AULA 5

Formalismo da Mecânica Quântica (Continuação)

Há um aspecto que merece atenção especial: o deslocamento de todas as coordenadas. Para construir um operador unitário que faça isso é necessário agrupar as 3 componentes das coordenadas e dos momentos de cada partícula em operadores vetoriais

$\vec{x}_1 = (q_1, q_2, q_3) \quad \vec{x}_2 = (q_4, q_5, q_6)$ etc.

Assim $\vec{x}_n, \vec{p}_n \quad n = 1, 2, \ldots, N$ são os novos operadores

O deslocamento pelo vetor $\vec{a}$ deve então ser produzido pelo operador unitário $T(\vec{a})$ que generaliza $T(a)$ com

$$\boxed{T(\vec{a})^+ \, \vec{x}_n \, T(\vec{a}) = \vec{x}_n + \vec{a}} \quad (1) \qquad \vec{a} \text{ o mesmo } \forall n$$

Como os operadores de momento individual comutam entre si então

$$T(\vec{a}) = \prod_{n=1}^{N} e^{-i \frac{\vec{p}_n \cdot \vec{a}}{\hbar}} = e^{-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{\hbar}} \quad (2)$$

onde $\vec{p} = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n$ (momento total do sistema)

Relações de Incerteza

As relações de incerteza de Heisenberg p/ coord e mom. é um exemplo das relações que valem p/ todos os pares de observáveis incompatíveis

Definimos: a incerteza da medida do observável A, ΔA, é dada por

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (3)$$

suponha que temos 3 operadores tais que

$[A, B] = iC$ onde $C = C^+$

se definirmos:

$\bar{A} = A - \langle A \rangle$ $\quad$ $\bar{B} = B - \langle B \rangle$, assim

$(\Delta A)^2 = \langle \bar{A}^2 \rangle$ $\quad$ $(\Delta B)^2 = \langle \bar{B}^2 \rangle$

$\bar{A}|\phi\rangle = |\phi_A\rangle$ $\quad$ $\bar{B}|\phi\rangle = |\phi_B\rangle$

assim

$$(\Delta A \, \Delta B)^2 = \langle \phi | \bar{A}^2 | \phi \rangle \langle \phi | \bar{B}^2 | \phi \rangle \geq |\langle \phi_A | \phi_B \rangle|^2$$

(desigualdade de Schwartz)

$$= \langle \phi_A | \phi_A \rangle \langle \phi_B | \phi_B \rangle$$

$$= |\langle \phi | \bar{A} \bar{B} | \phi \rangle|^2$$

$$\Rightarrow (\Delta A \, \Delta B)^2 \geq |\langle \bar{A} \bar{B} \rangle|^2$$

mas $\bar{A}\bar{B} = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) = AB - A\langle B \rangle - B\langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle$

$$= \frac{1}{2}[\bar{A}, \bar{B}] + \frac{1}{2}\{\bar{A}, \bar{B}\} = \frac{i}{2} C + \frac{1}{2}\{\bar{A}, \bar{B}\}$$

operadores hermitianos

$[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}$

$\{\bar{A}, \bar{B}\} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}$

$$\Rightarrow (\Delta A \Delta B)^2 \geq |\langle \bar{A}\bar{B} \rangle|^2$$

$$\geq \left| \frac{i}{2}\langle C \rangle + \frac{1}{2}\langle \{\bar{A},\bar{B}\} \rangle \right|^2$$

$$\geq \frac{1}{4} \left| \langle \{\bar{A},\bar{B}\} \rangle + i\langle C \rangle \right|^2$$

Como valores esperados são números reais e o valor absoluto de um # complexo é $\geq$ a sua parte imaginária temos então

$$\boxed{(\Delta A \Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle| = \frac{1}{2} |\langle [A,B] \rangle|} \quad (4)$$

forma geral das relações de incerteza.

ex:

$$\Delta p_i \Delta q_j \geq \frac{1}{2} \hbar \delta_{ij}$$

III - Equação de Movimento

(a) ~~da~~ Descrição de Schrödinger

O princípio de superposição requer que a evolução temporal seja uma transformação linear

Assumiremos que a evolução temporal será representada por um operador unitário parametrizado por um parâmetro $t \equiv$

Se $|\psi;0\rangle$ é o estado do sistema em $t=0$ então

$|\psi;t\rangle = L_t |\psi;0\rangle$ (1) é o estado do sistema no instante t

L_t: operador linear

Considere um observável A independente do tempo com espectro $(a', a'', \dots)$. O valor esperado como função de t é

$$\langle \psi;t|\, A\, |\psi;t\rangle = \sum_a \langle \psi;t|a\rangle\, a\, \langle a|\psi;t\rangle$$

$$= \sum_a a\, |\langle \psi;t|a\rangle|^2 \quad (2)$$

Em geral as probabilidades $|\langle \psi;t|a\rangle|^2$ mudam com o tempo, mas por hipótese, os auto-valores não!

$$\langle \psi;t|A|\psi;t\rangle = \langle \psi;0|\, L_t^+ A\, L_t |\psi;0\rangle$$

$$= \sum_{a_t} a_t\, |\langle \psi;0|a_t\rangle|^2$$

$\{|a_t\rangle\}$ são auto-vetores de $L_t^+ A\, L_t$ com autovalores $\{a_t\}$ mas o espectro não pode mudar com o tempo. Qualquer transformação unitária de um operador hermitiano deixa seu espectro invariante. Esse é o fato que justifica assumir que L_t seja um operador unitário

Logo existe $U(t',t)$ tal que

$$|\psi;t'\rangle = U(t',t)\, |\psi;t\rangle \quad (2)$$

Considere inicialmente um sistema isolado de forma que a origem dos tempos não tenha significado físico. Nesse caso

$$U(t',t) \equiv U(t'-t) \quad (3)$$

Esses operadores precisam obedecer a lei de composição

$$U(t-t')\, U(t'-t_0) = U(t-t_0) \quad (4)$$

se $t_0 = t$ $\quad U(0) = \mathbb{1}$ (5a)

assumi $\Rightarrow$ $U(t-t')\,U(t'-t) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow U^{-1}(t-t') = U(t'-t) = U^{+}(t-t')$ (5b)

$$U(t_2)\,U(t_1) = U(t_2+t_1) \quad (5c)$$

assim para uma variação infinitesimal δt

temos $U(\delta t) = \mathbb{1} + \delta U(\delta t)$, $\delta t \to 0$, $U(\delta t) \to \mathbb{1}$

$\Rightarrow U(\delta t) = 1 - i\,\Delta(\delta t)$

$\Delta(\delta t)$ deve ser um operador hermitiano infinitesimal. de forma que U seja unitário em 1ª ordem em Δ:

$U^{+}(\delta t)\,U(\delta t) = (1+i\Delta)(1-i\Delta) = 1 + \varphi(\Delta^2)$

$= (1+\delta U^{+})(1+\delta U) = 1 + \delta U + \delta U^{+} + \varphi(\delta U^2)$

$\Rightarrow \delta U + \delta U^{+} = 0 \Rightarrow \delta U = i \times$ operador hermitiano.

A lei de composição (5c) leva a

$[1 - i\,\Delta(\delta t_1)]\,[1 - i\,\Delta(\delta t_2)] = 1 - i\,\Delta(\delta t_1 + \delta t_2)$

$\Delta(\delta t_1) + \Delta(\delta t_2) = \Delta(\delta t_1 + \delta t_2) \Rightarrow \Delta(\delta t) \propto \delta t$

$$\boxed{U(\delta t) = 1 - i\,\frac{\delta t}{\hbar}\,H} \quad (6)$$ H não depende de t.

$$U(t+\delta t) = U(t)\,U(\delta t)$$

$$U(t+\delta t) - U(t) = U(t)\,(U(\delta t) - 1)$$

$$= (U(\delta t) - 1)\,U(t) \quad \text{(usando (6))}$$

$$= -i\,\frac{\delta t}{\hbar}\,H\,U(t) \quad (7)$$

tornando o $\lim_{\delta \to 0}$

$$\frac{U(t+\delta t) - U(t)}{\delta t} = \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (8)$$

$$\boxed{i\hbar\,\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H\,U(t)} \quad (9a)$$

$$\boxed{U(t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \qquad U(0) = \mathbb{1}} \quad (9b)$$

operador de translação no tempo.

H não depende de t

A equação de Schrödinger vem de (2) e (9a)

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi;t\rangle &= i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,U(t)\;|\psi;0\rangle \\ &= H\,U(t)\,|\psi;0\rangle = H\,|\psi;t\rangle \end{aligned}} \quad (10)$$

Como sabemos os autoketos de H têm importância especial
Para encontrados pensamos resolver a equação de autovalores

$$(H - E)\,|\psi_E;0\rangle = 0 \quad (11)$$

Equação de Schrödinger indep. do tempo

$$|\psi_E;t\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}\,|\psi_E;0\rangle = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\,|\psi_E;0\rangle \quad (12)$$

estados estacionários

$$\langle \psi_E; t | A | \psi_{E'}; t \rangle = \langle \psi_E; 0 | e^{+i\frac{Ht}{\hbar}} A e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \psi_{E'}; 0 \rangle$$

$$= e^{i\frac{(E-E')t}{\hbar}} \langle \psi_E; 0 | A | \psi_{E'}; 0 \rangle$$

qualquer observável A independente do tempo tem um elemento de matriz entre estados estacionários cuja dependência temporal aparece só na fase!

Consideremos agora um sistema de N-partículas descrito por um Hamiltoniano que tem a forma familiar de Mecânica Clássica quando as forças não dependem de velocidade

$$\boxed{H = \sum_{n=1}^{N} \frac{\vec{p}_n^{\,2}}{2m_n} + V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)} \quad (13)$$

$\vec{x}_1 = (q_1, q_2, q_3)$ → operadores $\quad \vec{x}_n$ operador das coord.

$\vec{r}_1 = (q_1', q_2', q_3')$ → autovalores $\quad \vec{r}_n$ autovalores deste operador

Vamos agora colocar a equação de Schrödinger (10) na representação das coordenadas. Lembramos que

$$\langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | (\vec{p}_n)^p | \psi; t \rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\right)^p \psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; t)$$

assim:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | \psi; t \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | \frac{\vec{p}_n^{\,2}}{2m_n} | \psi; t \rangle$$

$$+ \langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n) | \psi; t \rangle$$

usando (10) e (13)

$$\langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | \psi; t \rangle = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N; t) \equiv \Psi(t)$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m_n} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \right)^2 + V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \right] \Psi(t)} \quad (14)$$

obs:

$$\langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N) | \psi; t \rangle = \int d\vec{r}_1' \ldots d\vec{r}_N' \; \langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N)$$

$$| \vec{r}_1' \ldots \vec{r}_N' \rangle \langle \vec{r}_1' \ldots \vec{r}_N' | \psi; t \rangle$$

onde $\langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_N) | \vec{r}_1' \vec{r}_2' \ldots \vec{r}_N' \rangle = V(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) \langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | \vec{r}_1' \ldots \vec{r}_N' \rangle$

$$= V(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) \, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \ldots \delta(\vec{r}_N - \vec{r}_N')$$

$$\langle \vec{r}_1' \ldots \vec{r}_N' | \psi; t \rangle = \Psi(\vec{r}_1', \ldots, \vec{r}_N'; t)$$

logo

$$\langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N | V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n | \psi; t \rangle = \int d\vec{r}_1' \ldots d\vec{r}_N' \; V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \ldots$$

$$\delta(\vec{r}_N - \vec{r}_N') \cdot \psi(\vec{r}_1', \ldots, \vec{r}_N'; t) = V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \, \psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; t)$$

$$= V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \, \psi(t)$$

O produto escalar de quaisquer duas soluções da Equação de Schrödinger é independente do tempo

$$\langle \psi_1; t | \psi_2; t \rangle \equiv \langle \psi_1; 0 | \psi_2; 0 \rangle \quad (15)$$

A norma é um caso particular de (15)

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi;t|\psi;t\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_N \langle\psi;t|\vec{r}_1\ldots\vec{r}_N\rangle\langle\vec{r}_1\ldots\vec{r}_N|\psi;t\rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{r}_1\ldots d\vec{r}_N \left|\psi(\vec{r}_1\ldots\vec{r}_N,t)\right|^2 \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{r}_1\ldots d\vec{r}_N\, w(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t) \quad (16)$$

Usando uma notação enxuta p/ Eq. de Schrödinger na base das coord.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\vec{r}|\psi\rangle = \langle\vec{r}|H|\psi\rangle \quad (17a)$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\vec{r}\rangle = \langle\psi|H|\vec{r}\rangle \quad (17b)$$

e para Eq. (16)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(\vec{r},t)|^2 \quad (16')$$

(para ser entendido na notação completa acima)

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\vec{r}\rangle\right)\psi(\vec{r},t) + i\hbar\,\psi^*(\vec{r},t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\vec{r}|\psi\rangle\right) = -\langle\psi|H|\vec{r}\rangle\psi(\vec{r},t)$$

$$+\psi^*(\vec{r},t)\langle\vec{r}|H|\psi\rangle \quad (17) \qquad H = V + T$$

---

(1) $\langle\vec{r}|\,V(\vec{x}_1\ldots\vec{x}_N)\psi\rangle = V(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)\langle\vec{r}|\psi\rangle$: V é diagonal na representação das coordenadas não contribui para o lado direito de (17)

(2) $\langle\vec{r}\,|\,K\,|\psi\rangle = \frac{1}{2m_n}\langle\vec{r}\,|\,\vec{p}_n^{\,2}|\psi\rangle = \frac{1}{2m_n}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_n}\right)^2\psi(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t)$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_n}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_n}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_n}\psi(\vec{r},t)$$

(3) $\langle\psi\,|\,k\,|\vec{r}\rangle = \frac{1}{2m_n}\langle\psi\,|\,\vec{p}_n^{\,2}|\vec{r}\rangle = \frac{\psi^*(\vec{r},t)}{2m_n}\left(i\hbar\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\vec{r}_n}}\right)^2$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_n}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_n}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_n}\psi^*(\vec{r},t)$$

$$\therefore \psi^*(\vec{r},t)\,\langle \vec{r}|K|\psi\rangle = -\psi^*(\vec{r},t)\,\frac{\hbar^2}{2m_n}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\,\psi(\vec{r},t)$$

$$\langle \psi|K|\vec{r}\rangle\,\psi(\vec{r},t) = \frac{-\hbar^2}{2m_n}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\,\psi^*(\vec{r},t)\;\psi(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{r}_1 \ldots d\vec{r}_N\; w(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N; t) = -\int d\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\hbar^2}{2m_n}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\cdot \left(\psi^*\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\psi - \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial \vec{r}_n}\right)\right]$$

logo em uma região infinitesimal do espaço de configuração temos:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\,w(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N; t) + \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\cdot \vec{\imath}_n(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots, \vec{r}_N, t) = 0} \quad (18)$$

Equação de Continuidade

onde

$$\boxed{\vec{\imath}_n = \frac{\hbar}{2m_n i}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\psi^*\right)} \quad (19)$$

para um estado estacionário, i.e. $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, a equação de continuidade se reduz à condição que a corrente tem divergente nulo

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}\cdot \vec{\imath}_n = 0$$

Até agora discutimos a evolução temporal de estados puros. E misturas? Voltemos ao formalismo de matriz densidade ou operador estatístico.

Seja $\{|a\rangle\}$ a base que diagonaliza um certo operador estatístico ρ em $t=0$.

$$\rho(0) = \sum_a |a\rangle\, p_a \,\langle a| \quad (20)$$

em um tempo posterior $|a\rangle \to e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|a\rangle$

$$\boxed{\rho(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\, \rho(0)\, e^{\frac{iHt}{\hbar}}} \quad (21)$$

p_a não muda com t.

logo

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{-iH}{\hbar} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0)\, e^{\frac{iHt}{\hbar}} + \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0)\, e^{\frac{iHt}{\hbar}} H$$

$$= \frac{-i}{\hbar} H \rho(t) + \frac{i}{\hbar} \rho(t) H = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho]$$

$$\therefore \boxed{i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)]} \quad (22)$$ Equação de Movimento da Matriz Densidade.

Para finalizar a descrição de Schrödinger vamos considerar agora um sistema exposto a forças dependentes do tempo $\underline{H = H(t)}$.

Nesse caso a origem do tempo não é mais arbitrária. A dependência temporal de H quebra explicitamente essa simetria.

$$U(t', t) \neq U(t' - t)$$

A lei de composição é agora

$$U(t'', t')\, U(t', t) = U(t'', t) \quad (23)$$

podemos mostrar que nesse caso (lista 2)

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H(t)\, U(t, t')} \quad (24)$$

a forma para a Eq. de Schrödinger dependente de t é a mesma

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi; t\rangle = H(t)\, |\psi; t\rangle} \quad (25)$$

Note que o produto escalar de duas soluções dos tipos continua independente do tempo!

Mas $[H(t), H(t')] \neq 0$ a solução não é mais trivial!

Voltaremos aqui mais adiante.

(b) Descrição de Heisenberg.

Embora as descrições de Schrödinger e Heisenberg sejã equivalentes, a de Heisenberg é mais útil para mostrar simetrias e leis de conservação, ela é indispensável para sistemas com muitos graus de liberdade.

Schrödinger: { estados evoluem com t
observáveis não evoluem com t

a não ser que seja explicitamente dependente de t eg $H(t)$

Heisenberg: { estados não evoluem com t
observáveis evoluem com t.

Assume que H não depende de t : $U(t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$

Seja $\{|\psi_b; t\rangle\}$ um conj completo de soluções de Eq. de Schrödinger, $|\psi_b; t=0\rangle = |\psi_b\rangle$

Seja A um observável independente de t.

$$\langle \psi_b; t | A | \psi_b; t \rangle = \langle \psi_b | e^{\frac{iHt}{\hbar}} A e^{\frac{-iHt}{\hbar}} | \psi_b \rangle$$

- os ket que descrevem a evolução temporal de estados puros estão fixos no espaço de Hilbert

- $A_H(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} A_S e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$ (1)

$$|\psi, t\rangle_S = U(t) |\psi\rangle_H \quad (2)$$

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{iH}{\hbar} A_H(t) - \frac{i}{\hbar} A_H(t) H = -\frac{i}{\hbar} [A_H, H]$$

Equação de Movimento de Heisenberg.

$$\boxed{i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H]} \quad (3)$$

$$H_H = e^{\frac{iHt}{\hbar}} H_S e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = H_S = H$$

⇒ observáveis que comutam com H são constantes do movimento

⇒ qualquer const. de movimento pode ser diagonalizada simultaneamente com H (tem autoestados simultâneos)

Um ket $|\alpha\rangle_S$ que é estacionário na representação de Schrödinger transforma-se no ket

$$|\alpha(t)\rangle_H = U^+(t)\,|\alpha\rangle_S \qquad (4)$$

Um observável que é explicitamente dependente do tempo na representação de Schrödinger $B_S(t)$ na representação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} B_H(t) = i\hbar \frac{\partial B_H(t)}{\partial t} + [B_H(t), H] \qquad (5)$$

Se $H_S = H_S(t)$ Generalização

$$A_H(t,t') = U^+(t,t')\, A_S\, U(t,t') \qquad (6)$$

Se $H_S = \sum \frac{p_n^2}{2m_n} + V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = U^+ H U = H_H = H$

$V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n) = V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n, t)$

mas $p_j = p_j(t)$

$$i\hbar \frac{dq_i}{dt}(t) = [q_i(t), H_H]$$

$$[q_i(t), p_j(t)] = U^+ q_i U\, U^+ p_j U - U^+ p_j U\, U^+ q_i U$$

$$= U^+ q_i p_j U - U^+ p_j q_i U = U^+ [q_i, p_j] U = i\hbar\, \delta_{ij}$$

$$[q_i(t), p_j^2(t)] = i\hbar\, 2\, p_j(t)\, \delta_{ij}$$

- $i\hbar \frac{dq_i}{dt}(t) = [q_i(t), H] = \frac{1}{2m_i} [q_i(t), p_i^2] = \frac{i\hbar}{m_i} p_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$
- $i\hbar \frac{dp_i(t)}{dt} = [p_i(t), H] = [p_i(t), V] = U^+ [p_i, V] U = U^+ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial V}{\partial q_i} U$

$$\boxed{\frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \qquad (7) \qquad \boxed{\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{p_i(t)}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \qquad (8)$$