MAT 1513 – LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA
1º SEMESTRE DE 2020
PROF^{A}. DANIELA

SEMANA 16/03 A 20/03

AULA 2 - FUNÇÕES

Nessa aula irei retomar o conceito de função bijetora. Relembrando:

Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é **bijetiva/bijetora** se f é injetora **e** sobrejetora. Também dizemos que f é uma bijeção, ou ainda, uma correspondência (ou relação) biunívoca entre X e Y.

- A função do Exemplo 1.1 da Aula 1 é bijetora.
- A função do Exemplo 1.2 da Aula 1 não é bijetora.
- As funções dos Exemplos 2.1 e 2.2 da Aula 1 não são bijetoras.
- A função do Exemplo 2.3 da Aula 1 é bijetora.

Justifique cada uma das afirmações acima

Vejamos mais exemplos de funções bijetoras.

Exemplo 3

3.1) Considere os conjuntos $\mathbb{N}$ (números naturais) e $P = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ é par} \}$. Definamos a função $\varphi : \mathbb{N} \to P$ dada por $\varphi(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- φ **é injetora:** de fato, se $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que $n \neq m$ então é claro que $2n \neq 2m$, isto é, $\varphi(n) \neq \varphi(m)$.

- φ **é sobrejetora:** de fato, dado um elemento $p \in P$, temos que p é par. Então $p = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, para cada $p \in P$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) = p$.

Como φ é injetora **e** sobrejetora, temos que φ é bijetora.

Para pensar... Você consegue definir uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números naturais ímpares? E uma bijeção entre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$?

No estudo dos conjuntos, as bijeções (ou relações biunívocas) possuem um papel importante. Falarei um pouco sobre isso na sequência, mas você ainda vai estudar sobre isso em outras disciplinas.

Dados dois conjuntos X e Y, se existir uma função bijetora entre eles, então dizemos que eles tem o mesmo **número cardinal**, o que possuem a mesma **cardinalidade**.

O número cardinal de qualquer **conjunto finito** é a quantidade de elementos que ele possui. Se um conjunto (qualquer) possui 4 elementos, é porque existe uma bijeção entre ele e o conjunto $\{1,2,3,4\}$. Por exemplo, se A é o conjunto de todos os números naturais primos menores do que 10, sabemos que $A=\{2,3,5,7\}$. Sabemos que A possui quatro elementos, o primeiro deles é o 2, o segundo é o 3, o terceiro é o 5 e o quarto é o 7. Dessa forma, construímos uma relação biunívoca entre $\{1,2,3,4\}$ e A da seguinte forma:

- $\varphi(1)=2$
- $\varphi(2)=3$
- $\varphi(3)=5$
- $\varphi(4)=7$

No Exemplo 3.1, os conjuntos em questão são todos **infinitos**. Vimos que existe uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais pares. Isso significa que eles possuem o mesmo número cardinal. Essa é a forma matemática de dizer que *eles possuem a mesma quantidade de elementos*.

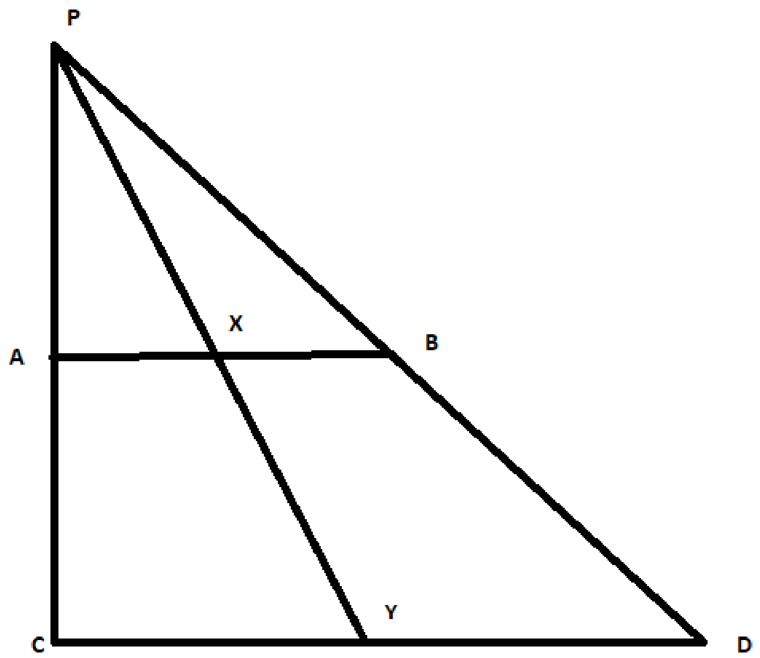
Veja que interessante, o conjunto dos naturais pares é um **subconjunto próprio** de $\mathbb{N}$ (isto é, ele está contido em $\mathbb{N}$ mas é **diferente** de $\mathbb{N}$). No entanto, do ponto de vista matemático, eles possuem a mesma quantidade de elementos.

Exemplo 3

3.2) Vou reproduzir aqui um exemplo inspirado em um artigo da RPM (Revista do Professor de Matemática, No. 64). Ele também está feito (de forma um pouco diferente, mas a ideia é a mesma, no Exemplo 8 da página 44 do nosso livro texto).

Vamos mostrar que, dados dois segmentos de reta, eles sempre possuem a mesma quantidade de pontos.

Na figura a seguir, tomamos dois segmentos de reta AB e CD, e os deslocamos de forma a obter o triângulo PCD da figura.



Vamos construir uma bijeção entre AB e CD. Para isso, tomemos um ponto X em AB e construímos a reta que liga X a P. Tomamos o ponto Y, resultante da intersecção dessa reta com o segmento CD. Dessa forma, construímos, geometricamente, uma função ψ entre AB e CD, que a cada X em AB associa um ponto Y em CD. Vamos verificar que ela é bijetora.

- ψ é **injetora:** de fato, se X e X' são dois pontos diferentes do segmento AB, os respectivos pontos Y e Y' serão diferentes.

- ψ é **sobrejetora:** de fato, dado um ponto Y em CD, se tomarmos a reta que liga Y a P, ela interceptará o segmento AB em um ponto X, e daí ψ (X)=Y.

Como ψ é injetora e sobrejetora, temos que ψ é bijetora. Isso significa que os dois segmentos possuem o mesmo número cardinal, ou a mesma cardinalidade.

Para pensar... Na construção feita acima, os segmentos foram tomados com medidas diferentes. Se os segmentos AB e CD possuem a mesma medida, naturalmente o triângulo PCD não pode ser construído. Por outro lado, é natural esperar que dois segmentos com mesma medida possuem a mesma quantidade de pontos.

Tente construir uma bijeção entre dois segmentos de mesma medida.