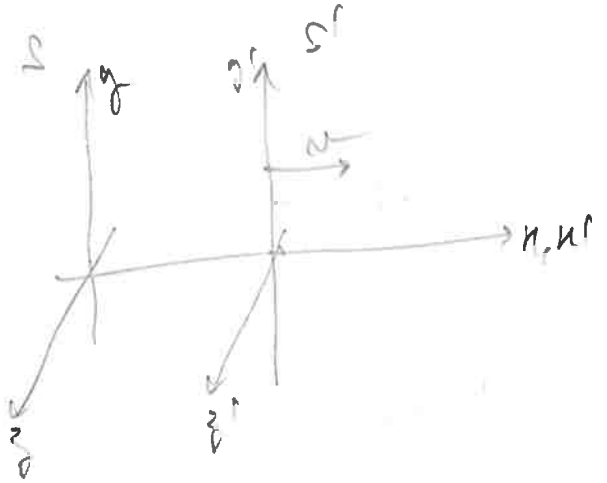
3a Aula

* Transformações Gerais de Lorentz
* A Métrica de Minkowski
* Os Grupos de Lorentz e Poincaré
* Estrutura causal do espaço-tempo de Minkowski

* Avisos: 1ª Lista // Provas

Na aula passada vimos que a transformação entre os 2 referenciais abaixo, que segue diretamente do Princípio da Relatividade, é:



$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tanh a = \beta$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = ct \cosh a - x \operatorname{senh} a$$

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct) = -ct \operatorname{senh} a + x \cosh a$$

Podemos também escrever isso como:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nessa expressão a velocidade entre os dois referenciais é $\vec{v} = v\hat{x} = v\hat{x}'$. Na 1ª lista vocês devem encontrar a forma de Λ quando $\vec{v}$ está em qqr. direção.

De fato, podemos pensar em Λ como matrizes bastante gerais, porém, que condições elas devem satisfazer? Que vínculos elas devem observar?

Vamos retornar ao princípio, o Princípio da Relatividade. O que nós exigimos, na prática, foi a condição de que

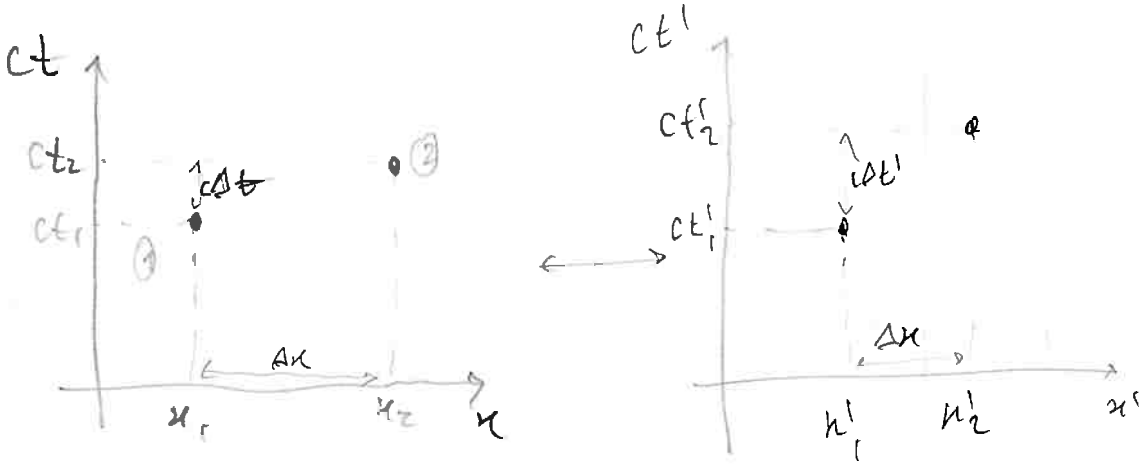
$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

O que isso significa é que essa "distância" entre a origem e o evento $\{ct, x, y, z\}$ em S, ou $\{ct', x', y', z'\}$ em S', dada pela ~~equação~~ acima, é invariante.



Mas a nossa "origem" não é nada mais do que um "evento" também — a coincidência das origens de S e S' no instante $t = t' = 0$.

De fato, o Princípio da Relatividade nos leva à simples a invariância desta "distância tempo-espaço" entre 2 eventos quaisquer:



$$-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x^2$$

e, de um modo ainda mais geral:

$$ds^2 \equiv -c^2dt^2 + d\vec{x}^2 = -c^2dt'^2 + d\vec{x}'^2 = ds'^2$$

↑ Positivo ou negativo!!

Essa é, portanto, a base concreta da Relatividade Especial, assim como determinado pelo Princípio da Relat

Agora, vamos escrever isso de um modo mais eficiente, que nos permita fazer cálculo mais complexos. Temos que:

$$dx^\mu = \{cdt, dx, dy, dz\}$$

De forma a escrever ds^2, podemos definir um "dual" desses coordenados, tal que $cdt \to -cdt$,

$$dx_\mu = \{-cdt, dx, dy, dz\}$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx_\mu . dx^\mu = dx_0 . dx^0 + dx_1 . dx^1 + dx_2 . dx^2 + dx_3 dx$$

$$= (-cdt)\cdot(cdt) + d\vec{x}^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = -c^2dt^2 + d\vec{x}^2 \checkmark$$

É claro que tanto dr^μ quanto dr_μ representam basicamente a mesma coisa, então há uma maneira sistemática de levar um no outro. De fato, podemos definir:

$$dr_\mu = \eta_{\mu\nu} dr^\nu \quad , \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Podemos pensar nessa matriz como levando um vetor-coluna (dr^ν) num vetor-linha (dr^μ)

$$\begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta} (-c\,dt \;\; dx \;\; dy \;\; dz)$$

Desse modo, podemos finalmente escrever:

$$ds^2 = dr_\mu \, dr^\mu = (\eta_{\mu\nu} dr^\nu) dr^\mu =$$

$$\boxed{ds^2 = \eta_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu}$$

Essa última expressão mostra algo muito interessante. Dadas distâncias em coordenadas dx^μ, a matriz $\eta_{\mu\nu}$ nos diz como combinar esses coordenadas para formar a distância 4-dimensional invariante ds^2.

A matriz η é, portanto, a métrica do espaço onde vivem os eventos e nas coordenadas.

Essa é chamada de Métrica de Minkowski, e terá um papel fundamental neste curso.

Vamos então re-escrever a concretização do Princípio da Relatividade como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \overset{!}{=} ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$$

Uma soma — Uma outra soma

$$\left(\not\Rightarrow dx^\mu = dx'^\mu \,!!\right)$$

Agora, vamos ver o que isso implica.

Vamos recordar de que a transformação entre 2 referenciais pode ser escrita como:

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} dx^{\mu} \quad , \text{etc.}$$

Temos então que:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \left(\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} dx^{\mu}\right)\left(\Lambda^{\beta}{}_{\nu} dx^{\nu}\right)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \cdot \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \cdot \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \, dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Claramente, se $ds^2 = ds'^2$, então temos que:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Ou, em termos de matrizes:

$$\boxed{\Lambda^{tr} \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta}$$

Rotação:

$$R \cdot R^{tr} = \mathbb{1}$$

$$R^{tr} \cdot R = \mathbb{1}$$

Ver exercício da 1ª lista!

Portanto, chegamos agora a uma conclusão muito importante: as transformações mais gerais, que são consistentes com o Princ. da Relat., mantêm o intervalo ds^2 invariante ($ds^2 = ds'^2$ etc.), ou seja, são consistentes com a métrica de Minkowski,

$$\Lambda^{tr} \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta \quad , \quad \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Note que as matrizes Λ formam um grupo, assim como as matrizes de rotação R. De fato, as rotações são um sub-grupo desse "Grupo de Lorentz", já que uma rotação deixa $d\vec{x}^2$ invariante.

O Grupo de Lorentz é chamado de $SO^+(1,3)$, onde:

$S \rightarrow \det \Lambda = 1$

$+ \rightarrow$ Seta do tempo sempre na direção $t\nearrow$

$(1,3) \rightarrow$ (tempo, 3 espaço) c/ assinatura da métrica de Minkowski

Você pode verificar facilmente que as matrizes Λ, enquanto representações do Grupo de Lorentz, satisfazem todas as condições de um Grupo, em particular: $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \Lambda_3$.

Vamos nos relembrar: uma transformação geral, entre 2 referenciais cuja origem coincide ($\vec{0} = \vec{0}'$ em $t = t' = 0$), é tal que as coordenadas de quaisquer eventos são transformadas como:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \begin{cases} x_1'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x_1^\nu \\ x_2'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x_2^\nu \end{cases}$$

$$\Delta s_{12}^2 = -c^2 (t_2 - t_1)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$$

$$\Delta s_{12}'^2 = -c^2 (t_2' - t_1')^2 + (\vec{r}_2' - \vec{r}_1')^2$$

Ou, em notação tensorial:

$$\Delta s_{12}^2 = \eta_{\mu\nu} (x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$$

$$\Delta s_{12}'^2 = \eta_{\alpha\beta} (x_2'^\alpha - x_1'^\alpha)(x_2'^\beta - x_1'^\beta) =$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \left(\Lambda^\alpha{}_\mu (x_2^\mu - x_1^\mu) \right) \left(\Lambda^\beta{}_\nu (x_2^\nu - x_1^\nu) \right)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, (x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$$

Grupo de Poincaré

Note que a transformação acima não é totalmente geral — afinal, nela exigimos que a origem (espacial e temporal) dos referenciais coincidisse.

De fato, a transformação mais geral seria:

$$r^\mu \longrightarrow r'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu r^\nu + X^\mu$$

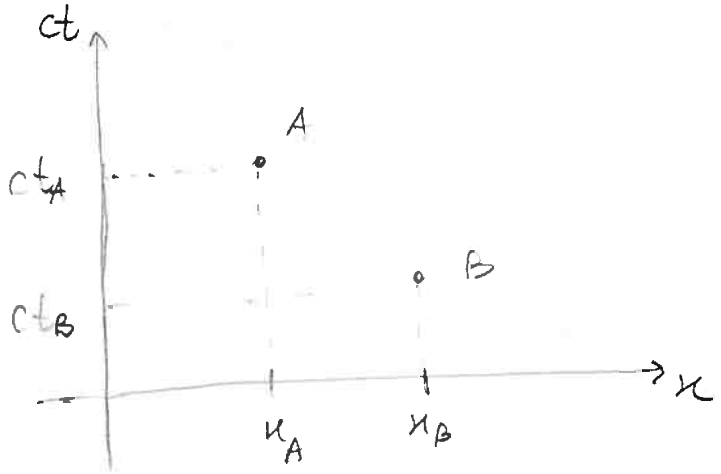
Essas transformações também formam um grupo, chamado de Grupo de Poincaré, que tem um papel absolutamente fundamental na Física.

O Grupo de Lorentz é um sub-grupo do Grupo de Poincaré; e o grupo de rotações é um subgrupo do Grupo de Lorentz. Porém, o Grupo de Galileu não é um sub-grupo de Poincaré, pois nele $t = t'$!

Q: Quantos parâmetros tem o Grupo de Poincaré?

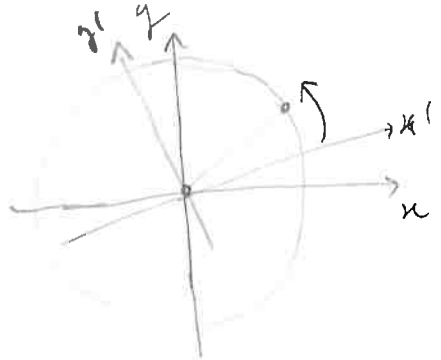
R: 10 : 3 — rotações
3 — boosts ($\vec{v}$)
+ 4 — translações

O Espaço-tempo de Minkowski



Vimos que em Minkowski o intervalo $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta\vec{x}^2$ permanece invariante nas transformações do Grupo de Poincaré.

Isso é parecido com o caso das rotações, em que exigimos que o raio $\Delta\vec{x}^2$ fique invariante;

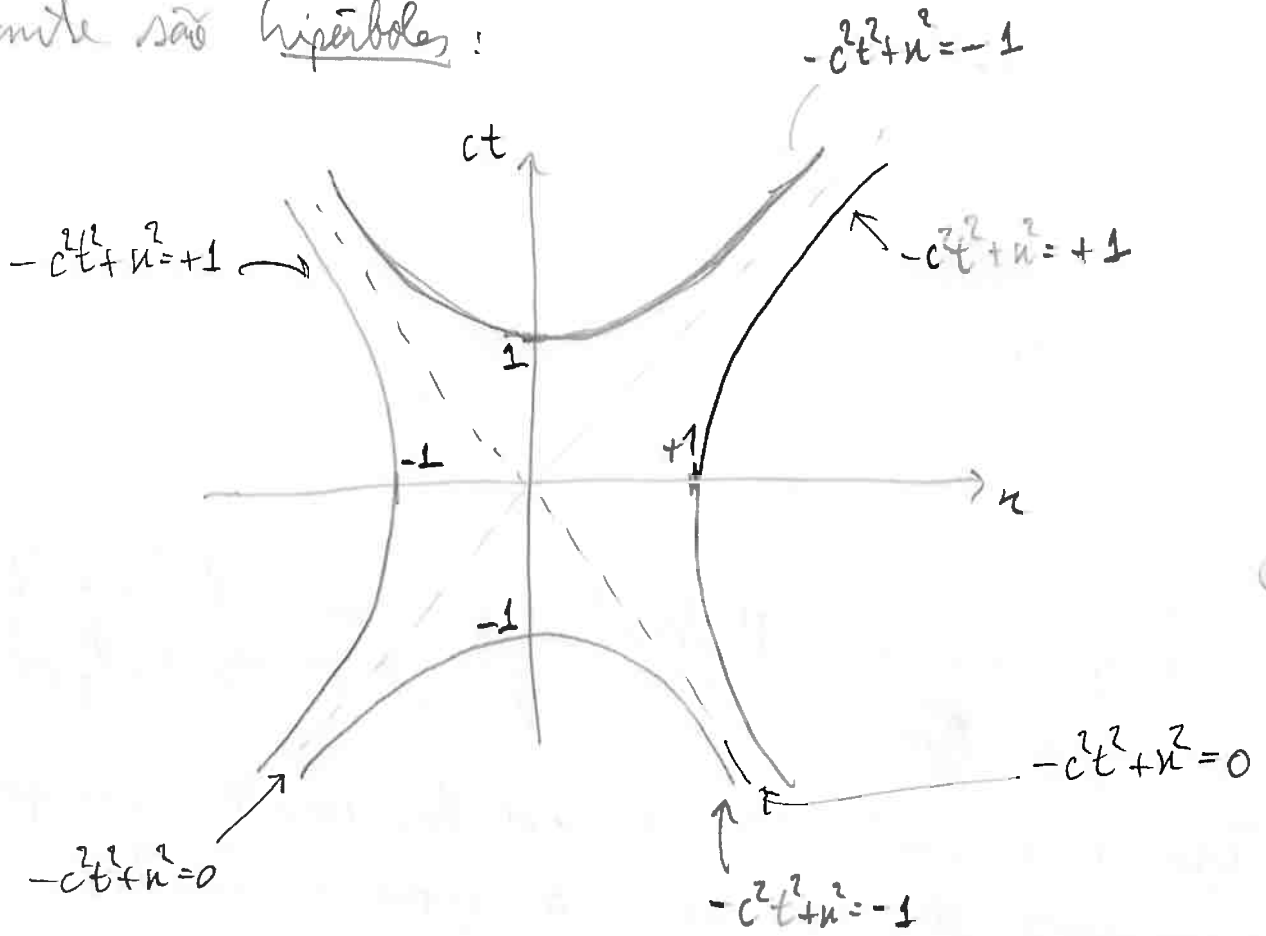


$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = \text{const.}$$

Mas o que seria a analogia desses círculos, no caso de Minkowski?

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta\vec{x}^2 \xrightarrow{\text{Simplifica}} -c^2t^2 + x^2 = \text{const.}$$

As curvas (ct, x) que deixam o intervalo acima invariante são hipérboles:



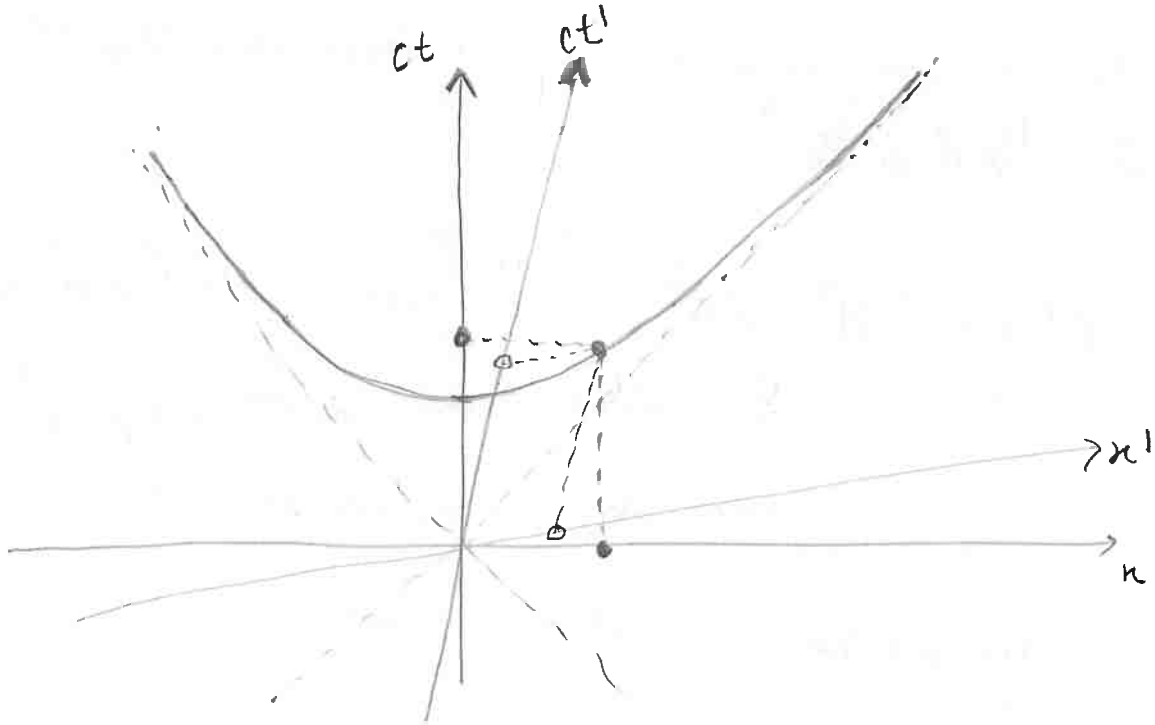
De fato, já vimos que, sob um boost de Lorentz,

$$ct' = ct \cdot \cosh\alpha - x \cdot \operatorname{senh}\alpha$$

$$x' = -ct \cdot \operatorname{senh}\alpha + x \cdot \cosh\alpha$$

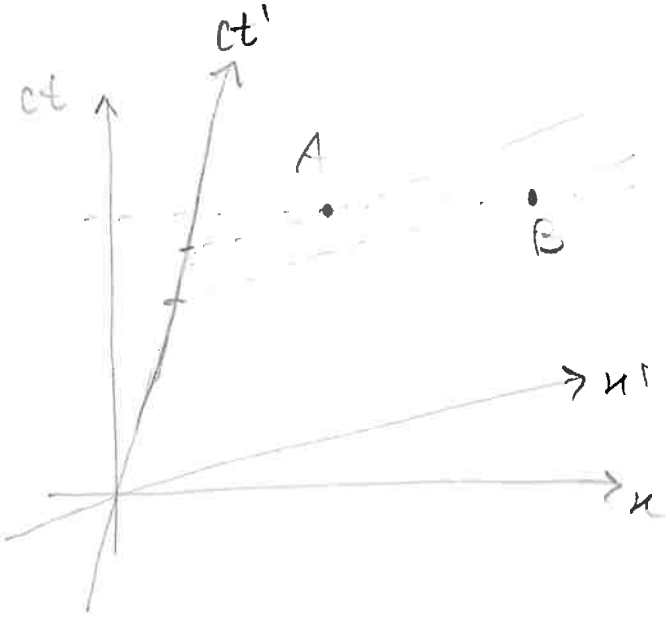
$\tanh\alpha = \beta = \frac{v}{c}$

(OBS: NÃO É UMA "ROTAÇÃO" !!)



Estrutura Causal

* Relatividade da Simultaneidade

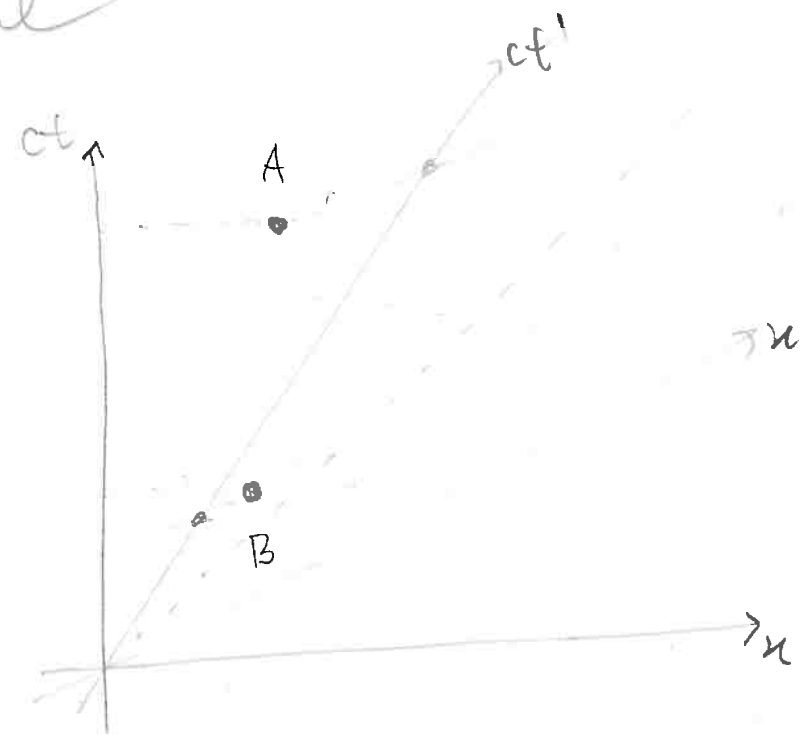


SIMULTÂNEOS P/ S

MAS

(B) ANTES DE (A) P/ S'!

* Ordem Temporal



B antes de A p/ S e S'...

Mas será que há um resultado geral?

⇒ CAUSALIDADE?...

O que precisamos é estabelecer algum tipo de conceito de causalidade que seja absoluto — para isso, não pode haver nenhuma "relatividade": é uma questão de lógica (no sentido matemático mesmo).

Mas vamos nos lembrar que há, sim, algo absoluto na Relatividade Especial: o invariante de distância espaço-tempo, ds^2:



$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2$$

ou

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta \vec{x}^2 = \Delta s'^2$$

Em particular, note que:

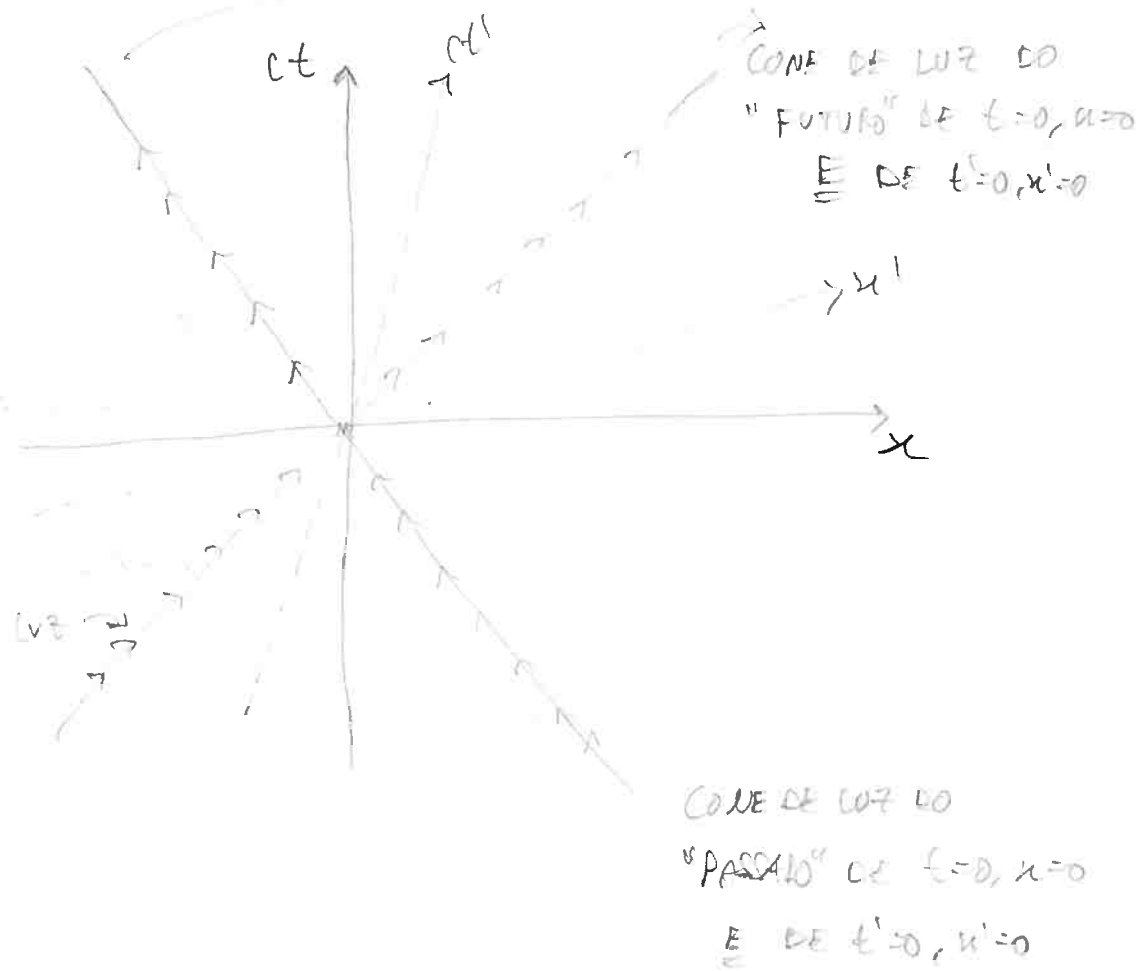
- Se $\Delta s^2 > 0 \Rightarrow \Delta s'^2 > 0$, qqr. referencial
- Se $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow \Delta s'^2 = 0$ " "
- Se $\Delta s^2 < 0 \Rightarrow \Delta s'^2 < 0$ " "

O que está por trás de tudo isso é um conceito muito simples e fundamental: a invariância do CONE DE LUZ:

O cone de luz é definido pela superfície ("hipersuperfície") $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 = 0$.

Claramente, a luz viaja nesses cones, com velocidade $\frac{|\Delta x|}{\Delta t} = c$.

Note que esse cone é invariante sob transformação de coordenadas:

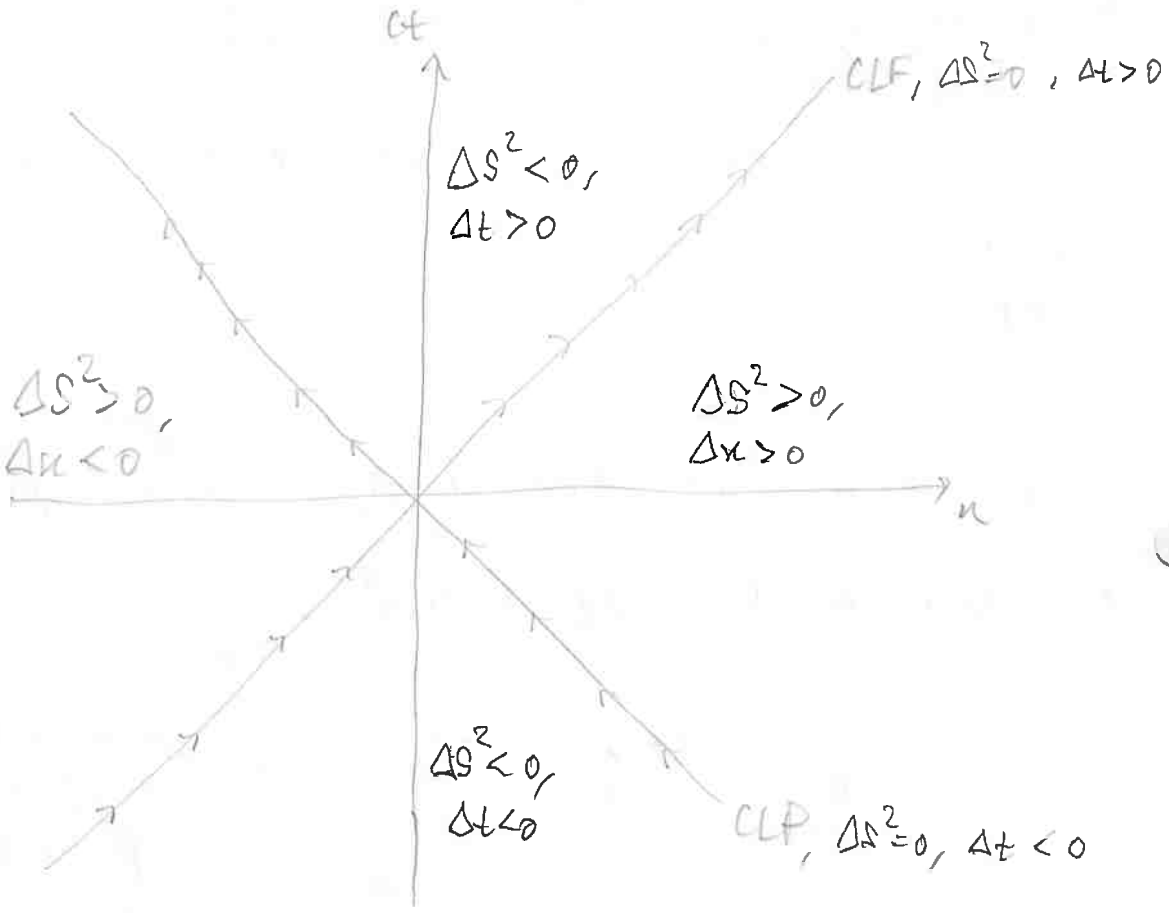


⇒ Se um evento está dentro do CL futuro em S, ele tb. estará dentro do CL futuro p/ S'

⇒ Se um evento está no CL passado de S, tb estará p/ S'

⇒ " " " " fora do CL p/ S, tb estará fora p/ S'.

Ou seja, podemos escrever:



- Se $\Delta s^2<0$, $\Delta s'^2<0$, e há uma ordem temporal bem definida — portanto, uma relação de causa e efeito entre o evento $t=0, x=0$ e um evento dentro do CL $\longleftrightarrow$ "CONEXÃO CAUSAL"

- Se $\Delta s^2>0$, $\Delta s'^2>0$, e não há uma ordem temporal bem definida. Nesse caso, dizemos que os 2 eventos ($t=0, x=0$ e t, x) estão "causalmente desconexos".

De um modo totalmente geral, um ponto qualquer no espaço-tempo ("evento") tem um cone de luz:

