Aula 03

tensão e deformação

carregamento axial

ZEB 0566

Resistência dos Materiais

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

FZEA USP

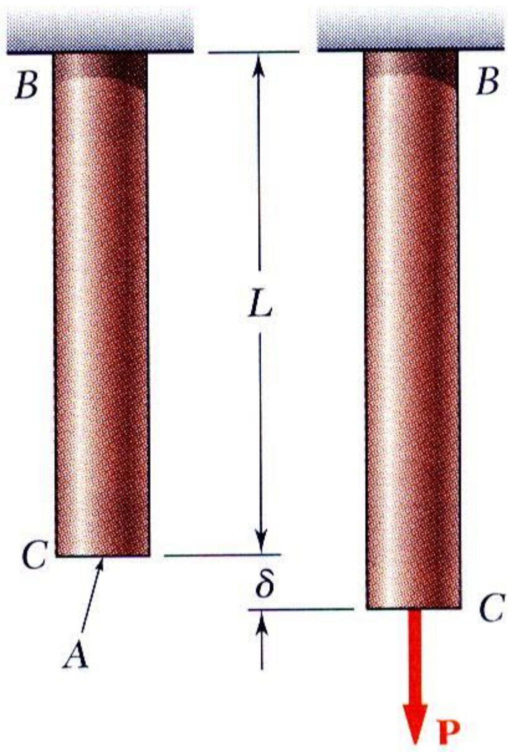
Prof. João Adriano Rossignolo

Prof. Holmer Savastano Júnior

tensão x deformação

- *lei de Hooke*
- *módulo de elasticidade*

Deformação sob Carregamento Axial



- Da **lei de Hooke**:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

- A **<u>deformação</u>** é expressa por:

$$\delta = \frac{P.L}{A.E}$$

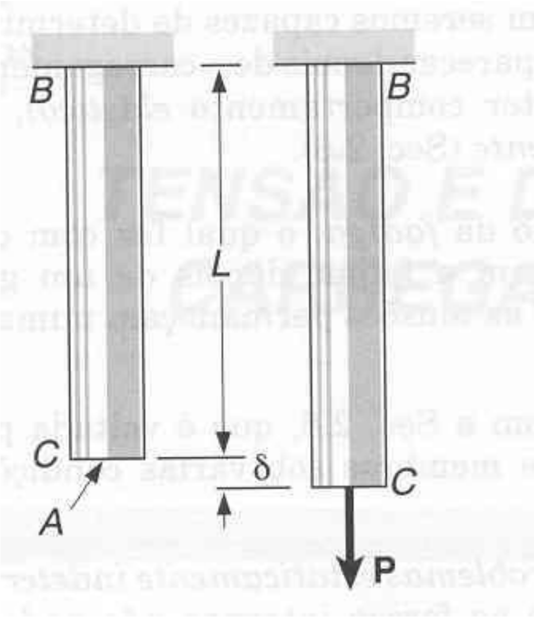
- Da definição de **<u>deformação específica</u>**:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

- **<u>Módulo de deformação</u>**:

$$E = \sigma/\varepsilon$$

Deformação específica normal sob carregamento axial:



Carregamento axial

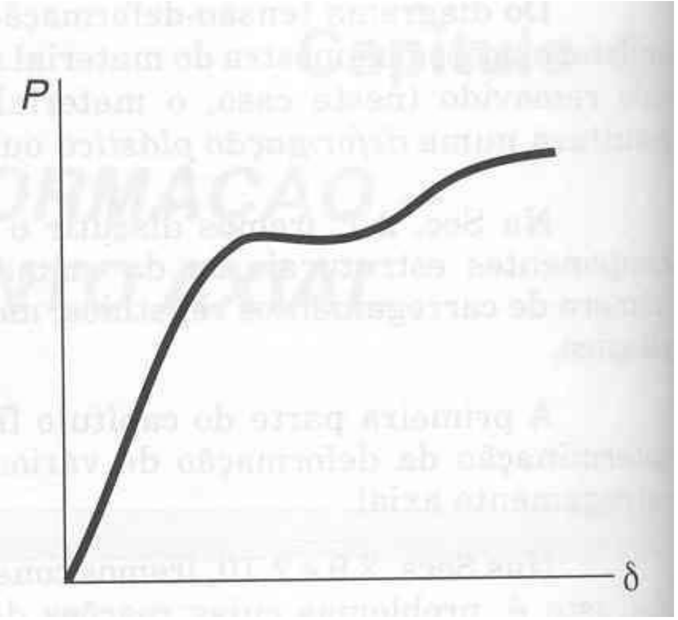
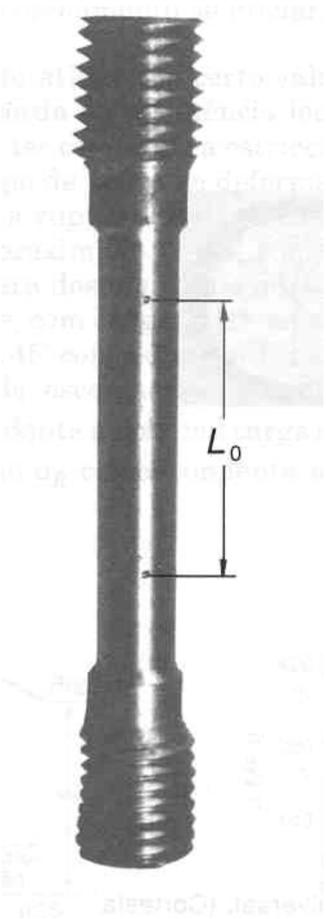


Diagrama carga - deformação

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Diagrama tensão - deformação

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$



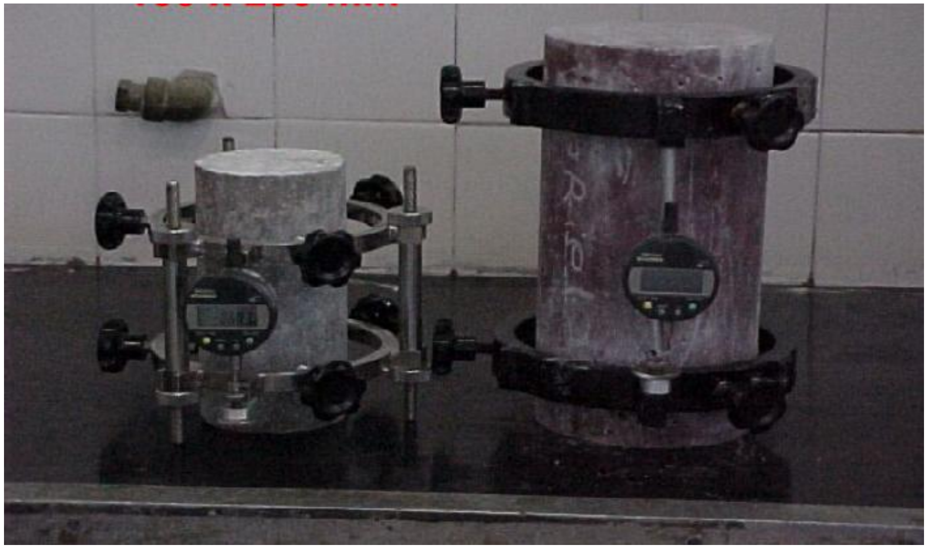
$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

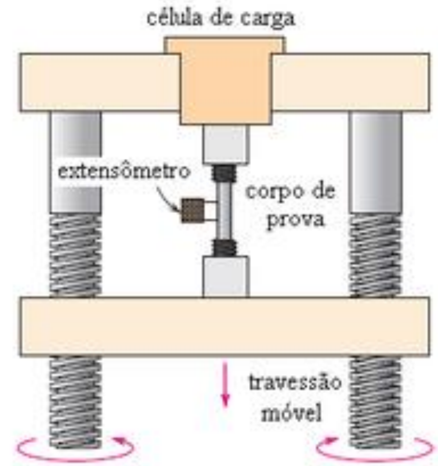
L = *compr. final*

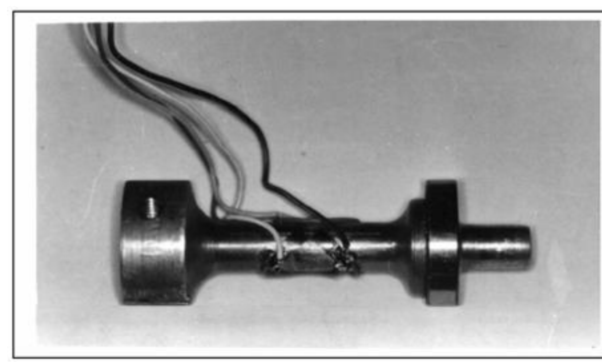
L_0 = *compr. inicial*

Corpo-de-prova para ensaio de tração axial em metais

Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young

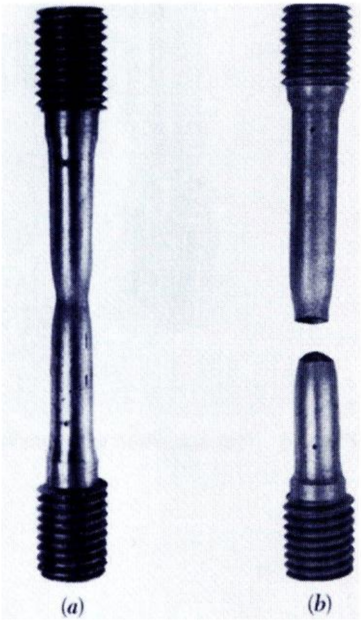


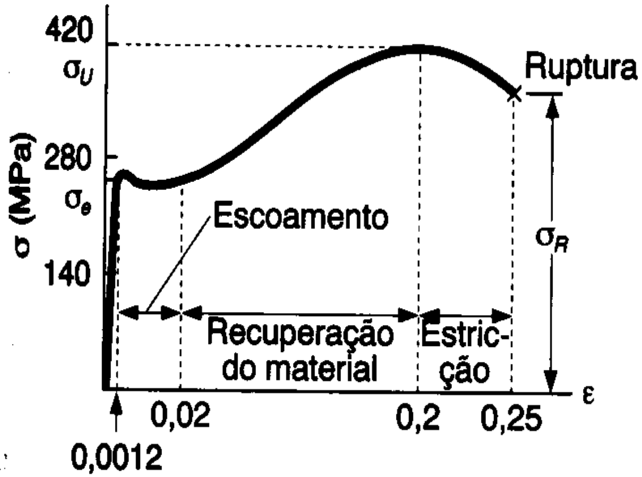




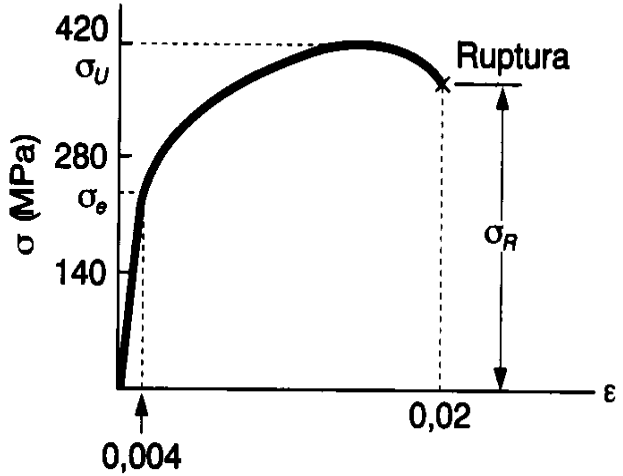

INSTRON
INSTRON
INSTRON
4206

Diagrama Tensão - Extensão: Materiais Dúcteis





(a) Aço com baixo teor de carbono



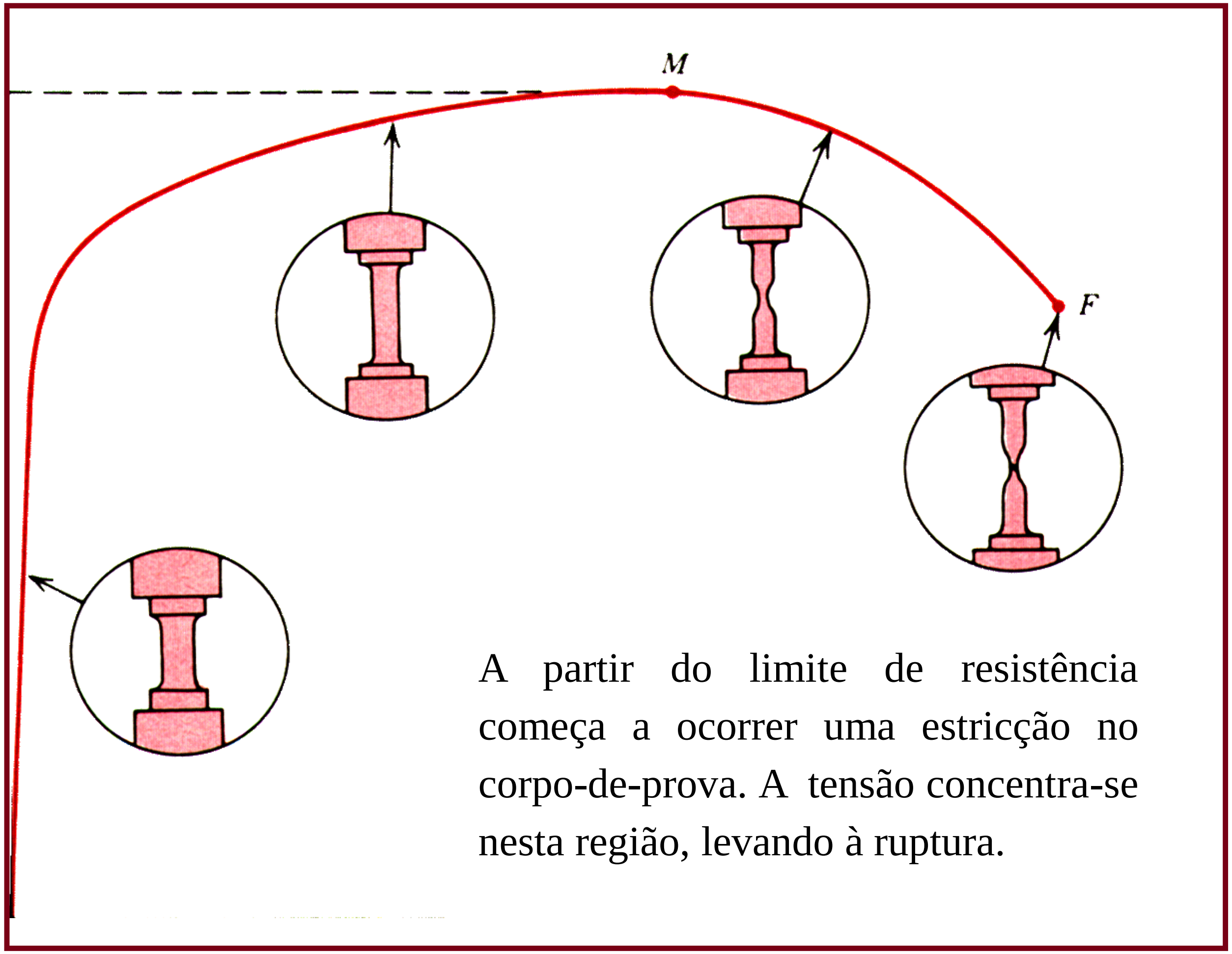
(b) Liga de alumínio

$$E = \sigma/\varepsilon$$

Estricção e limite de resistência

Limite de resistência

σ

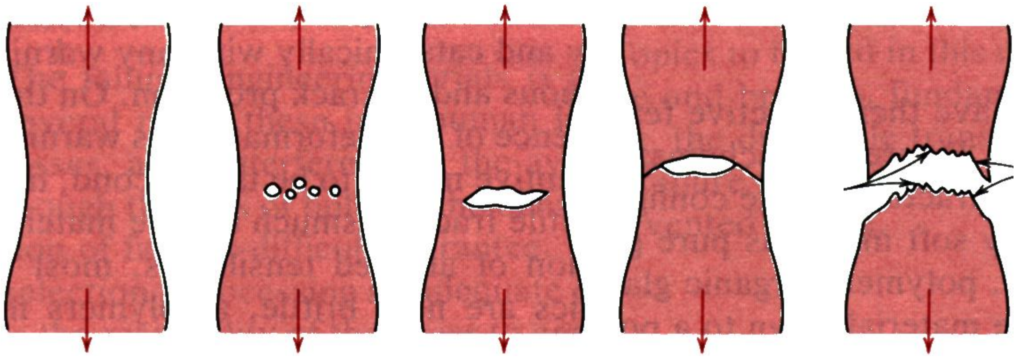


A partir do limite de resistência começa a ocorrer uma estricção no corpo-de-prova. A tensão concentra-se nesta região, levando à ruptura.

ε

Ruptura dúctil e frágil

- Ruptura dúctil
  - o material deforma-se substancialmente antes de fraturar.
  - O processo desenvolve-se de forma relativamente lenta à medida que a fenda se propaga.
  - Este tipo de fenda é denominado **estável** porque ela para de se propagar a menos que haja uma aumento da tensão aplicada no material.



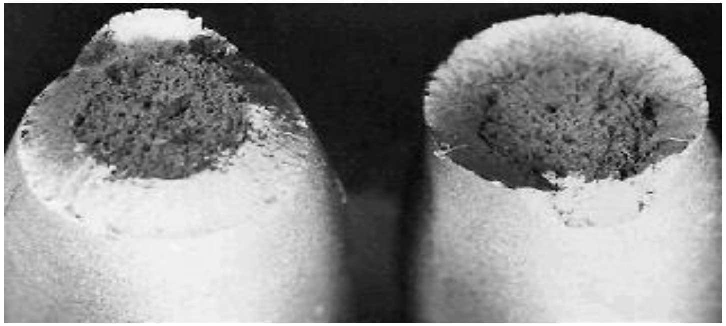
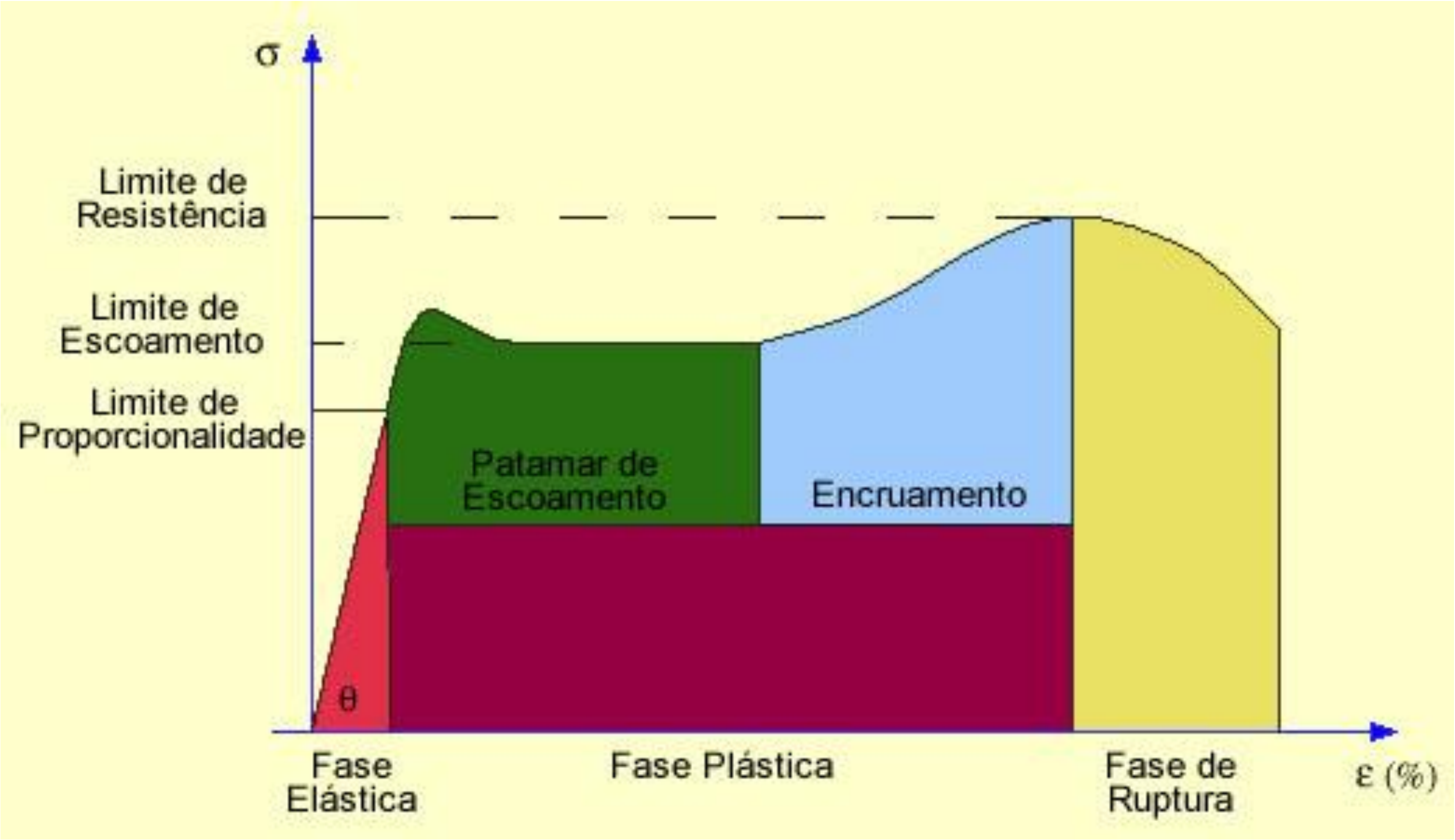


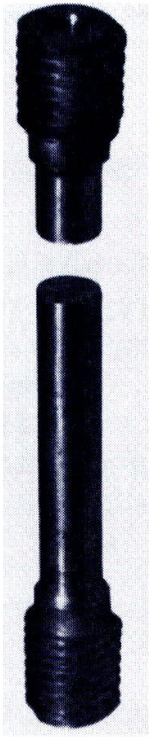
Diagrama Tensão - Extensão: Materiais Dúcteis (aço)



$$E = \sigma/\varepsilon$$

Diagrama Tensão - Extensão: **Materiais Frágeis**

$$\sigma U = \sigma R$$



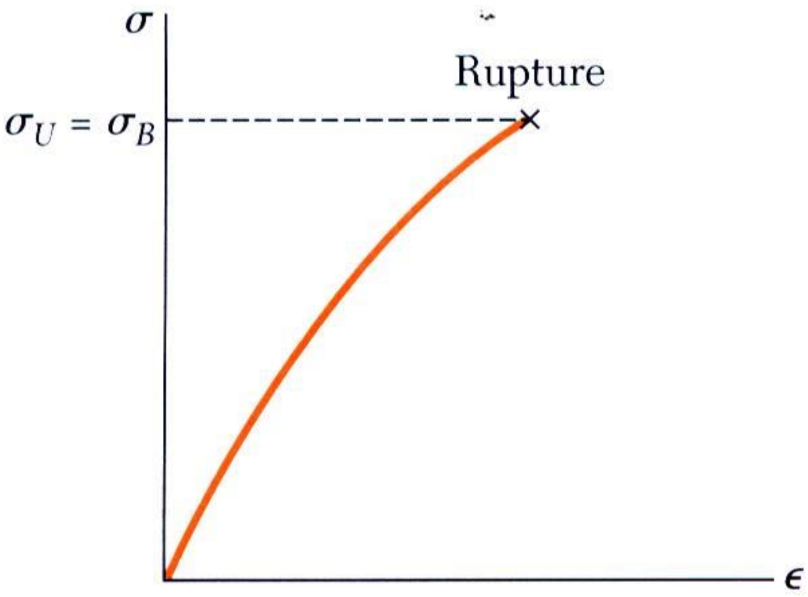
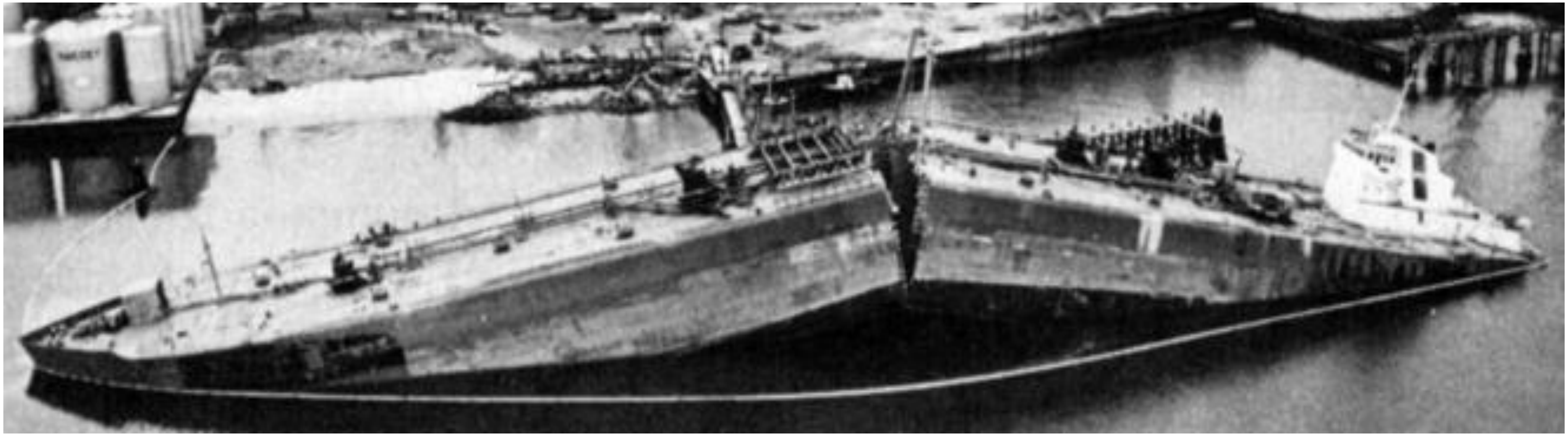


Fig. 2.11 Stress-strain diagram for a typical brittle material.

Fratura

O processo de fratura é normalmente súbito e catastrófico, podendo gerar grandes acidentes.



Envolve duas etapas: formação de fenda e propagação.

Pode assumir dois modos: **dúctil e frágil.**

Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young

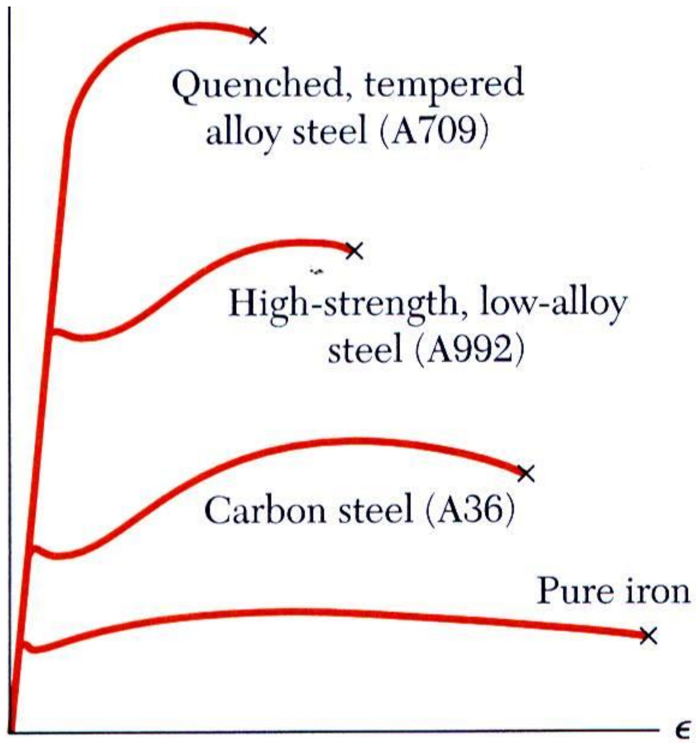


Fig. 2.16 Stress-strain diagrams for iron and different grades of steel.

Parte inicial do diagrama:

$$\sigma = E\varepsilon$$

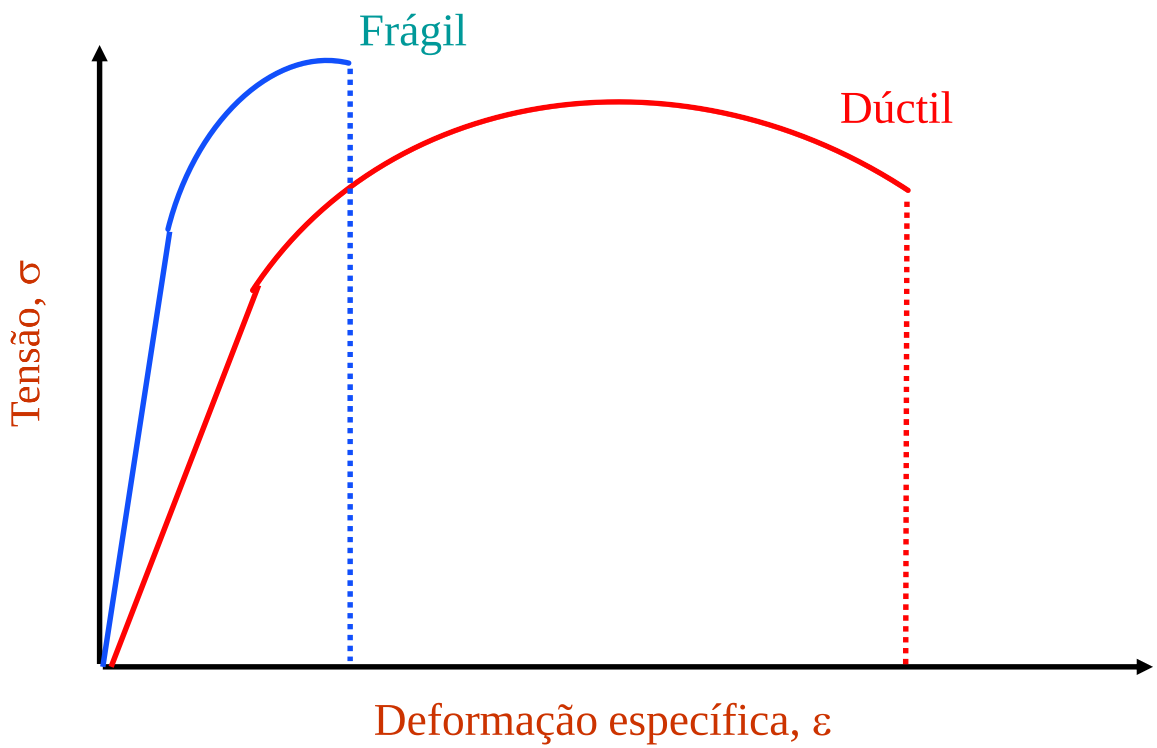
E = módulo de elasticidade ou módulo de Young

Limite de proporcionalidade = limite validade lei Hooke

Tenacidade

- Tenacidade (toughness) é a capacidade que o material possui de absorver energia mecânica até a fratura.

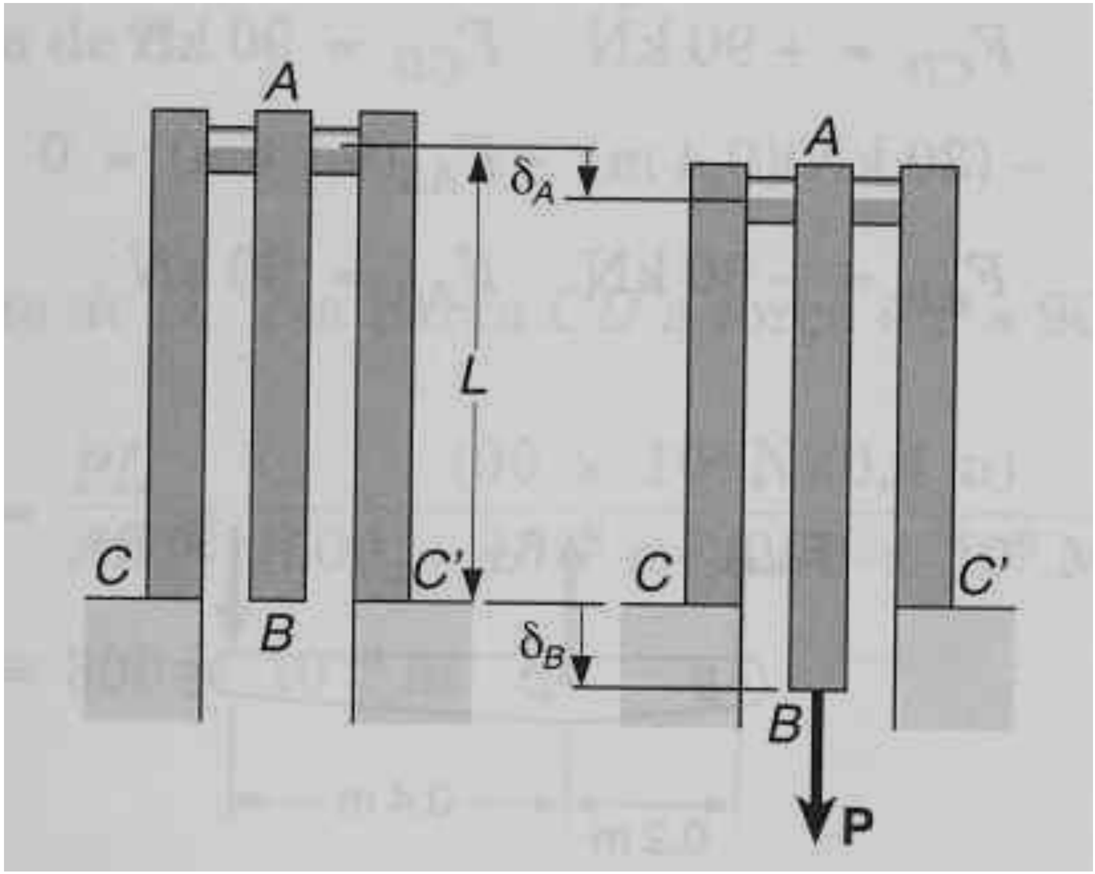
Área sob a curva σ–ε até a fractura



Deslocamento relativo:

Barras com as duas extremidades livres

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE}$$



Exercícios

Ex

Um arame de aço de 2.2 m de comprimento não deve alongar-se mais do que 1.2 mm, ao se aplicar uma tração de 8,5 kN.

Sendo E = 200 GPa, determine:

A) O menor diâmetro que pode ser especificado para o arame.

B) O valor correspondente da tensão normal.

(a) $\delta = \dfrac{PL}{AE} \quad \therefore \quad A = \dfrac{PL}{E\delta} = \dfrac{(8.5\times10^{3})(2.2)}{(200\times10^{9})(1.2\times10^{-3})} = 77.92\times10^{-6}\ m^2$

$A = \dfrac{\pi}{4}d^2 \quad \therefore \quad d = \sqrt{\dfrac{4A}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{(4)(77.92\times10^{-6})}{\pi}} = 9.96\times10^{-3}\ m$

$= 9.96\ mm$

(b) $\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{8.5\times10^{3}}{77.92\times10^{-6}} = 109.1\times10^{6}\ Pa = 109.1\ MPa$

Ex Uma força tração de 9kN é aplicada em um arame de 50m de comprimento com E = 200GPa. Determine o menor diâmetro do arame sabendo que a tensão de tração não pode ultrapassar 150 MPa e que o aumento do comprimento do arame não pode ser maior que 25mm.

Considering allowable stress $\sigma = 150 \times 10^{6}$ Pa

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \therefore \quad A = \frac{P}{\sigma} = \frac{9 \times 10^{3}}{150 \times 10^{6}} = 60 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Considering allowable elongation $\delta = 25 \times 10^{-3}$ m

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad \therefore \quad A = \frac{PL}{E\delta} = \frac{(9 \times 10^{3})(50)}{(200 \times 10^{9})(25 \times 10^{-3})} = 90 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Larger area governs $A = 90 \times 10^{-6}$ m^2

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 \qquad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(90 \times 10^{-6})}{\pi}} = 10.70 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 10.70 \text{ mm}$$

Determine a deformação da barra de aço mostrada na Fig. 2.23*a* submetida às forças dadas ($E = 200\text{GPa}$).

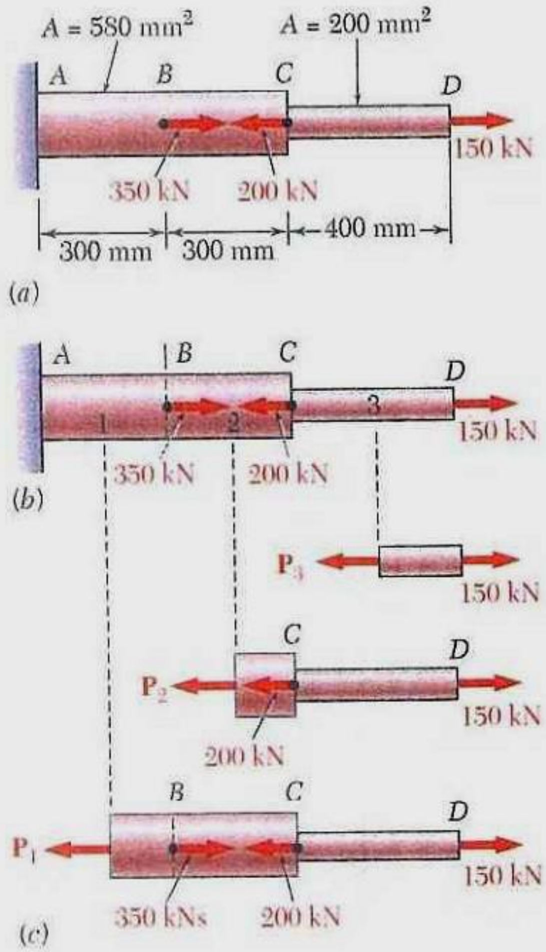


Fig. 2.23

Dividimos a barra em três partes componentes mostradas na Fig. 2.23*b* e escrevemos

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm} \qquad L_3 = 400 \text{ mm}$$
$$A_1 = A_2 = 580 \text{ mm}^2 \qquad A_3 = 200 \text{ mm}^2$$

Para encontrarmos as forças internas P_1, P_2 e P_3, devemos cortar cada uma das partes componentes, desenhando para cada corte o diagrama de corpo livre da parte da barra localizada à direita da seção (Fig. 2.23*c*). Impondo a condição de que cada um dos corpos livres está em equilíbrio, obtemos sucessivamente

$$P_1 = 300 \text{ kN}$$
$$P_2 = -50 \text{ kN}$$
$$P_3 = 150 \text{ kN}$$

Usando os valores obtidos na Equação (2.8), temos

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$
$$= \frac{1}{200}\left[\frac{(300 \times 300)}{580} + \frac{(-50)(300)}{580} + \frac{150 \times 400}{200}\right]$$
$$\delta = \frac{429{,}31}{200} = 2{,}15 \text{ mm}.$$

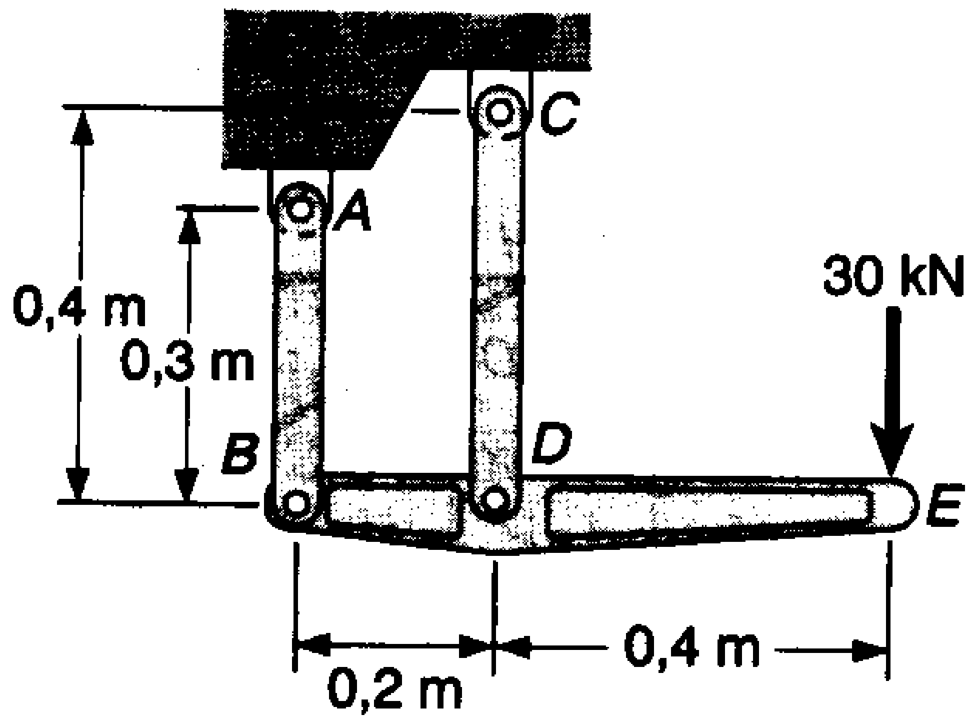
PROBLEMA RESOLVIDO 2.1 (BEER)

A barra rígida BDE é suspensa por duas hastes AB e CD. A haste AB é de alumínio (E = 70 GPa) com área da seção transversal de 500 mm^2; a haste CD é de aço (E = 200 GPa) com área da seção transversal de 600 mm^2. Para a força de 30 kN determine:

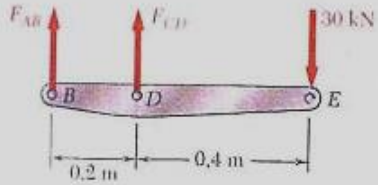
A) Deslocamento de B.

B) Deslocamento de D.

C) Deslocamento de E.



SOLUÇÃO



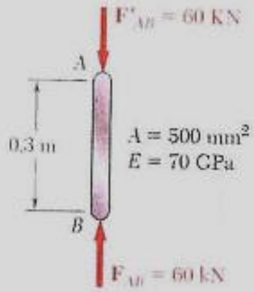
Corpo Livre: Barra *BDE*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -(30\text{ kN})(0{,}6\text{ m}) + F_{CD}(0{,}2\text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN} \quad \textit{tração}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad -(30\text{ kN})(0{,}4\text{ m}) - F_{AB}(0{,}2\text{ m}) = 0$$

$$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN} \quad \textit{compressão}$$

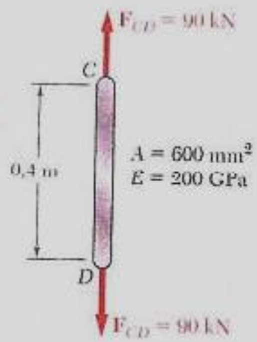


***a*. Deslocamento do ponto *B*.** Como a força interna na barra AB é de compressão, temos $P = -60$ kN

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0{,}3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

O sinal negativo indica uma contração do elemento AB e, portanto, um deslocamento da extremidade B para cima:

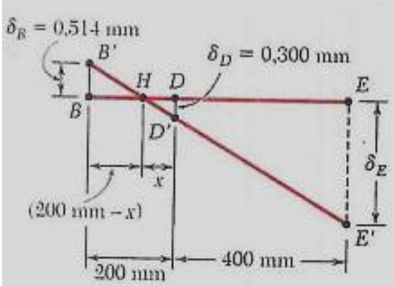
$$\delta_B = 0{,}514\text{ mm} \uparrow \blacktriangleleft$$



***b*. Deslocamento do ponto *D*.** Como a força interna na barra CD é $P = 90$ kN, escrevemos

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\text{ N})(0{,}4\text{ m})}{(600 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(200 \times 10^9\text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\text{ m} \qquad \delta_D = 0{,}300\text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$



***c*. Deslocamento do ponto *E*.** Designamos por B' e D' as posições deslocadas dos pontos B e D. Como a barra BDE é rígida, os pontos B', D' e E' estão em uma linha reta e escrevemos

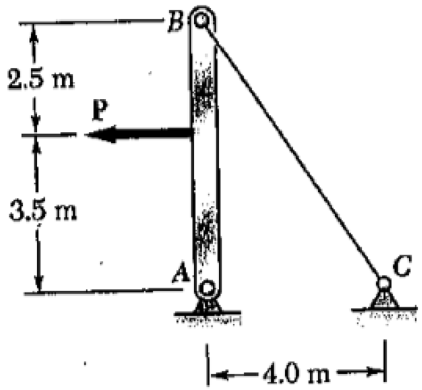
$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0{,}514\text{ mm}}{0{,}300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73{,}7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0{,}300\text{ mm}} = \frac{(400\text{ mm}) + (73{,}7\text{ mm})}{73{,}7\text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1{,}928\text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEM 2.11

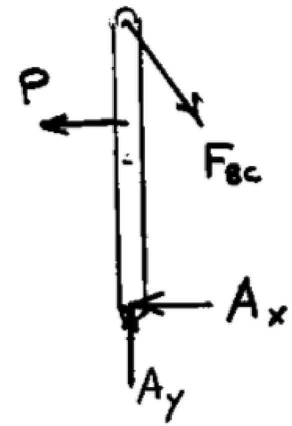
2.11 The 4-mm-diameter cable BC is made of a steel with $E = 200$ GPa. Knowing that the maximum stress in the cable must not exceed 190 MPa and that the elongation of the cable must not exceed 6 mm, find the maximum load **P** that can be applied as shown.



SOLUTION

$$L_{BC} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7.2111 \text{ m}$$

Use bar AB as a free body



$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \qquad 3.5P - (6)\left(\frac{4}{7.2111} F_{BC}\right) = 0$$

$$P = 0.9509 \, F_{BC}$$

Considering allowable stress $\sigma = 190 \times 10^6$ Pa

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(0.004)^2 = 12.566 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{F_{BC}}{A} \therefore \quad F_{BC} = \sigma A = (190 \times 10^6)(12.566 \times 10^{-6}) = 2.388 \times 10^3 \text{ N}$$

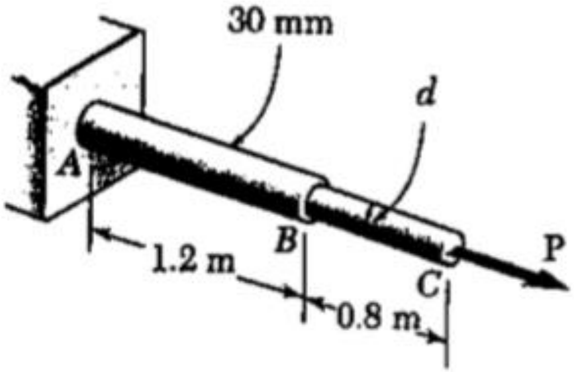
Considering allowable elongation $\delta = 6 \times 10^{-3}$ m

$$\delta = \frac{F_{BC} L_{BC}}{AE} \therefore F_{BC} = \frac{AE\delta}{L_{BC}} = \frac{(12.566 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)(6 \times 10^{-3})}{7.2111} = 2.091 \times 10^3 \text{ N}$$

Smaller value governs $\qquad F_{BC} = 2.091 \times 10^3$ N

$$P = 0.9509 \, F_{BC} = (0.9509)(2.091 \times 10^3) = 1.988 \times 10^3 \text{ N} = 1.988 \text{ kN}$$

Ex. Uma força P = 58kN é aplicada no ponto C da estrutura ABC. Sabendo que o material apresenta E = 105GPa, determine o valor de *d* Da porção BC para que a deformação do ponto C seja de 3 mm.



SOLUTION

$$\delta_C = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E} = \frac{P}{E}\left\{\frac{L_{AB}}{A_{AB}} + \frac{L_{BC}}{A_{BC}}\right\}$$

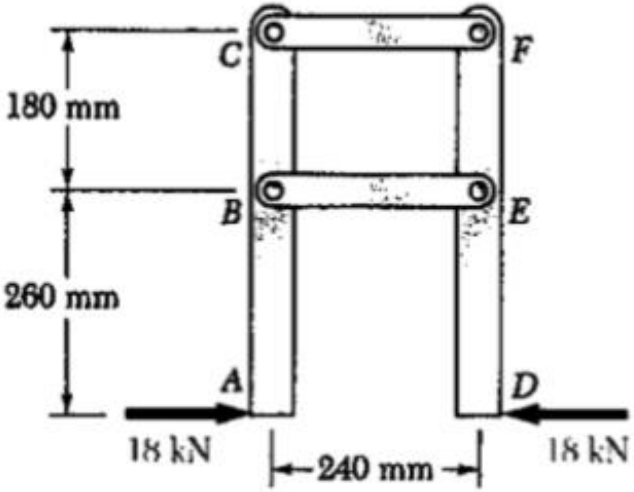
$$\frac{L_{BC}}{A_{BC}} = \frac{E\delta_C}{P} - \frac{L_{AB}}{A_{AB}} = \frac{(105\times10^9)(3\times10^{-3})}{58\times10^3} - \frac{1.2}{\frac{\pi}{4}(0.030)^2} = 3.7334\times10^3\ m^{-1}$$

$$A_{BC} = \frac{L_{BC}}{3.7334\times10^3} = \frac{0.8}{3.7334\times10^3} = 214.28\times10^{-6}\ m^2$$

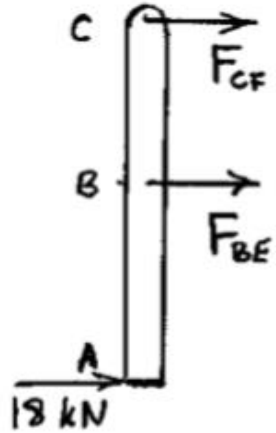
$$A_{BC} = \frac{\pi}{4} d_{BC}^2 \ \therefore\ d_{BC} = \sqrt{\frac{4A_{BC}}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(214.28\times10^{-6})}{\pi}} = 16.52\times10^{-3}\ m$$

$$= 16.52\ mm$$

2.26 Members *ABC* and *DEF* are joined with steel links ($E = 200$ GPa). Each of the links is made of a pair of 25×35-mm plates. Determine the change in length of (*a*) member *BE*, (*b*) member *CF*.



SOLUTION



Use member ABC as a free body

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$

$$(0.260)(18\times10^3) - (0.180)F_{CF} = 0$$

$$F_{CF} = \frac{(0.260)(18\times10^3)}{0.180} = 26\times10^3 \text{ N}$$

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \qquad (0.440)(18\times10^3) + (0.180)F_{BE} = 0$

$$F_{BE} = -\frac{(0.440)(18\times10^3)}{0.180} = -44\times10^3 \text{ N}$$

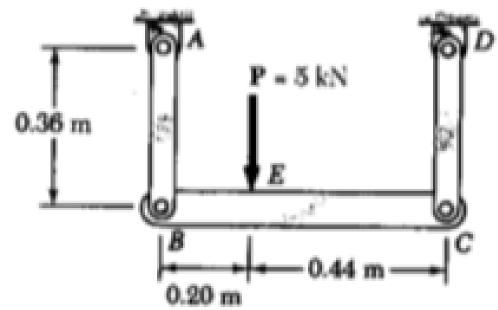
Area for link made of two plates

$$A = (2)(0.025)(0.035) = 1.75\times10^{-3} \text{ m}^2$$

(a) $$\delta_{BE} = \frac{F_{BE}L_{BE}}{EA} = \frac{(-44\times10^3)(0.240)}{(200\times10^9)(1.75\times10^{-3})} = -30.2\times10^{-6} \text{ m} = -0.0302 \text{ mm}$$ ◄

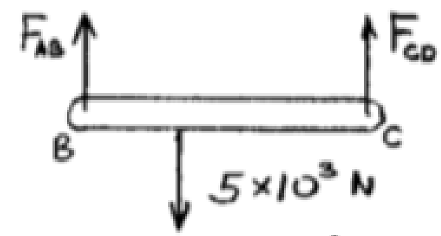
(b) $$\delta_{CF} = \frac{F_{CF}L_{CF}}{EA} = \frac{(26\times10^3)(0.240)}{(200\times10^9)(1.75\times10^{-3})} = 17.83\times10^{-6} \text{ m} = 0.01783 \text{ mm}$$ ◄

PROBLEM 2.27



2.27 Each of the links AB and CD is made of aluminum ($E = 75$ GPa) and has a cross-sectional area of 125 mm². Knowing that they support the rigid member BC, determine the deflection of point E.

SOLUTION



Use member BC as a free body

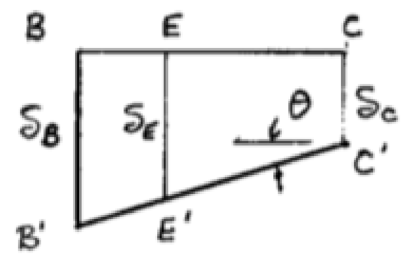
$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \qquad -(0.64)F_{AB} + (0.44)(5\times10^3) = 0 \qquad F_{AB} = 3.4375\times10^3 \text{ N}$

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \qquad (0.64)F_{CD} - (0.20)(5\times10^3) = 0 \qquad F_{CD} = 1.5625\times10^3 \text{ N}$

For links AB and CD $\qquad A = 125 \text{ mm}^2 = 125\times10^{-6} \text{ m}^2$

$$\delta_{AB} = \frac{F_{AB}L_{AB}}{EA} = \frac{(3.4375\times10^3)(0.36)}{(75\times10^9)(125\times10^{-6})} = 132.00\times10^{-6} \text{ m} = \delta_B$$

$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD}L_{CD}}{EA} = \frac{(1.5625\times10^3)(0.36)}{(75\times10^9)(125\times10^{-6})} = 60.00\times10^{-6} \text{ m} = \delta_C$$



Deformation diagram

$$\text{Slope } \theta = \frac{\delta_B - \delta_C}{l_{BC}} = \frac{72.00\times10^{-6}}{0.64} = 112.5\times10^{-6} \text{ rad}$$

$$\delta_E = \delta_C + l_{EC}\theta$$

$$= 60.00\times10^{-6} + (0.44)(112.5\times10^{-6})$$

$$= 109.5\times10^{-6} \text{ m} = 0.1095 \text{ mm}$$

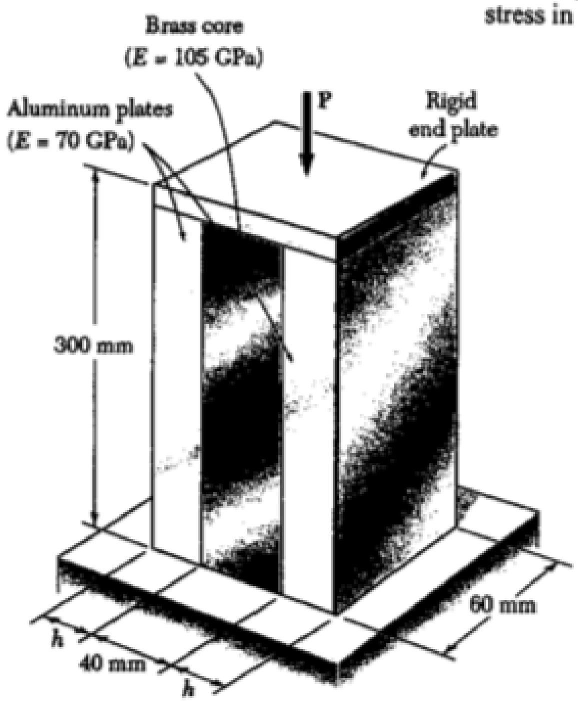
Problemas estaticamente indeterminados:

Estática: diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio

Relações entre deformações ou forças

PROBLEM 2.36

2.36 An axial centric force of magnitude $P = 450$ kN is applied to the composite block shown by means of a rigid end plate. Knowing that $h = 10$ mm, determine the normal stress in (*a*) the brass core, (*b*) the aluminum plates.



SOLUTION

Let P_b = portion of axial force carried by brass core

P_a = portion carried by two aluminum plates

$$\delta = \frac{P_b L}{E_b A_b} \qquad P_b = \frac{E_b A_b \delta}{L}$$

$$\delta = \frac{P_a L}{E_a A_a} \qquad P_a = \frac{E_a A_a \delta}{L}$$

$$P = P_b + P_a = (E_b A_b + E_a A_a)\frac{\delta}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{P}{E_b A_b + E_a A_a}$$

$$A_b = (60)(40) = 2400 \text{ mm}^2 = 2400 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

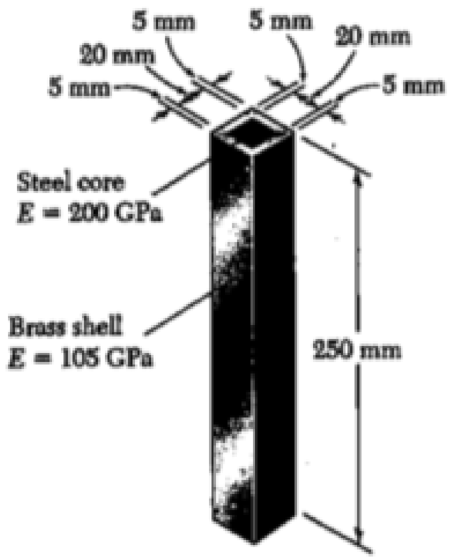
$$A_a = (2)(60)(10) = 1200 \text{ mm}^2 = 1200 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\varepsilon = \frac{450 \times 10^3}{(105 \times 10^9)(2400 \times 10^{-6}) + (70 \times 10^9)(1200 \times 10^{-6})} = 1.3393 \times 10^{-3}$$

(a) $\sigma_b = E_b \varepsilon = (105 \times 10^9)(1.3393 \times 10^{-3}) = 140.6 \times 10^6 \text{ Pa} = 140.6 \text{ MPa}$ ◀

(b) $\sigma_a = E_a \varepsilon = (70 \times 10^9)(1.3393 \times 10^{-3}) = 93.75 \times 10^6 \text{ Pa} = 93.75 \text{ MPa}$ ◀

PROBLEM 2.34



2.34 The length of the assembly decreases by 0.15 mm when an axial force is applied by means of rigid end plates. Determine (*a*) the magnitude of the applied force, (b) the corresponding stress in the steel core.

SOLUTION

Let P_b = portion of axial force carried by brass shell.

P_s = portion of axial force carried by steel core.

$$\delta = \frac{P_b L}{A_b E_b} \qquad P_b = \frac{E_b A_b \delta}{L}$$

$$\delta = \frac{P_s L}{A_s E_s} \qquad P_s = \frac{E_s A_s \delta}{L}$$

$$P = P_b + P_s = (E_b A_b + E_s A_s)\frac{\delta}{L}$$

$$A_s = (0.020)(0.020) = 400 \times 10^{-6}\ m^2$$

$$A_b = (0.030)(0.030) - (0.020)(0.020) = 500 \times 10^{-6}\ m^2$$

(a) $$P = [(105\times10^9)(500\times10^{-6}) + (200\times10^9)(400\times10^{-6})]\frac{0.15\times10^{-3}}{250\times10^{-3}}$$

$$= 79.5\times10^3\ N \qquad = 75.9\ kN$$

(b) $$\sigma_s = E_s\varepsilon = \frac{E_s\delta}{L} = \frac{(200\times10^9)(0.15\times10^{-3})}{250\times10^{-3}} = 120\times10^6\ Pa$$

$$= 120\ MPa$$