7 Teorema de Gauss

Assuntos

- Fluxo;
- Definição;
- Aplicação.

Referências bibliográficas

- Notas de aula;
- Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, vol. 3 . Grupo Gen-LTC, 2002.
- Callen, Herbert B. "Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics."(1998) (material de nível avançado);
- Apostila do Prof. Paulo Polito.

7.1 Fluxo

Inicialmente, vamos definir o que é fluxo. Este conceito está relacionado a quantidade de uma propriedade, por exemplo massa, que atravessa uma superfície em um determinado tempo. Vamos pensar nesta propriedade como sendo a massa. Assim, podemos definir que a massa (m) de um determinado fluido que atravessa uma determinada área (A) em um intervalo de tempo (Δt) é dada por:

$$m = \rho v A \Delta t \quad (7.1)$$

onde v é a velocidade deste fluido. Note que esta expressão é válida apenas no caso de uma velocidade com direção perpendicular a esta superfície. Para generalizar esta expressão para uma situação onde a velocidade incide obliquamente à superfície, podemos escrever:

$$m = \rho A \Delta t (\vec{v} \cdot \hat{n}) \quad (7.2)$$

onde $\vec{v}$ é o vetor velocidade e $\hat{n}$ é um versor normal à superfície. Podemos, neste caso, definir a grandeza vetorial $\vec{F}_m$ por:

$$\vec{F}_m = \rho \vec{v} \quad (7.3)$$

que tem unidade, no S.I, de $kgm^{-2}s^{-1}$ e, assim, representa um fluxo por unidade de área e de tempo.

Finalmente, definimos o fluxo de $\vec{F}_m$ na superfície A por:

$$F = \iint_A \vec{F}_m \cdot d\vec{A} \quad (7.4)$$

onde $d\vec{A} = \hat{n}dA$. Temos, portanto, que F representa o fluxo total de massa na superfície A e é dado em MT^{-1} ($kg s^{-1}$ no S.I.).

Exercise 16:

Calcule o fluxo de massa na superfície definida por:

$$\begin{aligned}x &= 0; \\ 0 &\leq y \leq 1km \\ -50m &\leq z \leq 0\end{aligned}$$

onde a velocidade, em ms^{-1} é constante e dada por $\vec{u} = 0.2\hat{i} + 0.1\hat{j}$, e a densidade do fluido é $\rho = 1 \times 10^3 kg m^{-3}$.

Solução:

- $d\vec{A} = \hat{i}$;
- $F_m = \int_0^{1000} \int_{-50}^0 (\rho\vec{u}) \cdot \hat{i} dz dy$
- $F_m = 10^3 \times 50 \times 10^3 \times 0.2 = 10^7 kg s^{-1}$

7.2 Teorema de Gauss

Vamos imaginar o mesmo fluxo em uma superfície, mas de lados opostos. Assim, temos que a única mudança, entre estes 2 lados, é a direção do versor normal à superfície. Teremos, portanto $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$. Assim, se somarmos os fluxos teremos:

$$\iint_{A_1} \vec{F}_m \cdot d\vec{A}_1 + \iint_{A_2} \vec{F}_m \cdot d\vec{A}_2 = 0 \quad (7.5)$$

Portanto, se pensarmos em um volume que contenha internamente esta superfície e decidirmos calcular o fluxo total na superfície deste volume, teremos que os fluxos internos não colaboram com o fluxo total na superfície. Na prática, podemos somar o fluxo na superfície de N volumes internos e o fluxo total será igual ao fluxo na superfície do volume total. Teremos, portanto:

$$\oiint_A \vec{F}_m \cdot d\vec{A} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{A}_i = \sum_{n=1}^N \frac{\vec{F}_i \cdot d\vec{A}_i}{\Delta V_i} \Delta V_i \quad (7.6)$$

No limite em que $N \rightarrow \infty$, teremos $\Delta V_i \rightarrow dV_i$. Ainda:

$$\frac{d\vec{A}_i}{dV_i} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (7.7)$$

e teremos, também, a somatória transformando-se numa integral. Ficamos, portanto, com:

$$\oiint_A \vec{F}_m \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (7.8)$$

que é o Teorema de Gauss. Este é conhecido, também, como o teorema da divergência.

7.3 Aplicação

No caso da oceanografia física, este teorema pode ser aplicado para qualquer propriedade como, por exemplo, a massa total e de sal. Mais tarde este teorema será usado para se estabelecer a equação da continuidade.

Exercise 17:

Mostre que um fluido de densidade ρ contido em um volume V tem fluxo total na superfície nulo se $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, onde $\vec{u}$ é a velocidade do fluido.

Solução:

(i) O fluxo total na superfície é dado por $F = \oiint_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A}$

(ii) Teremos, também:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

(iii) Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \oiint_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \oiint_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow F = 0$$

8 Teorema de Stokes

Assuntos

- Definição;
- Aplicações.

Referências bibliográficas

- Notas de aula;
- Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, vol. 3 . Grupo Gen-LTC, 2002.
- Kundu, Pijush K., Ira M. Cohen, and D. W. Dowling. "Fluid Mechanics 4th."(2008): 1-277;
- Apostila do Prof. Paulo Polito.

8.1 Definição

Matematicamente, a demonstração do Teorema de Stokes é bastante simples. Suponha um campo vetorial dado por $\vec{F} = a(x, y)\hat{i} + b(x, y)\hat{j}$. O rotacional deste campo vetorial é dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \hat{k} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{k} = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \quad (8.1)$$

Integrando a equação acima em uma determinada área A , no plano xy , podemos escrever:

$$\iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{k}) dx dy = \iint_A \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy \quad (8.2)$$

Mas usando o Teorema de Green (Equação 1.21), teremos:

$$\oint_C (a dx + b dy) = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{k}) dx dy \quad (8.3)$$

De maneira mais geral, podemos definir a equação acima em termos do vetor $d\vec{l}$, que é o vetor infinitesimal que acompanha tangencialmente o contorno, e o vetor $d\vec{A}$, que é o vetor infinitesimal normal à superfície, como visto anteriormente. Neste caso, teremos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot d\vec{A} \quad (8.4)$$

8.2 Aplicação

O Teorema de Stokes será importante para entendermos questões relacionadas a vorticidade e circulação de um fluido, que serão abordadas mais tarde no curso.

Exercise 18:

Determine o rotacional médio de uma função $\vec{F}$ dada por:

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j}$$

Dentro da área A definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.