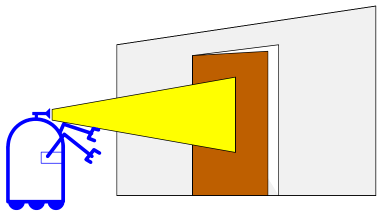
$$= \eta_{1\ldots n} \prod_{i=1\ldots n} P(z_i|x)\, P(x)$$

¿

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

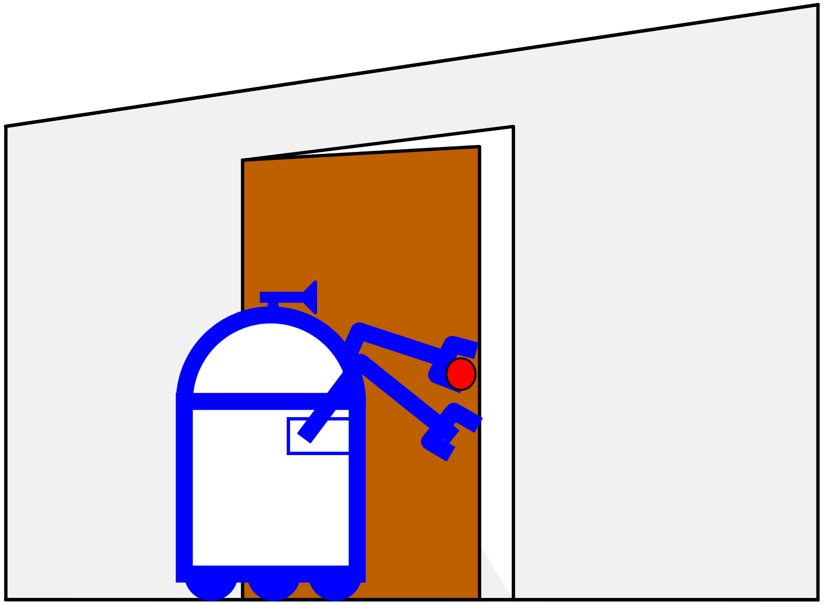




Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

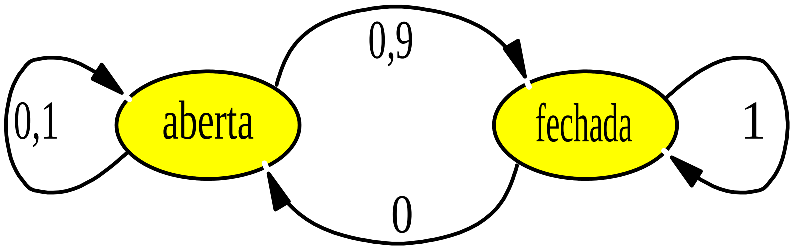
- Ações do robô



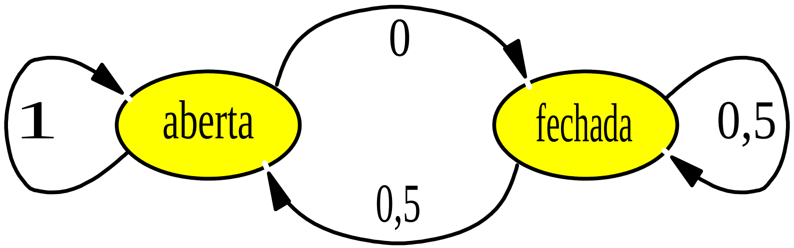
Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

- Ações do robô



Fechar



abrir

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

- Integrando ações do robô

$$P(x|u) = \int P(x|u, x')P(x')dx'$$

$$P(x|u) = \sum P(x|u, x')P(x')$$

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

$$
\begin{aligned}
P(fechada \mid fechar) &= \sum P(fechada \mid fechar, x')P(x') \\
&= P(fechada \mid fechar, aberta)P(aberta) \\
&\quad + P(fechada \mid fechar, fechada)P(fechada) \\
&= \frac{9}{10} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(open \mid u) &= \sum P(aberta \mid fechar, x')P(x') \\
&= P(aberta \mid fechar, aberta)P(aberta) \\
&\quad + P(aberta \mid fechar, fechada)P(fechada) \\
&= \frac{1}{10} \times \frac{5}{8} + \frac{0}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16} \\
&= 1 - P(fechada \mid fechar)
\end{aligned}
$$

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

- **Dados:**
  - Observações z e ações *u:*
  - Modelo Sensorial
  - Modelo de transição
  - *Conhecimento a priori*
- **O que se quer:**
  - Estimativa do estado *X* para um sistema dinâmico.
  - A distribuição *a posteriori* do estado do sistema, ou Crença

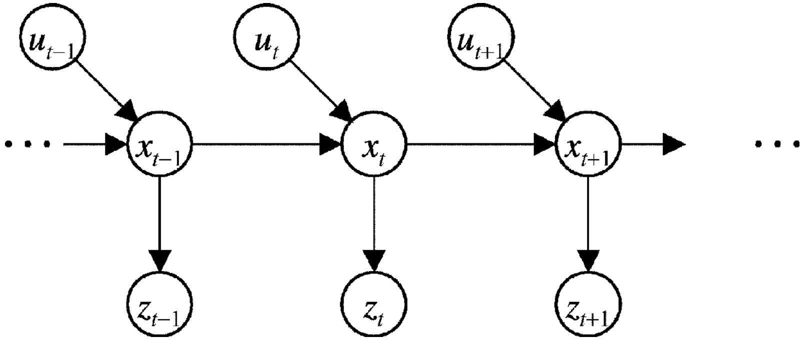
Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

Hipótese de Markov

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

$$p(x_t | x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$



Hipóteses subjacentes

- Sistemas autônomos (transições de probabilidade constantes)
- Ruído *independente*
- Modelos perfeitos, não há erros de aproximação

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

Algoritmo geral para quantidade finita de estados

$Bel_t(x)$ é a função "crença". Representa a probabilidade do estado adotar o valor x no instante t depois de conhecida a medição z_t. $\overline{Bel_t}(x)$ representa a mesma "crença" *sem* o conhecimento de z_t. A função $P(x \mid u_t, x')$ é a probabilidade do sistema passar do estado x' ao estado x. A função $P(z_t \mid x)$ é a probabilidade de se obter a medida z_t dado que o estado é x.

$$Bel'_t(x) = P(z_t \mid x)\,\overline{Bel_t}(x)$$

$$\overline{Bel_t}(x) = \sum_{x'} P_t(x \mid u_t, x')\, Bel_{t-1}(x')$$

$$\eta_t = \sum_x Bel'(x)$$

$$Bel(x) = \eta_t^{-1} Bel'(x)$$

Estimação Bayesiana de Estado

$$Bel(x_t) = \eta \, P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) \, Bel(x_{t-1}) \, dx_{t-1}$$

- Filtros de Kalman
- Filtros de Partículas
- Modelos de Markov ocultos
- Redes Bayesianas dinâmicas
- Processos Decisórios de Markov Parcialmente Observáveis (POMDPs)

Thrun, S. Burgard, W. Fox, D., Prob. Robotics

Estimação Bayesiana de Estado

Sistemas a eventos discretos.
Variáveis contínuas x_t com valores definidos em instantes discretos.

Seja um sistema estocástico com estado x_t, sujeito a entradas u_t e observado por observações z_t.

A *crença* na variável x_t denotada $bel(x_t)$ é a distribuição de probabilidades dado o conhecimento disponível do sistema.

Estimação Bayesiana de Estado

Crença *a posteriori* no estado do sistema.

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

Crença *a priori* no estado do sistema.

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Estimação Bayesiana de Estado

Passo de *previsão*.

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid x_{t-1}, u_t,)\, bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

Passo de *correção*.

$$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$$

Propriedades de dist. Normais:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu, \Sigma) \\ Y = AX + B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \; p(X_1) \cdot p(X_2) \sim N\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_2, \quad \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}} \right)$$

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

x_t Vetor de estado do sistema

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

A_t Matriz de transição do sistema

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

B_t Matriz de atuação sobre o sistema

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

u_t Vetor de atuação sobre o sistema

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

ϵ_t ruído de processo do sistema, média nula, cov. R

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

z_t Medição do sistema

Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

C_t Matriz de medição do sistema

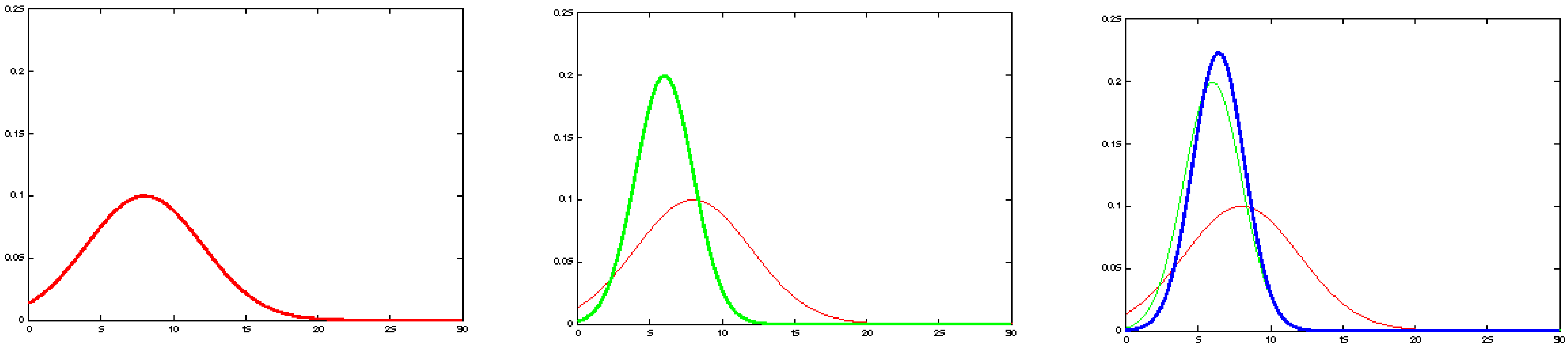
Sistemas estocásticos lineares em tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

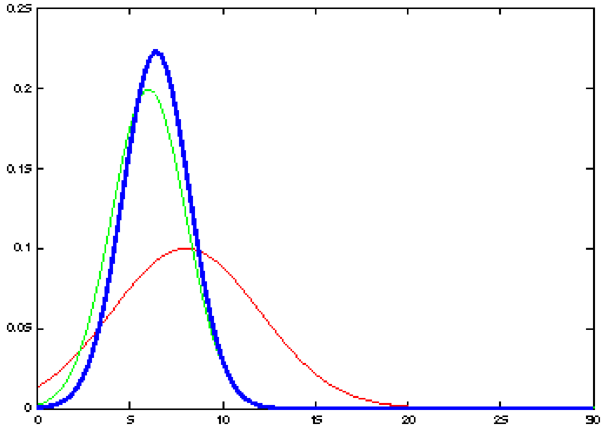
δ_t ruído de medição do sistema, média nula, cov. Q

Evolução da crença, exemplo 1d

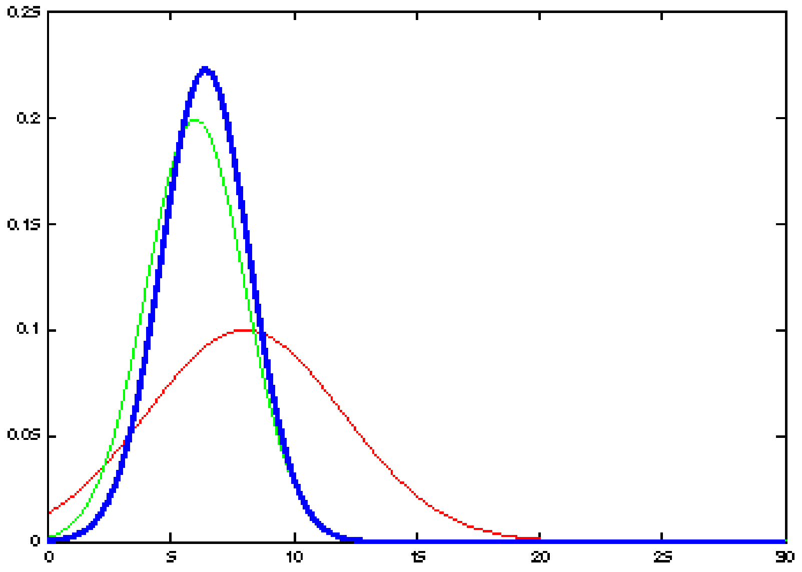


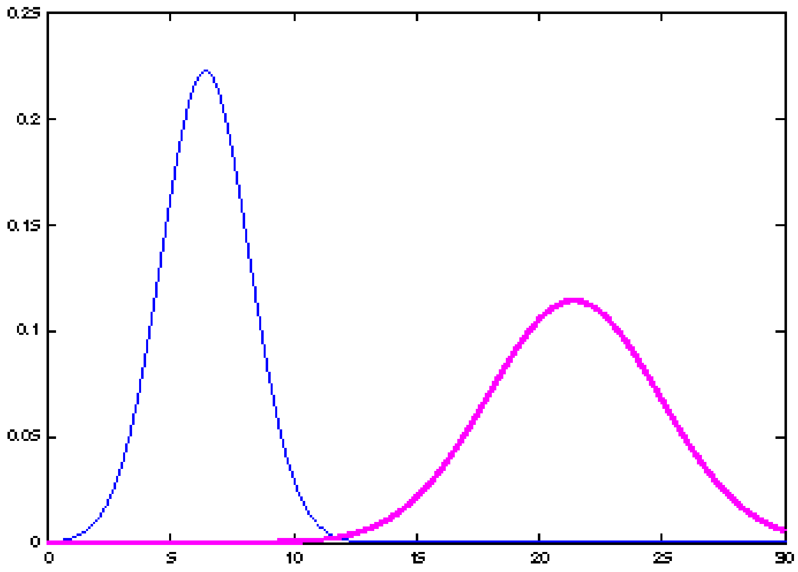
Evolução da crença, exemplo 1d

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{cases} \quad \text{com} \quad K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_{obs,t}^2}$$



Evolução da crença, exemplo 1d





$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \bar{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$

Sistemas lineares Gaussianos em tempo discreto

$$\boxed{x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = N(A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t)}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \qquad bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \quad \sim N(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$$

Sistemas lineares Gaussianos em tempo discreto

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1} (x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1})\right\} dx_{t-1}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

Sistemas lineares Gaussianos em tempo discreto

$$\boxed{z_t = C_t x_t + \delta_t}$$

$$\boxed{p(z_t | x_t) = N(z_t ; C_t x_t , Q_t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} bel(x_t) = \eta & p(z_t | x_t) & & \overline{bel}(x_t) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & \sim N(z_t ; C_t x_t , Q_t) & & \sim N(x_t ; \bar{\mu}_t , \bar{\Sigma}_t) \end{array}}$$

Sistemas lineares Gaussianos em tempo discreto

$$bel(x_t) = \eta \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1}(z_t - C_t x_t)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - \bar{\mu}_t)^T \bar{\Sigma}_t^{-1}(x_t - \bar{\mu}_t)\right\}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases} \quad \text{com} \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

Matriz de Ganho de Kallman.
O quanto a medida z_t afeta a crença no estado atual.

O Filtro de Kallman

1. Algoritmo **Kalman_filter**

2. Previsão
3. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$

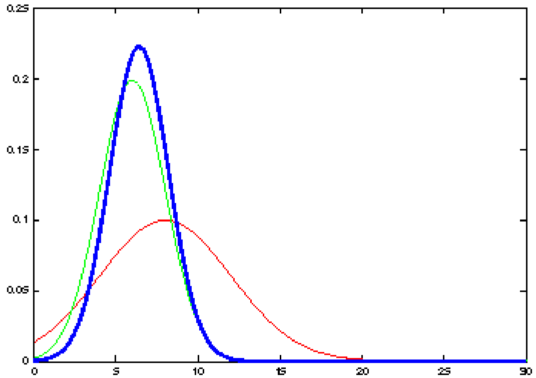
5. Correção
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t \right)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t \left(z_t - C_t \bar{\mu}_t \right)$
8. $\Sigma_t = \left(I - K_t C_t \right) \bar{\Sigma}_t$
9. Retorne

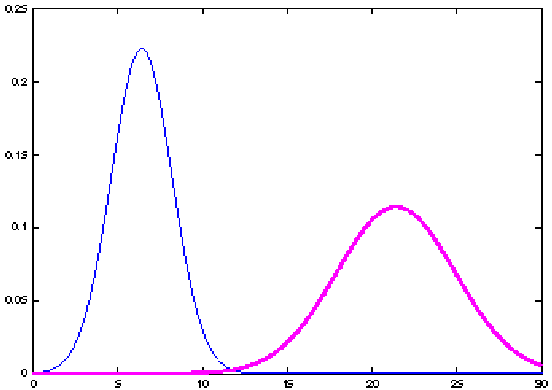
$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t \right)^{-1}$$

Matriz de Ganho de Kallman. O quanto a medida z_t afeta a crença no estado atual.

O Filtro de Kallman

Previsão





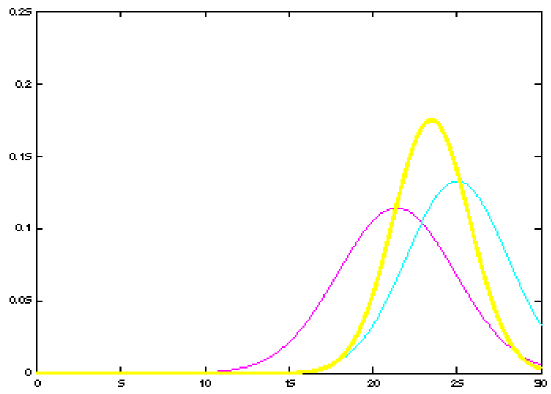
$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = a_t \mu_{t-1} + b_t u_t \\ \bar{\sigma}_t^2 = a_t^2 \sigma_t^2 + \sigma_{act,t}^2 \end{cases}$$

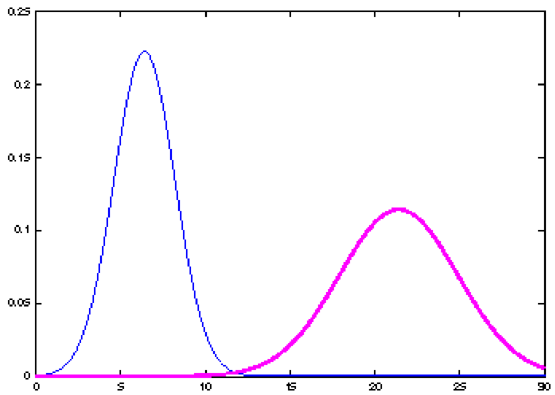
$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

O Filtro de Kallman

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \bar{\mu}_t) \\ \sigma_t^2 = (1 - K_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{cases}, K_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2}{\bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_{obs,t}^2}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_tC_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases}, K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$





O Filtro de Kallman

- Muito eficiente
- Obtém a estimativa *Ótima para sistemas gaussianos lineares*
- Quase todos os robôs são não-lineares...

O Filtro de Kallman

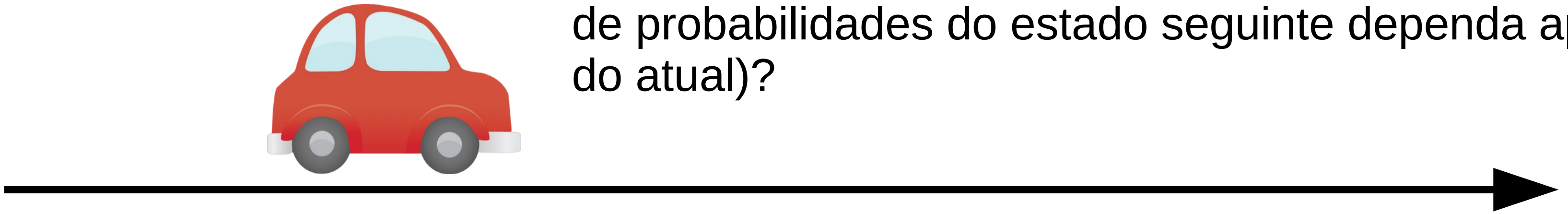
Exemplo: Veículo em espaço de uma dimensão (Exercício 1, Cap. 3 Prob. Robotics)

Tempo $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t\ldots$ com $\Delta t = 1$
Posição no instante t: x_t. Velocidade: $\dot{x}_t$. Aceleração: $\ddot{x}_t \leftarrow$ Gaussiana, Média nula e cov. $\sigma^2=1$

O Filtro de Kallman

Exemplo: Veículo em espaço de uma dimensão (Exercício 1, Cap. 3 Prob. Robotics)

a) Qual o conjunto *mínimo* de variáveis de estado para que o sistema seja Markoviano (ou seja, a distribuição de probabilidades do estado seguinte dependa apenas do atual)?



$$x_t = x_{t-1} + \dot{x}_{t-1}\Delta t + \frac{\ddot{x}_t \Delta t^2}{2} + O(\Delta t^2)$$

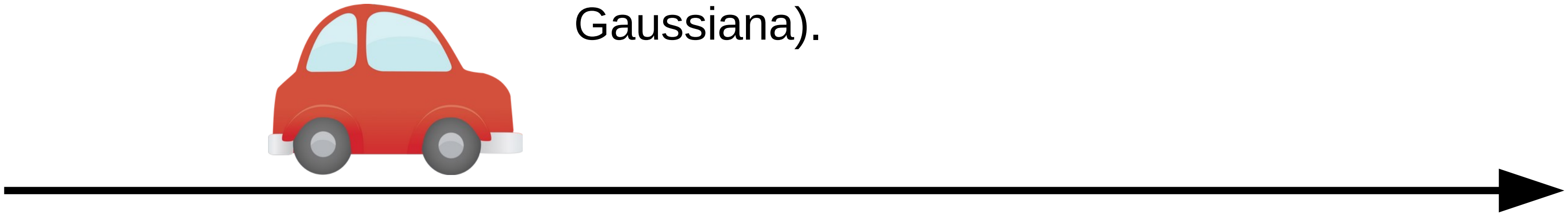
$$\dot{x}_t = \dot{x}_{t-1} + \ddot{x}_t \Delta t + O(\Delta t^2)$$

A aceleração é um *ruído de processo* neste sistema, portanto não faz parte do estado. As variáveis de posição e velocidade definem o estado Markoviano do sistema.

O Filtro de Kallman

Exemplo: Veículo em espaço de uma dimensão (Exercício 1, Cap. 3 Prob. Robotics)

b) Determine a distribuição de probabilidades do estado em função do estado anterior (Dica: é uma Gaussiana).



$$\begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ \dot{x}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} u_t \qquad u_t \sim N(0,1)$$

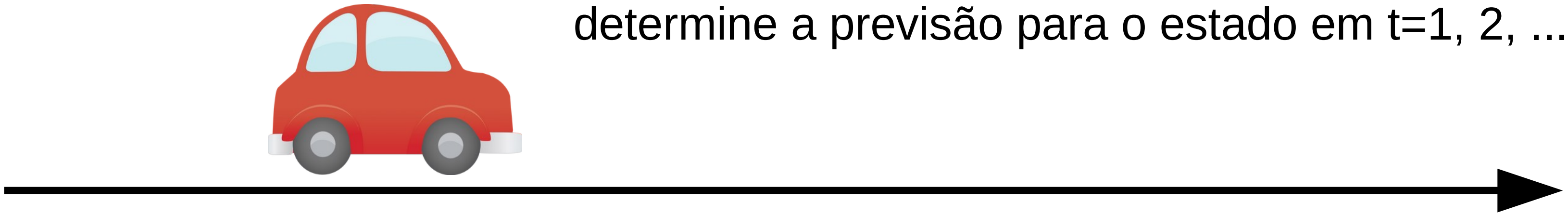
$$\boxed{\left.\begin{matrix} X \sim N(\mu, \Sigma) \\ Y = AX + B \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ \dot{x}_{t-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

O Filtro de Kallman

Exemplo: Veículo em espaço de uma dimensão (Exercício 1, Cap. 3 Prob. Robotics)

b) Implemente o passo de *previsão* do filtro de Kallman. Se a vel. e posição são nulas em t=0, determine a previsão para o estado em t=1, 2, ... 5.



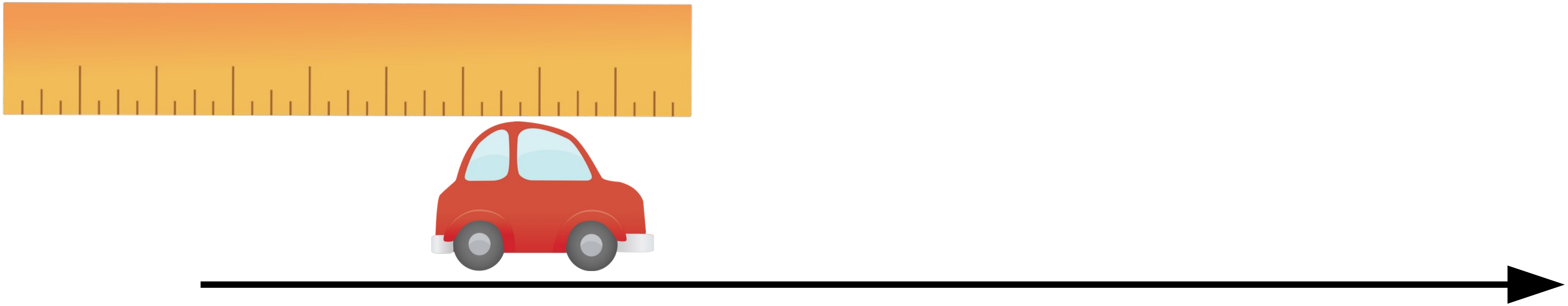
Se $\overline{X}_t$ é o estado previsto, então $\begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \sim N(\overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t)$ Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

$\overline{\mu}_t = A\mu_{t-1}$ $\overline{\Sigma}_t = A\Sigma_{t-1}A^T + R$ sem passo de correção, então $\mu_{t-1} = \overline{\mu}_{t-1}, \Sigma_{t-1} = \overline{\Sigma}_{t-1}$

$\overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_2 = \overline{\mu}_5 = [0\,0]^T$ $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 5/2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \Sigma_5 = \begin{bmatrix} 165/4 & 25/2 \\ 25/2 & 5 \end{bmatrix}$

O Filtro de Kallman

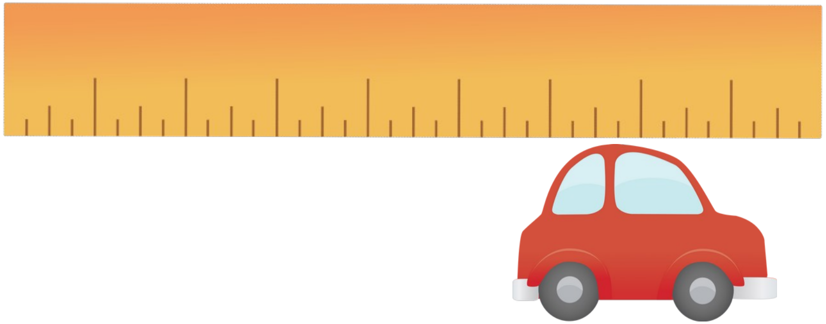
Exemplo: Medição de posição do veículo (Exercício 2, Cap. 3 Prob. Robotics)



Um sensor mede a posição real do veículo, somada a um ruído gaussiano de média nula e covariância 10.

O Filtro de Kallman

Exemplo: Medição de posição do veículo (Exercício 2, Cap. 3 Prob. Robotics)



a) Defina as matrizes *C* e *Q* do modelo probabilístico de medição

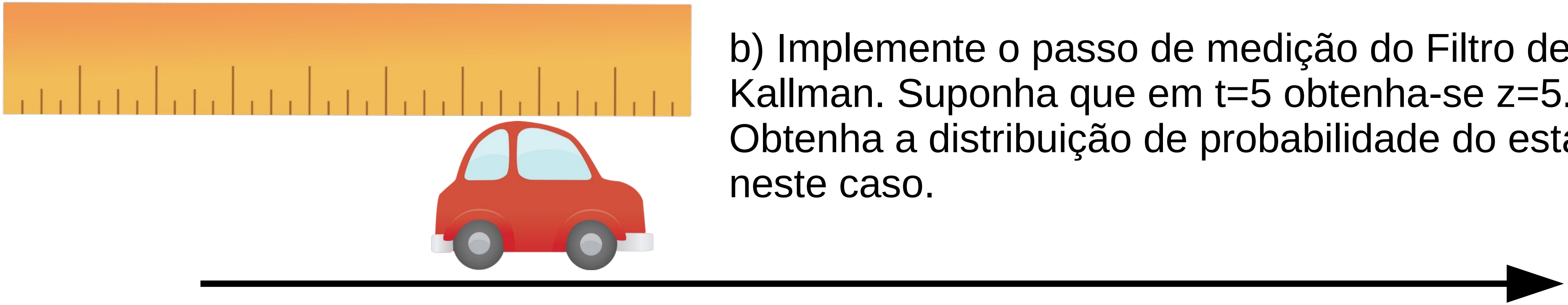
Pela convenção de sist. lineares estocásticos, $z_t = C_t X_t + \delta_t \, , \delta_t \sim N(0, Q)$

Por outro lado, $z_t = x_t + \delta_t \, , \, \delta_t \sim N(0, 10)$

Assim, $C_t = [1\ 0], \, Q = 10$

O Filtro de Kallman

Exemplo: Medição de posição do veículo (Exercício 2, Cap. 3 Prob. Robotics)



b) Implemente o passo de medição do Filtro de Kallman. Suponha que em t=5 obtenha-se z=5. Obtenha a distribuição de probabilidade do estado neste caso.

Se X_t é o estado estimado, então $\begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix} \sim N(\mu_t, \Sigma_t)$ O ganho de Kallman é $K_t = \bar{\Sigma}_t C^T \left(C \bar{\Sigma}_t C^T + Q \right)^{-1}$

Seja $\bar{\sigma}_{x_t}^2$ a covariância de $\bar{x}_t$. Então $K_t = \bar{\Sigma}_t \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{xt}^2 + 10} & 0 \end{bmatrix}^T, \mu_t = \overline{mu}_t + K_t (z_t - C_t \overline{mu}_t), \Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$

Para t=5, $K_5 = [33/41 \;\; 10/41]^T, \mu_5 = [165/41 \;\; 50/41]^T, \Sigma_5 = \begin{bmatrix} 330/41 & 100/41 \\ 100/41 & 80/41 \end{bmatrix}$

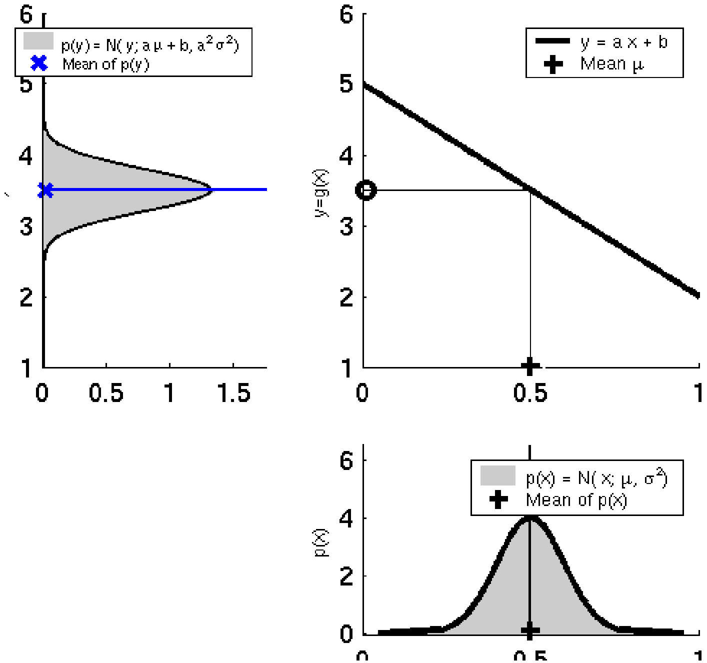
Sistemas não-lineares

$$x_t = g(x_{t-1}, u_t)$$

$$z_t = h(x_t)$$

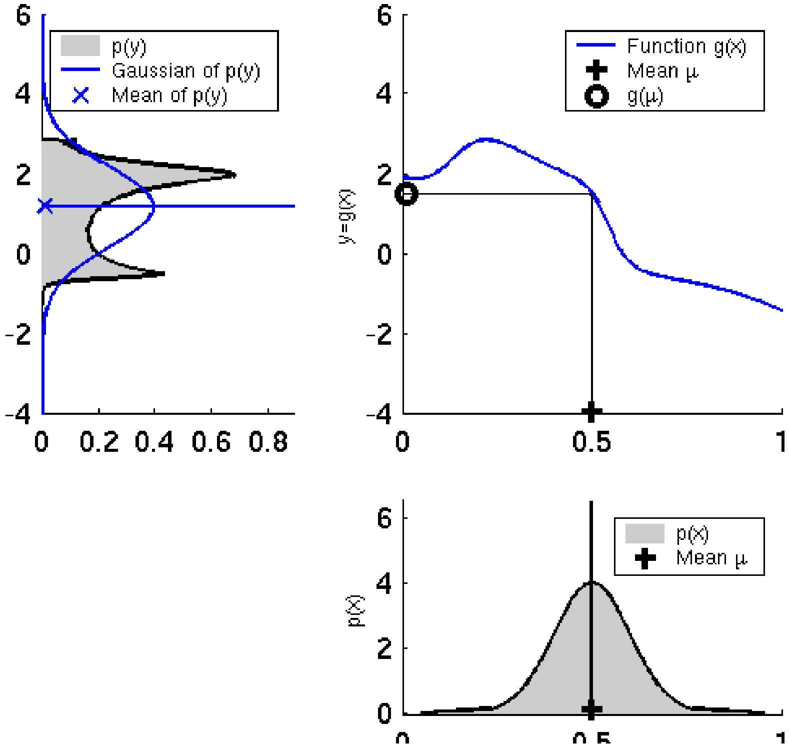
Uma simples rotação elimina linearidade!

Gaussianas em sist. lineares



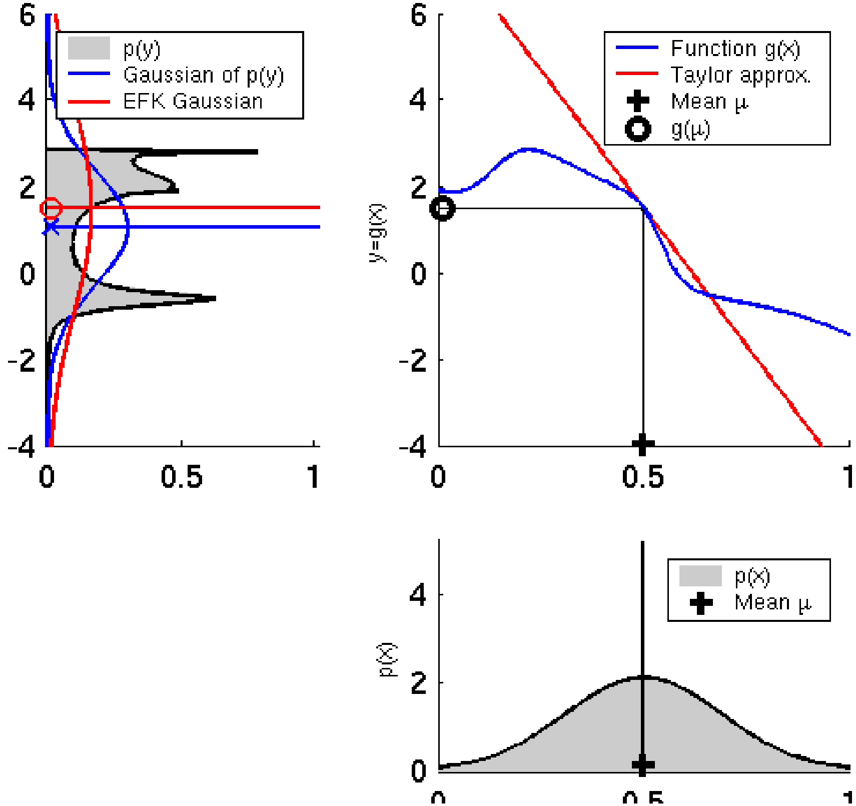
Gaussianas em sist. não-lineares

Gaussiana com a mesma média e variância.



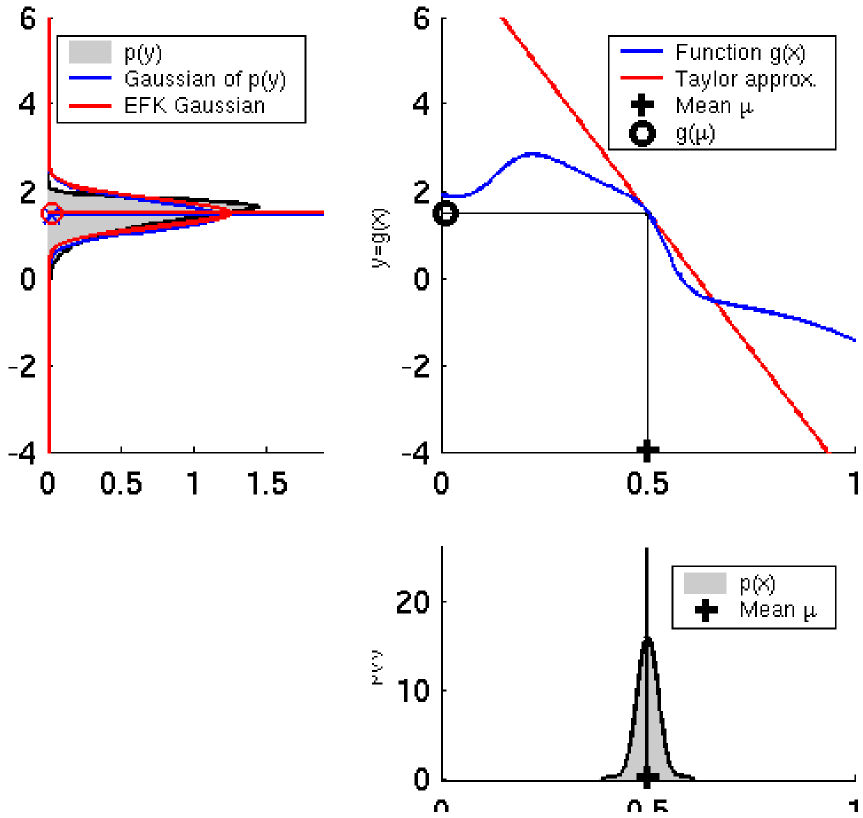
Gaussianas em sist. não-lineares

Linearização EKF – Série de taylor de 1ª ordem.



Gaussianas em sist. não-lineares

Linearização EKF – Série de taylor de 1ª ordem.



Linearização EKF de 1ª ordem

- $$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$
- $$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \, (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t \, (x_t - \bar{\mu}_t)$$

Algoritmo EKF

Extended_Kalman_filter

1.
2. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$
3. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$
4.
5. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T \left(H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t \right)^{-1}$
6. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - h(\bar{\mu}_t))$
7. $\Sigma_t = (I - K_t H_t)\bar{\Sigma}_t$
8. Retorne μ_t, Σ_t

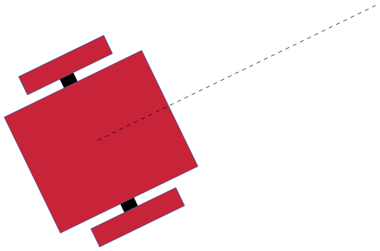
EKF: Exemplo

Robô de duas rodas. Posição x, y e orientação θ.

Modelo *cinemático*. Perímetro de rodas p=1, largura entre rodas l=1.

Rotação esquerda, direita: ω_e, ω_d (rad/s). Δt=1s

$$\Delta\theta_t = \frac{\omega_{dt} - \omega_{et}}{2\pi}, r_t = \frac{(\omega_{dt} + \omega_{et})}{2(\omega_{dt} - \omega_{et})}$$



$$\theta_t = \theta_{t-1} + \Delta\theta + \epsilon_\theta$$

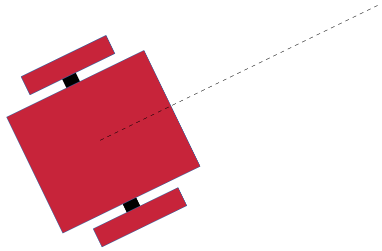
$$x_t = x_{t-1} + r_t\left(\sin\Delta\theta_t \cos\theta_{t-1} - (1 - \cos\Delta\theta_t)\sin\theta_{t-1}\right) + \epsilon_x$$

$$y_t = y_{t-1} + r_t\left(\sin\Delta\theta_t \sin\theta_{t-1} + (1 - \cos\Delta\theta_t)\cos\theta_{t-1}\right) + \epsilon_y$$

EKF: Exemplo

- Suponha que a cov. de ε_x e ε_y é 0,01 e a de ε_θ é 0,04. Implemente o passo de previsão. Considere constantes $\omega_d = \pi$ e $\omega_e = \pi/2$. Com $x_0=y_0=\theta_0=0$, encontre a média e covariância da estimativa pelo EKF do estado do sistema com t=2.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \\ \bar{\theta}_t \end{bmatrix} \sim N\left(\bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t\right)$$



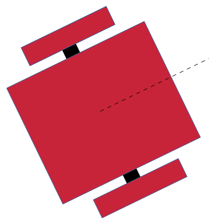
$$\bar{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}0466 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \quad \bar{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}719 \\ 0{,}184 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

EKF: Exemplo

- Suponha que a cov. de ε_x e ε_y é 0,01 e a de ε_θ é 0,04. Implemente o passo de previsão. Considere constantes $\omega_d = \pi$ e $\omega_e = \pi/2$. Com $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$, encontre a média e covariância da estimativa pelo EKF do estado do sistema com t=2.

$$G_t = \begin{bmatrix} \frac{dx_t}{dx_{t-1}} & \frac{dx_t}{dy_{t-1}} & \frac{dx_t}{d\theta_{t-1}} \\ \frac{dy_t}{dx_{t-1}} & \frac{dy_t}{dy_{t-1}} & \frac{dy_t}{d\theta_{t-1}} \\ \frac{d\theta_t}{dx_{t-1}} & \frac{d\theta_t}{dy_{t-1}} & \frac{d\theta_t}{d\theta_{t-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0466\cos\theta_{t-1} - 0{,}371\sin\theta_{t-1} \\ 0 & 1 & 0{,}371\cos\theta_{t-1} - 0{,}0466\sin\theta_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$$



$$\bar{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 \end{bmatrix} \qquad \bar{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0208 & -0{,}00191 & -0{,}00548 \\ -0{,}00191 & 0{,}0248 & 0{,}0139 \\ -0{,}00548 & 0{,}0139 & 0{,}08 \end{bmatrix}$$

EKF: Exemplo

A distância ρ do robô à origem é medida com erro de 10% (modele como um erro gaussiano com média nula e cov $(0{,}1\rho)^2$. Implemente o passo de medição do EKF. Suponha que em t=2 a distância é medida como 0,75. Determine a distribuição de probabilidades do estado estimado pelo EKF.

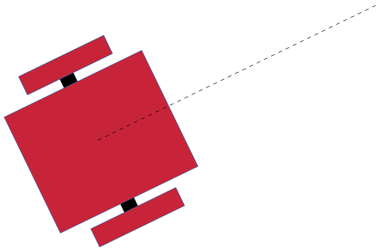
$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{dz_t}{d\bar{x}_t} & \frac{dz_t}{d\bar{y}_t} & \frac{dz_t}{d\bar{\theta}_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_t}{\sqrt{\bar{x}_t^2+\bar{y}_t^2}} & \frac{\bar{y}_t}{\sqrt{\bar{x}_t^2+\bar{y}_t^2}} & 0 \end{bmatrix}, Q_t = 0{,}005625$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

Para t=2, $K_2 = \begin{bmatrix} 0{,}764 & 0{,}167 & -0{,}0725 \end{bmatrix}$

A medida *prevista* é 0,7422. Assim, $\mu_2 = \begin{bmatrix} 0{,}725 & 0{,}185 & 0{,}5 \end{bmatrix}^T$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0{,}00576 & -0{,}00519 & -0.00406 \\ -0{,}00519 & 0{,}0241 & 0{,}0142 \\ -0.00406 & 0{,}0142 & 0{,}0799 \end{bmatrix}$$



EKF: Exemplo

Suponha que o robô tem uma *bússola*, que mede o ângulo $\theta_t + b_t + e_t$, onde b é um *viés estático desconhecido* e e_t é um ruído gaussiano de média nula e cov. 0.25. Sejam as medidas em t=1 0.2 e t=2 0.45. Qual o estado presumido do veículo pelo EKF em t=2, incluindo o viés da bússola?

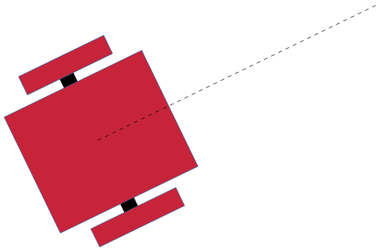
EKF: Exemplo

Supondo o viés estático, $b_t = b_{t-1}$

A variável desconhecida pode ser modelada como ~N(0,U), com U>>1.

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad \bar{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}0466 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix}$$

$$H_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{0{,}04}{0{,}29+U} & \dfrac{U}{0{,}29+U} \end{bmatrix}^T$$



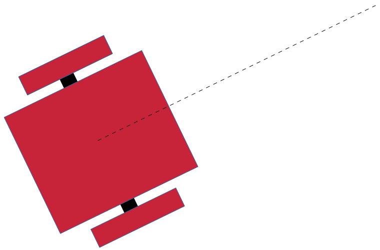
$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}0466 \\ 0{,}25 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & -0{,}04 \\ 0 & 0 & -0{,}04 & 0{,}29 \end{bmatrix}$$

(calculado como limite para U crescente)

EKF: Exemplo

$$\bar{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}719 \\ 0{,}184 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \bar{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0208 & -0{,}00191 & -0{,}00548 & -0{,}00548 \\ -0{,}00191 & 0{,}0248 & 0{,}0139 & -0{,}0139 \\ -0{,}00548 & 0{,}0139 & 0{,}08 & -0{,}04 \\ 0{,}00548 & -0{,}0139 & -0{,}04 & 0{,}29 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}741 & 0{,}463 \end{bmatrix}^T$$



$$\mu_2 = \begin{bmatrix} 0{,}719 \\ 0{,}184 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0208 & -0{,}00191 & -0{,}00548 & -0{,}00548 \\ -0{,}00191 & 0{,}0248 & 0{,}0139 & -0{,}0139 \\ -0{,}00548 & 0{,}0139 & 0{,}077 & -0{,}0585 \\ 0{,}00548 & -0{,}0139 & -0{,}0585 & 0{,}174 \end{bmatrix}$$

Robótica Probabilística

“A robot that carries a notion of its own uncertainty and that acts accordingly is superior to one that does not.”

Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, and Dieter Fox. 2005. *Probabilistic Robotics*. The MIT Press.