aula do dia 12/03

Gráficos de controle para monitorar a proporção p

$p \to$ probabilidade de um evento.

Uma amostra é coletada e as observações $x_1, x_2, \dots, x_n$ anotadas.

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se não ocorrer o evento de interesse} \\ 1 & \text{se ocorrer o evento de interesse} \end{cases}$$

$X_i \to$ V.a. Bernoulli (p)

Estimador de p: $\hat{p} = \dfrac{\sum X_i}{n}$

Distribuição de X - Bernoulli

$$X \to \begin{cases} 1 \to p \\ 0 \to 1-p \end{cases} \quad \begin{aligned} E(X) &= p \\ Var(X) &= p(1-p) \end{aligned}$$

Distribuição de $\sum X_i = Y$

$Y \to$ soma de Bernoulli

Distribuição exata de Y

$Y \sim$ Binomial (n, p)

$Y \sim$ número de casos favoráveis ao - em $\underline{n}$ realizações.

$$P(Y=y) = \binom{n}{y} p^{y} (1-p)^{n-y}$$

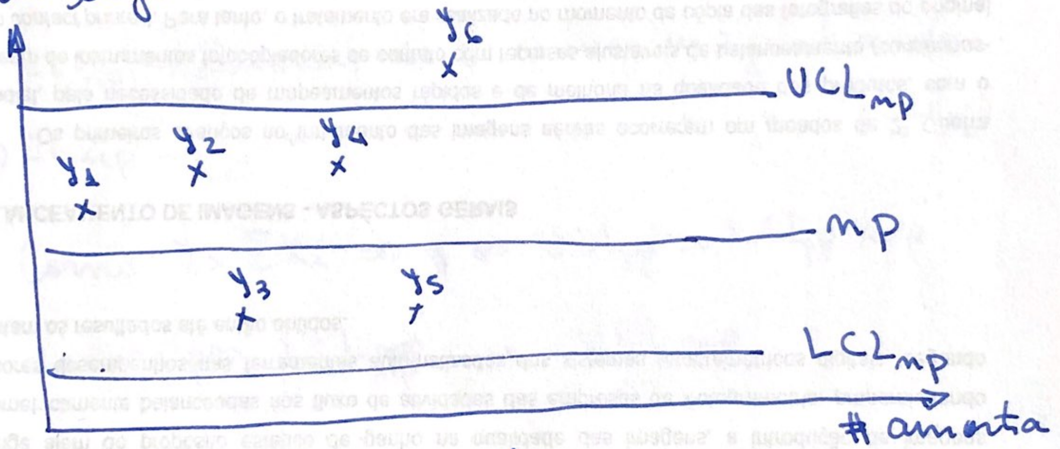
$$E(Y) = np \quad e \quad Var(Y) = np(1-p)$$

Monitoramento de p pode ser feito através de dois modos.

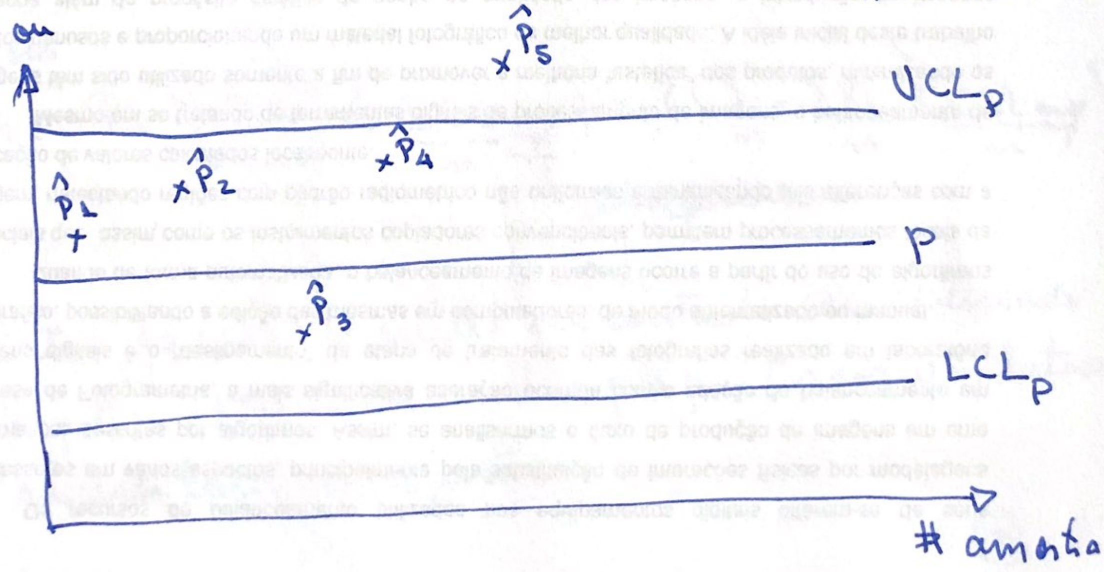
→ Estatísticas monitoradas: $\hat{p}$ ou ~~np~~ $Y = n\hat{p}$

$$\hat{p} \downarrow \frac{\sum X_i}{n} \qquad Y = n\hat{p} \downarrow \cancel{n}\,\frac{\sum X_i}{\cancel{n}}$$

ou seja:



ou



Limites de controle - distribuição exata.

Como conhecemos a distribuição exata de $\sum X_i = Y$

os limites de controle podem ser obtidos:

Seja α = a prob do erro do tipo I, então

$$\alpha/2 = P(Y < LCL_{np}) = P(Y > UCL_{np})$$

ATENÇÃO: São dados discretos. Pode não atingir o valor de α desejado

$LCL_{np} \rightarrow$ Quantil de Y menor ou igual a $\alpha/2$

$UCL_{np} \rightarrow$ " " " " " " $1-\alpha/2$

~~Se~~ Como $Y = \sum X_i \Rightarrow$ os UCL_p e LCL_p são

dados por $\frac{LCL_{np}}{n}$ e $\frac{UCL_{np}}{n}$

Pois

$$\alpha/2 = P\Big(\frac{Y}{n} = \underbrace{\frac{\sum X_i}{n}}_{\hat{p}} < \frac{LCL_{np}}{n}\Big) = P\Big(\frac{Y}{n} = \frac{\sum X_i}{n} > \frac{UCL_{np}}{n}\Big)$$

Estes são os limites de controle considerando hipótese alternativa $H_1: p \neq p_0$. Casos unilat necessitam de ajustes

$$\alpha = P(Y < LCL_{np}) = P(Y > UCL_{np})$$

LCL_{np} ↓ limite p/ $H_1: p < p_0$

UCL_{np}: limite p/ $H_1: p > p_0$.

ou $P(\hat{p} < LCL_p) = P(\hat{p} > UCL_p)$

$$LCL_p = \frac{LCL_{np}}{n} \qquad UCL_p = \frac{UCL_{np}}{n}$$

Limites de controle - distribuição aproximada de $\sum X_i$

$X_i \longrightarrow$ Bernoulli (p)

$\sum X_i \xrightarrow{TCL} N(np, np(1-p))$

limites de controle p/ np aproximado

Sob H_0:

$$np_0 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{np_0(1-p_0)} \quad \begin{cases} LCL_{np_{ap}} \\ UCL_{np_{ap}} \end{cases}$$

ou

$$p_0 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad \begin{cases} LCL_{p_{ap}} \\ UCL_{np_{ap}} \end{cases}$$

No caso unilateral:

$$np_0 + z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} \quad \text{ou} \quad np_0 - z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)}$$

ou

$$p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad \text{ou} \quad p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

$H_1: p < p_0$ $\qquad$ $H_1: p > p_0$

Função poder

Poder $= 1 - \beta$

$\beta = P(\text{aceito } H_0 \,/\, p = p_0 \text{ é falsa})$

Poder – limites exatos.

$$1-\beta = P(Y > UCL_{np} | p_1) + P(Y < LCL_{np} | p_1)$$

No caso bilateral

Caso unilateral

$$1-\beta = P(Y > UCL_{np} | p_1) \rightarrow H_1: p > p_0$$

ou

$$P(Y < LCL_{np} | p_1) \rightarrow H_1: p < p_0$$

Poder – com limites aproximados.

$$P(Y > np_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{np_0(1-p_0)} \,|\, p_1) + P(Y < np_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{np_0(1-p_0)} \,|\, p_1)$$

Caso bilateral

Unilateral

$$P(Y > np_0 + z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} \,|\, p_1) \quad \text{ou} \quad P(Y < np_0 - z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} \,|\, p_1)$$

$H_1: p > p_0$ $\qquad$ $H_1: p < p_0$

Exercício

a) Dados $n = 10$ e $p = 0.1$. Obter os limites de controle p/ com $\alpha = 0.10$; 0.05; 0.0027

b) Repetir para $n = 50$.

d) Repetir com os dados do item a, obter os limites aproximados com $\alpha = 0.10$, 0.05 e 0.0027

e) O que você pode constatar?

Usemos funções do R.

dbinom(x, n, p_0) → Prob de no ponto x

pbinom(x, n, p_0) → Prob acum até x

qbinom(p, n, p_0) → Valor inteiro c/ prob acum até p

rbinom(m, n, p_0) → gera uma amostra m distribuição binomiais(n, p_0)