1/3/202

INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE

* RELATIVIDADE GALILEANA — INVAR. GALILEU
* RELATIVIDADE RESTRITA — INVAR. DE LORENTZ
* RELATIVIDADE GERAL — PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNC

—— // ——

NEWTON E GALILEU

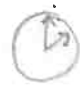
$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r}$$

Essas leis são válidas em referenciais inerciais, mas há uma infinidade desses referenciais, relacionados pelas Transformações de Galileu:

$$t \longrightarrow t + T \;, \qquad \vec{r} \longrightarrow \vec{r} + \vec{X}$$

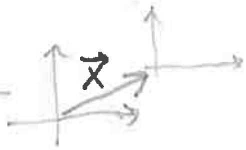
(2)

O fato das leis de Newton serem as mesmas mesmo após essas transformações expressa aquilo que chamamos de Invariância galileana:



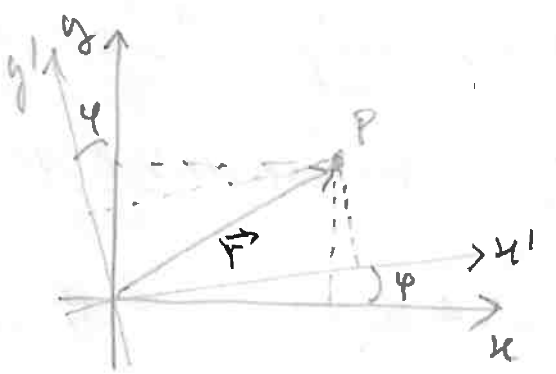
$$t \to t' = t + T$$

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{X}$$



$$\begin{pmatrix}\text{Leis}\\ \text{Físicas}\end{pmatrix}[t,\vec{r}] \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\text{Mesmas}\\ \text{Leis}\\ \text{Físicas}\end{pmatrix}[t',\vec{r}\,']$$

Mas além dessas translações no tempo (T) e no espaço ($\vec{X}$), a invariância galileana também nos garante que a orientação dos nossos referenciais é irrelevante — ou seja, podemos rodar o nosso sistema de referências do modo que quisermos, que as Leis Físicas não mudam:



Nesse caso simples (2D) temos que as coordenadas do ponto P são diferentes nesses 2 referenciais:

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{r}' = (x', y') \qquad \text{com} \qquad x' = x\cos\varphi + y \,\text{sen}\,\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi - x\,\text{sen}\,\varphi$$

Nós vamos fazer muitas operações com referenciais "rodados" de várias formas, então vamos desde já começar a simplificar a nossa notação:

$$r^1 = x \qquad r'^1 = x'$$
$$r^2 = y \qquad r'^2 = y'$$
$$(r^3 = z) \qquad (r'^3 = z')$$

Eu gosto de representar esses vetores como colunas,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Assim, temos que a rotação pode ser expressa por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi \\ -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ou, ainda melhor:

$$r'^i = \sum_j R^i{}_j \, r^j \qquad \text{com} \qquad R^i{}_j = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\;j\;} \\ i\big\downarrow & \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{array}$$

$i \rightarrow$ índices das <u>linhas</u> de R

$j \rightarrow$ índices das <u>colunas</u> de R

e

índice das linhas do "vetor-coluna" r.

Do modo mais geral possível, então, uma transformação de Galileu pode ser escrita como:

$$\begin{cases} t' = t + T \\ r'^i = \sum_j R^i{}_j \, r^j + X^i \end{cases}$$

A invariância de Galileu se dá quando T é uma constante e $\vec{X}^i$ é no máximo uma função linear do tempo,

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{V}_0 * t$$

Além disso, também é necessário que a matriz

$R^i{}_j$ seja constante (φ não depende do tempo).

Se isso valer, o novo referencial $\{t', \vec{r}'\}$

será inercial (desde que, claro, o referencial

$\{t, \vec{r}\}$ também seja inercial).

Porém, mesmo que essas condições não

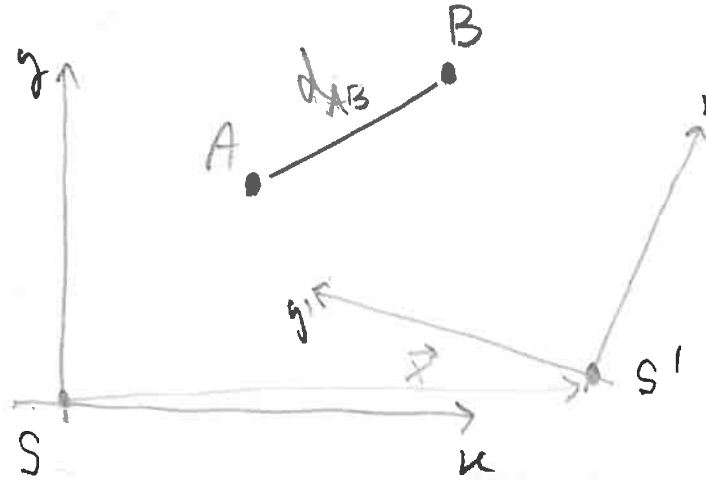
estejam satisfeitas, e que $\vec{X}$ e φ sejam

funções complicadas do tempo, há uma

invariância mais fundamental: nos

dois referenciais as distâncias espaciais entre 2

pontos são os mesmos:



(6) Vamos verificar as condições sob as quais a distancia d_{AB} é invariante.

$$r'^i_A = \sum_j R^i{}_j r^j_A + X^i$$

$$r'^i_B = \sum_j R^i{}_j r^j_B + X^i$$

A distância no ref. S' é d'_{AB} ($\stackrel{?}{=} d_{AB}$?):

$$d'^2_{AB} = \left(\vec{r}'_B - \vec{r}'_A\right)^2 = \sum_i \left(r'^i_B - \vec{r}'^i_A\right)^2$$

Mas podemos re-escrever isso do seguinte modo:

$$d'^2_{AB} = \sum_i \left(r'^i_B - r'^i_A\right) * \left(r'^i_B - r'^i_A\right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j R^i{}_j \left(r^j_B - r^j_A\right)\right) * \left(\sum_K R^i{}_K \left(r^K_B - r^K_A\right)\right)$$

$$= \sum_j \sum_K \left(r^j_B - r^j_A\right) * \left(r^K_B - r^K_A\right) * \sum_i R^i{}_j R^i{}_K$$

Nesse momento vale a pena notar algo que vai acontecer **sempre** por aqui: TODAS as vezes que um certo índice de um vetor ou matriz aparece repetido numa multiplicação, ele está sendo somado! ("Regra de Einstein") (7)

Vamos então assumir que isso sempre é o caso, e omitir das nossas expressões os "Σ". Temos então:

i se repete! $\Rightarrow \sum_i$ implícita

$$d'^2_{AB} = (r'^i_B - r'^i_A)(r'^i_B - \vec{r}'^i_A)$$

$$= (r^j_B - r^j_A)(r^k_B - r^k_A) * R^i{}_j R^i{}_k$$

j repetido
k repetido
i repetido

Agora está claro que, na nossa última linha tivéssemos algo como

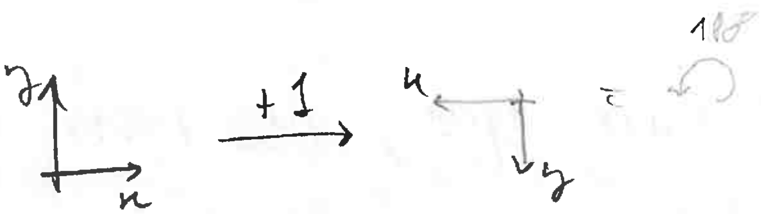
$$(r^j_B - r^j_A)(r^j_B - r^j_A) \longrightarrow d^2_{AB} \quad !$$

De fato, a condição para que a matriz R seja uma matriz de rotação é justamente que

$$R^i{}_j R^i{}_k = \delta_{jk} \iff \boxed{R \cdot R^{tr} = \mathbb{1}}$$

⑧ As matrizes que satisfazem essa condição (ou seja, que $R^{tr} = R^{-1}$) se chamam <u>matrizes ortogonais</u>.

O <u>determinante</u> das matrizes ortogonais são sempre +1 ou -1 (pois $\det R = \det R^{tr}$, e $(\pm 1)^2 = 1$), sendo que quando temos +1 a transformação preserva a <u>paridade</u> do referencial; e se é -1 a transformação inclui uma <u>reflexão</u>



As matrizes ortogonais $n \times n$ formam um <u>grupo</u>, chamado de $O(n)$, enquanto as matrizes ortogonais com $\det = +1$ formam o grupo $SO(n)$ (um sub-grupo de $O(n)$)

Mas afinal o que é um "grupo"?

<u>Definição</u>: Um grupo (G) é um conjunto de operações $(a, b, c, \ldots)$ tais que:

(i) * <u>Fechamento</u>: Para todo a, b em G, $a \cdot b$ também está em G

(ii) * <u>Associatividade</u>: Para todo $a, b, c \in G$,
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(iii) * <u>Elemento identidade</u>: Sempre existe $\mathbb{1} \in G$ tal que $\mathbb{1} \cdot a = a$, para qqr $a \in G$

(iv) * <u>Elemento inverso</u>: Para qualquer $a \in G$, o elemento $a^{-1} \in G$, sendo que $a^{-1} \cdot a = \mathbb{1} = a \cdot a^{-1}$

(10) Está claro que as matrizes de rotação em 2D formam um grupo, $SO(2)$:

det $R = 1$ ✓

(i) $R(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \operatorname{sen}\varphi_2 \\ -\operatorname{sen}\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$

$R(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \operatorname{sen}\varphi_2 \\ -\operatorname{sen}\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$

$$R(\varphi_1)\cdot R(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \operatorname{sen}\varphi_1 \\ -\operatorname{sen}\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \operatorname{sen}\varphi_2 \\ -\operatorname{sen}\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 & \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 \\ -\operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 & -\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$= R(\varphi_1+\varphi_2) \checkmark$$

✓

(ii) $R_1\cdot(R_2\cdot R_3) = (R_1\cdot R_2)\cdot R_3$ pela associatividade de matrizes

(iii) $\mathbb{1} = R(\varphi=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $R(\varphi)\cdot R(-\varphi) = \mathbb{1}$ (segue de (i)?!)

Nós dizemos que o grupo $SO(2)$ pode ser <u>representado</u> pelas matrizes de rotação $R(\varphi)$, onde φ é um <u>parâmetro contínuo</u> (e por isso $SO(n)$ são parte do que chamados de <u>grupos contínuos</u>)

O grupo $SO(2)$ tem uma característica interessante, mas que não se estende aos grupos $SO(n)$ com $n>2$: os elementos desse grupo <u>comutam</u>, ou seja,

$$R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1 \quad , \quad \text{ou} \quad [R_1, R_2] = $$
$$= R_1 \cdot R_2 - R_2 \cdot R_1 = 0$$

(12) Agora, vamos sair dos 2D e começar a voltar para os nossos 3D.

O grupo $SO(3)$, que pode ser representado pelas matrizes ortogonais 3×3 com $\det +1$, é o grupo das rotações em 3D!

Esse grupo tem <u>todas</u> as mesmas propriedades de $SO(2)$, exceto que:

(a) O grupo $SO(3)$ tem $\underline{3}$ parâmetros contínuos, correspondendo aos 3 graus de liberdade das rotações em 3D; e

(b) Os elementos desse grupo <u>não comutam</u>:

$$R_1 \cdot R_2 \neq R_2 \cdot R_1$$

[PODE O Misner-Thorne-Wheeler]

Porém, uma propriedade crucial dessas rotações é que são matrizes ortogonais.

$$R \cdot R^{th} = \mathbb{1} \,, \Rightarrow d'^2_{AB} = (r_B^j - r_A^j)\cdot(r_B^k - r_A^k)\cdot\delta_{jk} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = d^2_{AB}$$

Assim, chegamos no Grupo de Galileu.

G = ROTAÇÕES + TRANSLAÇÕES.

$$r^i \rightarrow r'^i = R^i_{\ j} r^j + V_0^i * t$$

3 parâmetros   3 parâmetros

ou:

$$r \rightarrow r' = G \cdot r$$

* $G_1 \cdot G_2 = G_3$ Ab no grupo de Galileu ✓

* $G_0 = \mathbb{1}$ ✓ , * $G_1 \cdot (G_2 \cdot G_3) = (G_1 \cdot G_2) G_3$ ✓

* G^{-1} → basta desfazer a translação e a rotação, com

$$R^{-1} = R^{tr} \quad e \quad \vec{V_0} \rightarrow -\vec{V_0}$$

A Mecânica de Newton, e em particular a Lei da Gravitação Universal de Newton, é invariante sob as transformações do Grupo de Galileu!