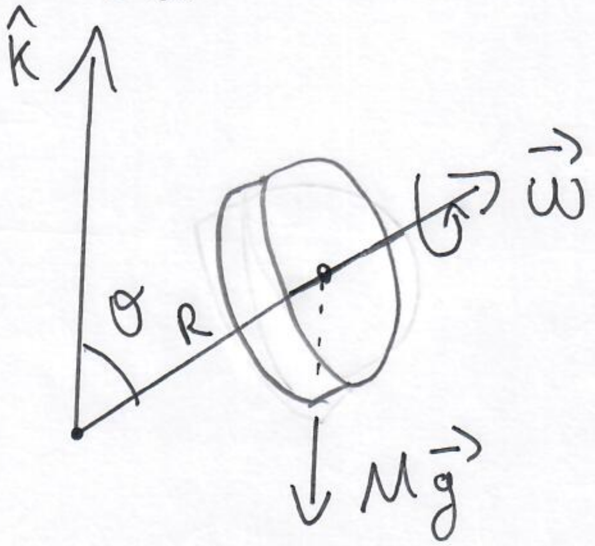
- Exemplo: Pião simétrico I

Um corpo é dito simétrico se dois de seus momentos de inércia, digamos I_1 e I_2, são iguais. Considere um pião ou um giroscópio com $I_1 = I_2$ e girando inicialmente com uma velocidade $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ muito grande



O momento angular inicial é $\vec{J} = I_3 \vec{\omega} = I_3 \omega \hat{e}_3$.

Na ausência de forças externas, o pião na vertical $(\theta = 0)$, temos

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = I_3 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante}$$

Ou seja, seu eixo de rotação permanece fixo no espaço

Suponha agora uma pequena força, (8)
$\theta \neq 0$. Nesse caso, esperamos que $\vec{\omega}$ mude com o tempo e assim

$$\vec{\omega}_{nova} = \omega\,\hat{e}_3 + \omega_\perp\,\hat{e}_\perp \,, \quad \hat{e}_\perp \cdot \hat{e}_3 = 0$$

$$|\vec{\omega}_{nova}| = (\omega^2 + \omega_\perp^2)^{1/2} \simeq (\omega^2)^{1/2} = \omega,$$

se a força for pequena ou ω muito grande
Desse modo:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = I_3 \frac{d\vec{\omega}_{nova}}{dt} = I_3\,\omega\,\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

Isso quer dizer que a magnitude de ω não muda, apenas sua direção:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = I_3\,\omega\,\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = (R\hat{e}_3) \times (Mg(-\hat{k}))$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = -\frac{MgR}{I_3\,\omega}\,\hat{e}_3 \times \hat{k} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_3$$

$\vec{\Omega} = \dfrac{MgR}{I_3\,\omega}\,\hat{k}$. Ou seja, $\hat{e}_3$ gira, precessiona, com velocidade angular $\vec{\Omega}$! Válido para $\Omega \ll \omega$!

- Precessão do pião simétrico

Me posse agora desse arcabouço teórico, vamos revisitar o problema do pião simétrico e sua precessão que encontramos anteriormente. (ver figura na página 7)
Esse sistema possui três graus de liberdade e vamos considerar os ângulos de Euler como coordenadas generalizadas. A energia potencial é:

posição do CM

$$V = mgz = mgR\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$
$$- MgR\cos\theta$$

A equação de Lagrange para θ nos dá

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot{\theta}) = I_1\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\sin\theta\,\dot{\varphi}$$
$$+ MgR\sin\theta$$

Como a Lagrangiana não depende dos outros dois ângulos, P_φ e P_ψ serão conservados:

$$\frac{d}{dt}\left[I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\right] = 0$$

A conservação de p_ψ nos diz que

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \text{constante}$$

(note que não mais assumimos $\omega_3 \simeq \dot{\psi}$)

Dessas equações para p_ψ e p_φ também aprendemos que <u>se assumimos θ = constante</u> temos que ter $\dot{\psi}$ e $\dot{\varphi}$ constantes. Portanto a velocidade de precessão Ω do eixo do pião ao redor do eixo vertical é $\dot{\varphi}$. Para determinarmos a relação entre as velocidades angulares Ω e ω_3, estudamos a equação de Lagrange para θ com $\dot{\theta} = 0$:

$$\sin\theta\left[I_1 \underbrace{\dot{\varphi}^2}_{\Omega^2}\cos\theta - I_3\underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)}_{\omega_3}\overset{=\Omega}{\dot{\varphi}} + MgR\right] = 0$$

Desconsiderando o pião na vertical, $\sin\theta = 0$, temos

$$I_1 \Omega^2 \cos\theta - I_3 \omega_3 \Omega + MgR = 0$$

A menor velocidade para a qual um solução real par Ω existe é:

$$I_3^2 \omega_3^2 = 4 I_1 \cos\theta \, MgR$$

Para velocidades menores ele trepida e para velocidades maiores há duas raízes

É também instrutivo estudarmos o caso no qual ω_3 é grande. Há duas soluções possíveis:

- $\Omega \ll \omega_3$

$\Omega \approx MgR/I_3\omega_3$. Essa é a solução que obtivemos anteriormente para o problema por meio de nosso tratamento aproximado.

- $\Omega \approx \omega_3$

$\Omega \approx \dfrac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta}$. Essa é a solução correspondente a oscilações livres. Ou seja, para precessão rápida podemos ignorar a força gravitacional!

- Pião simétrico II

Vamos agora discutir qualitativamente o movimento geral do pião simétrico dentro do formalismo Hamiltoniano. Os momentos generalizados são

$$P_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta$$

$$P_\theta = I_1 \dot{\theta}$$

$$P_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$$

Podemos inverter essas equações para escrevermos as velocidades em termos dos momentos

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta} \; ; \; \dot{\theta} = P_\theta / I_1 \; ; \; \dot{\psi} = \frac{P_\psi}{I_3} - \frac{P_\varphi - P_\psi\cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}\cos\theta$$

Escrevemos $H = T + V$ e substituímos as velocidades pelos momentos e T

$$H = \frac{(P_\varphi - P_\psi\cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{P_\theta^2}{2I_1} + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + MgR\cos\theta$$

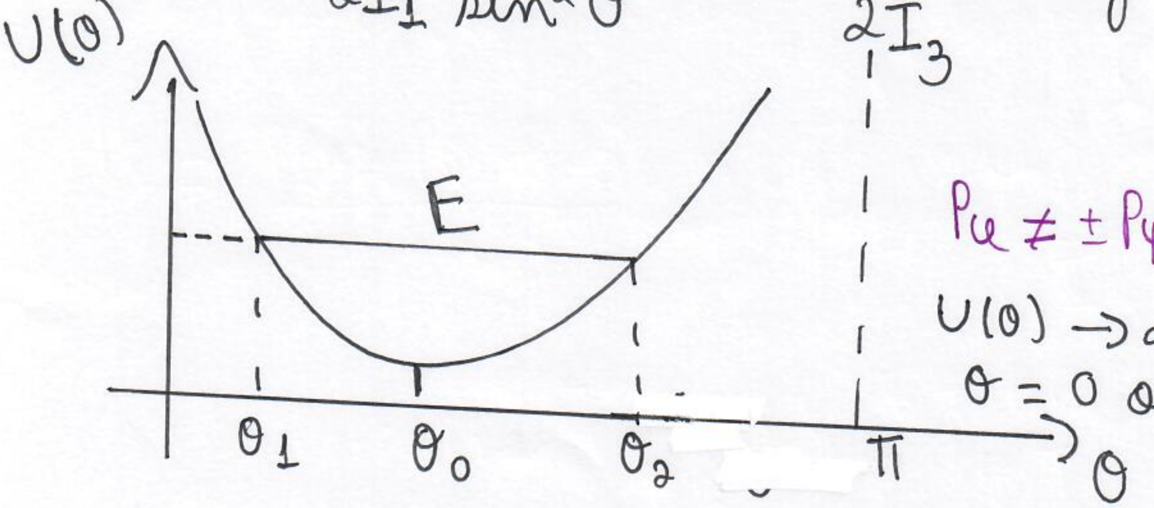
É claro que as coordenadas φ e ψ são ignoráveis por não aparecerem explicitamente em H e temos que:

$$P_\varphi = \text{constante} \quad \text{e} \quad P_\psi = \text{constante}$$

Reduzimos assim o problema àquele de apenas um grau de liberdade θ:

$$H = P_\theta^2 / 2I_1 + U(\theta)$$, onde o potencial efetivo é dado por

$$U(\theta) = \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos\theta)}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + MgR\cos\theta$$



$P_\varphi \neq \pm P_\psi$

$U(\theta) \to \infty$ para $\theta = 0$ ou π.

A equação de Hamilton para esse problema é

$$-\dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow I_1 \ddot{\theta} = -\frac{dU}{d\theta}$$

que é uma equação complicada de se resolver. Contudo, utilizaremos a conservação da energia para discutir o movimento

$$E = P_\theta^2/2I_1 + U(\theta) = \text{constante}$$

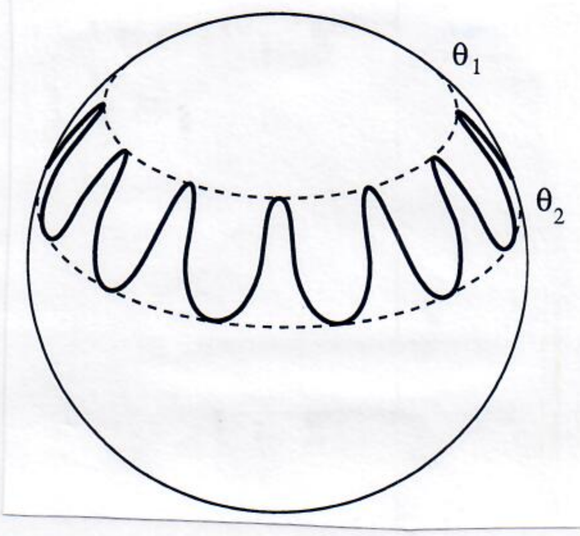
A primeira observação é que se $E > U(\theta_0)$ o movimento do pião envolverá uma nutação, ou oscilação do eixo do pião na direção θ enquanto houver precessão. (Vocês vão mostrar que só há um mínimo nos exercícios) Se $E = U(\theta_0)$ temos uma situação de "equilíbrio" no qual $\theta = \theta_0$ em todo o movimento. Essa é a precessão estacionária que discutimos anteriormente.

O caso geral não é muito difícil de ser descrito qualitativamente. Para tal devemos observar que a velocidade do pião ao redor do eixo vertical, Ω, é zero quando

$$\boxed{\cos\theta = p_\varphi / p_\psi \ , \ \dot{\varphi} = 0}$$

Se esse ângulo não está contido no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, $\dot{\varphi}$ nunca se anula e temos uma precessão em uma direção fixa com uma nutação de $\hat{e}_3$ entre θ_1 e θ_2.

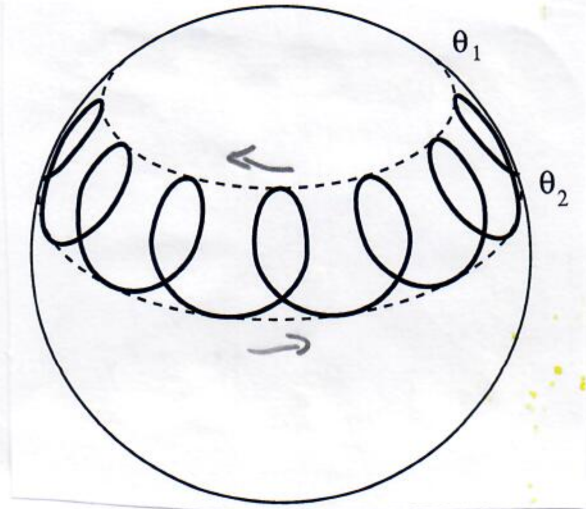
Essa situação é ilustrada pela figura ao lado.

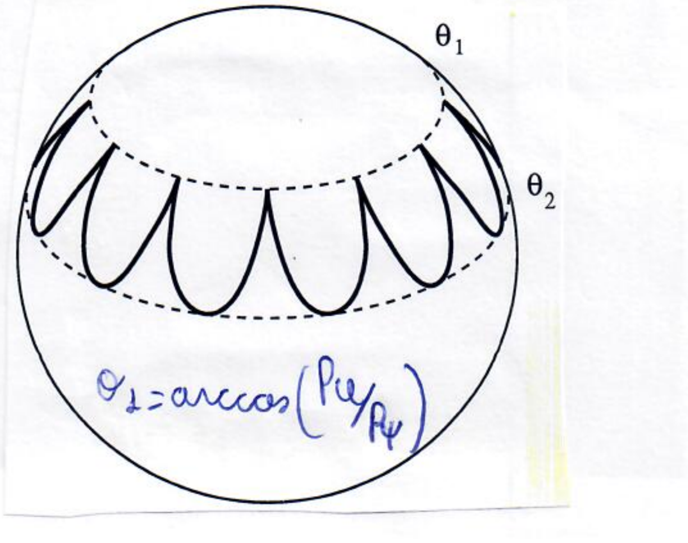


Por outro lado, se temos

$$\theta_1 < \arccos(p_\varphi / p_\psi) < \theta_2$$

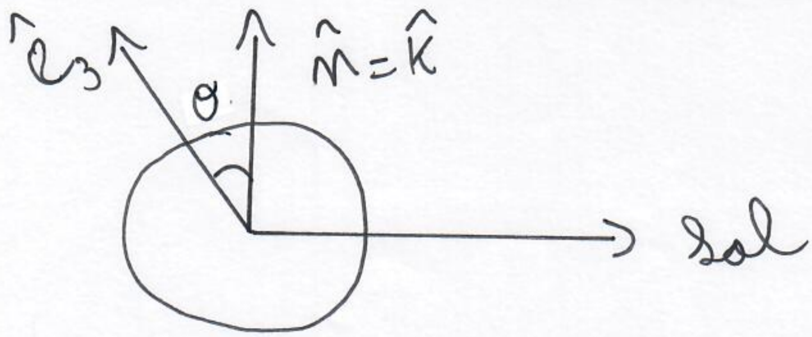
$\dot{\varphi}$ troca de sinal entre os extremos e o movimento resultante do eixo do pião possuirá laços. O valor médio de $\dot{\varphi}$ não é zero, contudo, e há uma precessão efetiva em um sentido ou outro





- Precessão dos equinócios

Uma aplicação importante da dinâmica de corpos rígidos simétricos é chamada precessão dos equinócios. Essa é uma precessão do eixo de rotação da Terra em relação à normal à eclítica (plano definido pela órbita da Terra em relação ao Sol). O efeito da precessão é pequeno mas gera mudanças em longos períodos. Uma óbvia é que a data de início das estações do ano não é fixa. A outra é que a posição das estrelas na abóbada celeste também muda



$\theta = 23.45°$

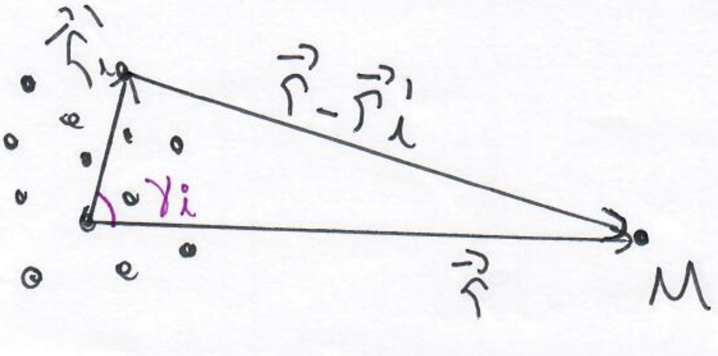
Se a Terra fosse perfeitamente esférica, nenhum outro membro do sistema solar poderia gerar torque sobre ela. Contudo, pelo fato de a Terra girar em torno do seu eixo temos que a força de centrífuga leva invariavelmente a um achatamento dos polos e um bojo ou saliência no Equador. Se a Terra não girasse, o Sol atrairia o bojo mais próximo mais que aquele distânte e tenderia a alinhar o eixo da Terra com $\hat{n}$. Como a Terra gira, contudo, o efeito desse torque do Sol (ou da Lua) é causar uma precessão de $\hat{e}_3$ ao redor de $\hat{n}$.

Para encontrarmos o período dessa precessão, precisamos encontrar os efeitos que um desvio da forma esférica da Terra causam em seu potencial gravitacional.

Considere uma distribuição de massas formando um corpo (Terra) e uma única massa pontual M, (Sol ou Lua).

$$V = -GM \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Energia potencial gravitacional entre os corpos

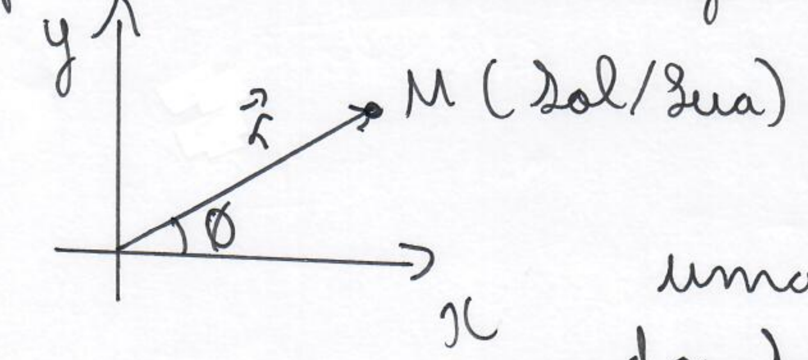


Vimos em nossa discussão para a teoria do potencial que para grandes distâncias

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{G}{2r^3}(I_3 - I_1)(3\cos^2\gamma - 1)$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{r}}{\omega r}.$$

Para aplicar esse resultado para o presente problema vamos escolher um sistema de coordenadas tal que o plano da eclítica seja o plano-xy.



Por simplicidade, consideraremos uma órbita circular do Sol/Lua ao redor da Terra. Nesse caso, $\vec{\omega} \parallel \hat{e}_3 \neq \hat{k}$ e temos

$\vec{\omega} = \omega(\sin\theta, 0, \cos\theta)$; $\vec{r} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)r$

$\cos\gamma = \sin\theta\cos\phi$. O potencial do quadrupolo é então:

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{G}{2r^3}(I_3 - I_1)\left(3\cos^2\phi \sin^2\theta - 1\right)$$

Vamos fazer uma aproximação a ser justificada posteriormente: o movimento orbital é muito mais rápido que a precessão ⇒ período da precessão ≫ 1 ano.

Por isso, consideraremos o valor médio de $\Phi_2(\vec{r})$ sobre uma órbita circular

$$\overline{\Phi_2(\vec{r})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \; \Phi_2(\vec{r})$$

$$= \frac{G}{2r^3}(I_3 - I_1)\Big(3\underbrace{\sin^2\theta}_{=1-\cos^2\theta} \; \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi \, d\phi}_{1/2} - 1\Big)$$

$$= -\frac{G}{4 r^3}(I_3 - I_1)(3\cos^2\theta - 1)$$

Esse termo depende de θ e gera um torque sobre a Terra. Como $I_3 > I_1$, a energia potencial é mínima para $\theta = 0$. Ou seja, ele quer alinhar $\hat{e}_3$ e $\hat{k}$. Como a Terra gira isso leva a uma precessão como no caso do pião!

A Lagrangiana para a dinâmica rotacional do problema (que assumimos desacoplada daquela orbital) é:

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

$$- \left(- \frac{3GM}{4r^3} (I_3 - I_1) \cos^2\theta \right)$$

→ Mínimo em $\theta = 0$ ⇒ torque

↳ único termo que contribui para rotação

Queremos encontrar a velocidade de precessão angular $\dot{\varphi}$. A equação de Euler Lagrange para θ é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = \partial L / \partial \theta$$

$$I_1 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta - I_3 \underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)}_{= \omega_3 = \frac{p_\psi}{I_3} = \text{constante}} \dot{\varphi} \sin\theta$$

$$- \frac{3GM}{2r^3} (I_3 - I_1) \cos\theta \sin\theta$$

Vamos considerar uma precessão regular com $\theta = \theta_0 =$ constante e assim

$$I_1 \dot{\psi}^2 \cos\theta_0 - I_3 \omega_3 \dot{\psi} - \frac{3}{2} \frac{GM}{r^3} (I_3 - I_1) \cos\theta_0 = 0$$

O primeiro termo do lado esquerdo pode ser desprezados pois esperamos que $\dot{\psi} \ll \omega_3 \sim 1/1\,\text{dia}$ (já assumimos que $\dot{\psi} \ll 1/1\,\text{ano}$)

Desse modo:

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2\omega_3} \frac{GM}{r^3} \left(\frac{I_3 - I_1}{I_3} \right) \cos\theta_0$$

Da 3ª lei de Kepler, temos

$$\frac{GM}{r^3} = \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$\dot{\psi} = -\omega_0 \frac{3}{2} \underbrace{\left(\frac{\omega_0}{\omega_3} \right)}_{\simeq 1/365} \underbrace{\left(\frac{I_3 - I_1}{I_3} \right)}_{\simeq 1/306} \underbrace{\cos\theta_0}_{\simeq 0.92}$$

$$\dot{\psi} \simeq -\frac{\omega_0}{81 \times 10^3} \Rightarrow T_\psi \simeq 81.000 \text{ anos},$$

justificando as aproximações. Contudo, esse não é o resultado correto, pois não levamos em conta o efeito da Lua, que embora muito menos massiva que o Sol está muito mais próximo.

O plano da órbita da Lua está inclinado de 5° em relação à eclítica. Vamos ignorar essa diferença e considerar sua órbita coplanar com a do Sol e somar os dois efeitos:

$$\frac{GM_S}{r_S^3} + \frac{GM_L}{r_L^3} = \omega_0^2 \left[1 + \frac{M_L}{M_S} \left(\frac{r_S}{r_L} \right)^3 \right]$$

$$\simeq \omega_0^2 \left[1 + 2.2 \right] = 3.2 \omega_0^2$$

O período da precessão dos equinócios é então:

$$T_\Omega = \frac{81.000}{3.2} \text{ anos} \simeq 25300 \text{ anos}$$