

Oscilações Amortecidas

O modelo do sistema massa-mola visto nas aulas passadas, que resultou nas equações do MHS, é apenas uma idealização das situações mais realistas existentes na prática.

Sempre que um sistema físico é posto para oscilar livremente, as oscilações decaem com o tempo até desaparecer completamente. Todo sistema real possui características dissipativas que levam a sua energia mecânica (cinética mais potencial) a se converter em outras formas de energia (calor, por exemplo).

Portanto, o modelo do MHS que leva à descrição matemática de um sistema oscilante em termos de uma função senoidal de amplitude constante e que perdura indefinidamente deve ser modificado para que possa descrever de maneira mais precisa as oscilações que decaem com o tempo.

A força resistiva de um fluido (ar, água, etc) a um corpo em movimento é função da velocidade do corpo. Ela se opõe ao sentido da velocidade e seu módulo é dado por

$$R(v) = b_1 v + b_2 v^2, \quad (1)$$

onde v é o módulo de $\mathbf{v}$ e b_1 e b_2 são constantes positivas.

Pergunta: quais as unidades de b_1 e b_2 ?

Quando as velocidades são pequenas, como é o caso para pequenas oscilações, o termo quadrático na equação acima pode ser desprezado e fica-se apenas com o termo linear:

$$R(v) = bv. \quad (2)$$

Vamos novamente tomar o modelo de um corpo preso a mola como o protótipo de um sistema oscilando. No presente caso, considerando que há uma força resistiva se opondo ao movimento do corpo como a da equação (2), a segunda lei de Newton para o corpo é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv. \quad (3)$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4)$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{b}{m}. \quad (5)$$

Pergunta: quais as unidades de γ ?

A constante γ caracteriza o amortecimento e, quando ela é nula, não há amortecimento e o corpo oscila com frequência angular ω_0 como nos casos vistos anteriormente.

A equação (4) é uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes. A solução dessa equação está além dos objetivos desta disciplina, de maneira que aqui daremos a solução diretamente.

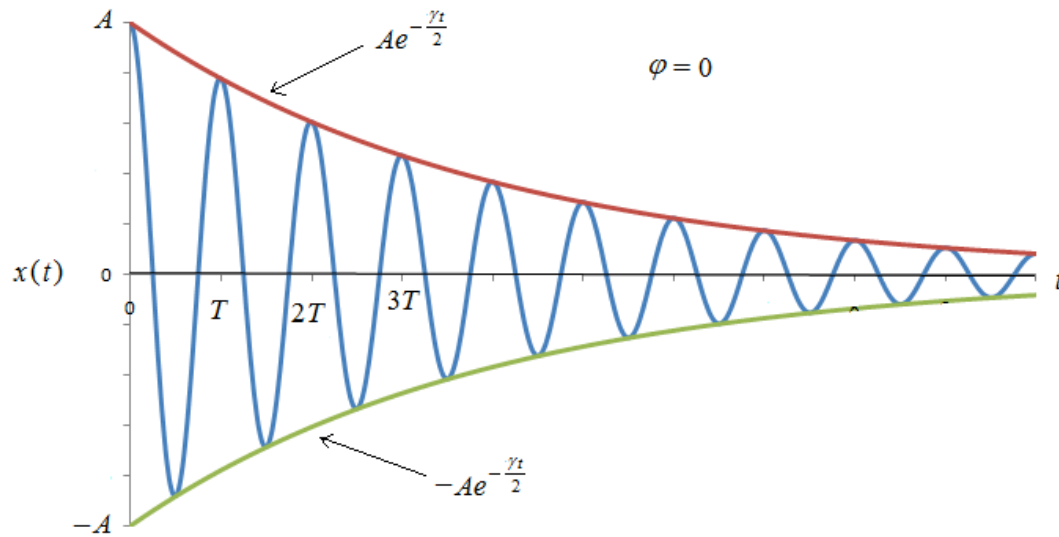
A solução $x(t)$ da equação (4) é:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

onde A e φ são constantes e

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (7)$$

Para interpretar esta solução, vejamos o seu gráfico para o caso particular em que $\varphi = 0$.



Exercício: tente reproduzir este gráfico usando o Excel ou outro programa qualquer. Dica: o gráfico foi feito para um caso em que $\gamma \ll \omega_0$, onde ω_0 é a frequência angular do oscilador não amortecido.

Observe que o gráfico mostra uma oscilação cuja amplitude diminui com o tempo. Ela corresponde à noção intuitiva que temos de um oscilador amortecido.

A grandeza ω , definida por (7), é chamada de *frequência* do oscilador amortecido. Estritamente falando, não se pode definir uma frequência para o caso de um oscilador amortecido, pois o movimento não é periódico (o oscilador nunca passa duas vezes pela mesma posição com a mesma velocidade).

Para o caso de um amortecimento fraco, em que $\gamma \ll \omega_0$ (que é o caso da figura acima), pode-se escrever

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cong \omega_0.$$

Desta forma, pode-se usar o termo “frequência” sem incorrer em um grande erro, mas deve-se ter em mente que o termo só tem significado preciso quando $\gamma = 0$. Apesar disso, é costume se referir ao termo ω como a “frequência” angular do oscilador amortecido e isto será feito aqui.

Assim como se define uma “frequência” para o oscilador amortecido, também se define o “período”, dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Note que a frequência do oscilador amortecido é sempre menor que a frequência do oscilador sem amortecimento. Por outro lado, o período do oscilador amortecido é sempre maior que o período do oscilador não amortecido.

Continuando com os abusos de linguagem, também é costume chamar o fator $Ae^{-\gamma t/2}$ de “amplitude” da oscilação amortecida.

Observe que essa amplitude decai com o tempo de forma exponencial. As curvas

$$x_{\pm A}(t) = \pm A e^{-\frac{\gamma t}{2}}$$

definem a *envoltória* (ou *envelope*) das oscilações. Essas duas curvas também estão mostradas na figura acima.

Define-se o *tempo de decaimento* τ_d (uma constante) como o tempo que a amplitude acima leva para cair a um valor igual a $1/e$ do seu valor inicial. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{x_{\pm A}(\tau_d)}{x_{\pm A}(0)} &= \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{A e^{-\frac{\gamma \tau_d}{2}}}{A} = \frac{1}{e} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-\frac{\gamma \tau_d}{2}} &= e^{-1} \Rightarrow \frac{\gamma \tau_d}{2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau_d &= \frac{2}{\gamma} = \frac{2m}{b} . \end{aligned} \quad (8)$$

Pode-se então reescrever a equação (6) como:

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_d}} \cos(\omega t + \varphi). \quad (9)$$

A forma acima é útil quando se estuda experimentalmente um movimento oscilatório com amortecimento. Isto porque o tempo de decaimento τ_d pode ser determinado experimentalmente e, a partir dele, o valor de b .

A determinação experimental de τ_d pode ser feita da seguinte maneira: Mede-se o valor da amplitude da oscilação x_0 para um tempo t_0 correspondente a um dos picos mostrados na figura da página 4. Depois, mede-se a amplitude x_N em um tempo t_N que esteja N picos à frente (ou seja, em um tempo NT depois de t_0).

Da equação (9), temos que a razão entre as duas amplitudes é

$$\frac{x_0}{x_N} = \frac{e^{-t_0/\tau_d}}{e^{-t_N/\tau_d}} = e^{(t_N - t_0)/\tau_d},$$

de maneira que o tempo de decaimento é dado por:

$$\tau_d = \frac{(t_N - t_0)}{\ln(x_0/x_N)}. \quad (10)$$

Apesar disso, no resto desta aula continuaremos a representar o movimento oscilatório amortecido pela equação (6).

Ao contrário do caso do oscilador harmônico simples, visto nas aulas passadas, a energia do oscilador amortecido não é constante ao longo do tempo. Pelo contrário, ela é continuamente dissipada e transformada em calor ou outras formas de energia.

A energia mecânica do oscilador amortecido num instante de tempo t é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t). \quad (11)$$

A taxa de variação temporal da energia é, portanto (usando-se a notação do “ponto” para expressar a derivada temporal):

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x). \quad (12)$$

Relembrando das equações (3) e (5),

$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{b}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow m \ddot{x} + kx = -b \dot{x} = -m \gamma \dot{x},$$

de maneira que

$$\frac{dE}{dt} = -m \gamma \dot{x}^2. \quad (13)$$

A taxa de perda de energia é proporcional ao quadrado da velocidade instantânea do corpo. Logo, a diminuição da energia não é uniforme. A taxa de perda de energia possui máximos nos pontos em que o corpo atinge os máximos de velocidade e é instantaneamente nula nos pontos em que a velocidade do corpo é zero.

Esses pontos podem ser obtidos calculando-se a expressão para a velocidade do corpo. De (6) temos que (mostre como exercício):

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \gamma) \right],$$

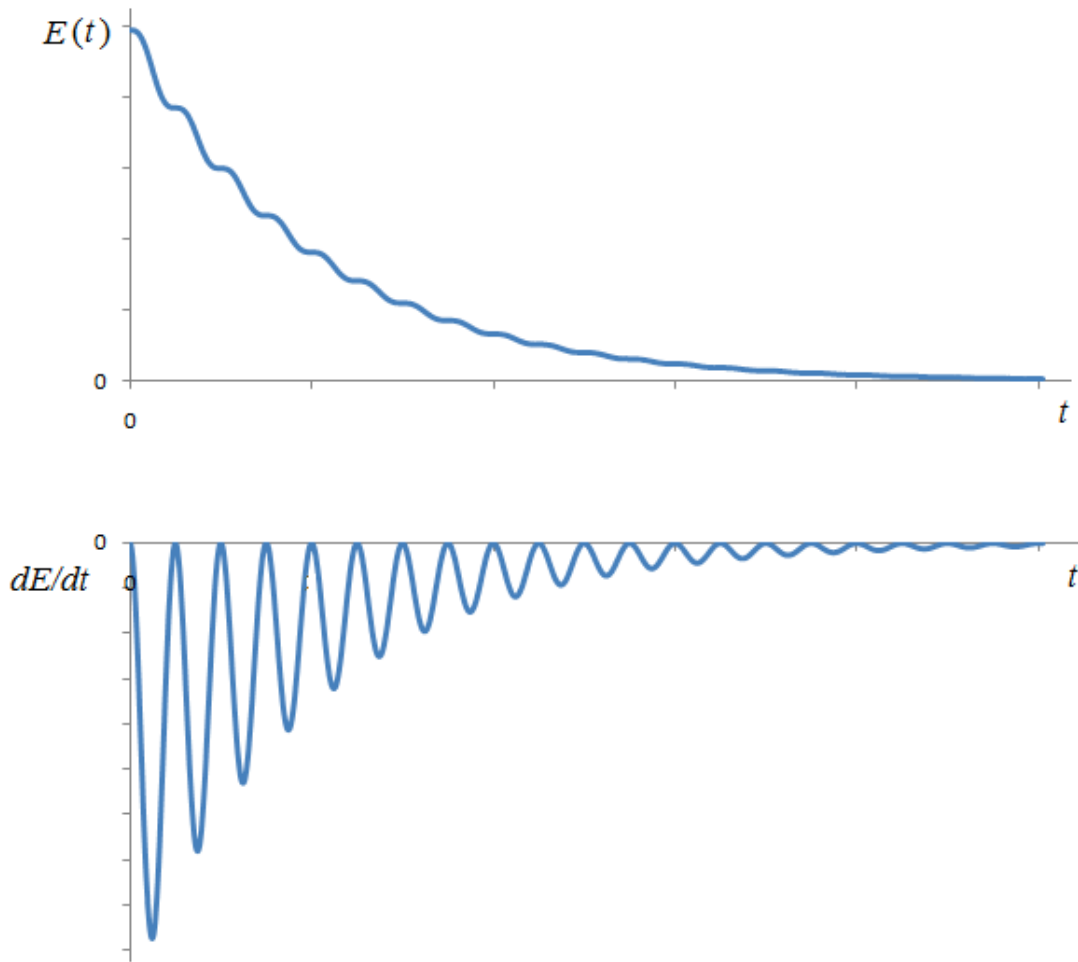
de maneira que (mostre como exercício),

$$\dot{x}^2 = A^2 e^{-\gamma} \left[\frac{\gamma^2}{4} \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \gamma) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin[2(\omega t + \varphi)] \right]$$

e

$$\frac{dE}{dt} = -m\gamma A^2 e^{-\gamma} \left[\frac{\gamma^2}{4} \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \gamma) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin[2(\omega t + \varphi)] \right]. \quad (14)$$

Os gráficos para $E(t)$ e dE/dt estão dados a seguir. Os gráficos foram feitos para os mesmos parâmetros e condições usadas para construir o gráfico da página 4. Exercício: tente reconstruir os dois gráficos abaixo.



A análise feita acima considera que $\omega_0 > \gamma^2/4$, isto é, que a frequência ω das oscilações amortecidas é positiva. Porém, observando a equação (7) vemos que há duas outras possibilidades:

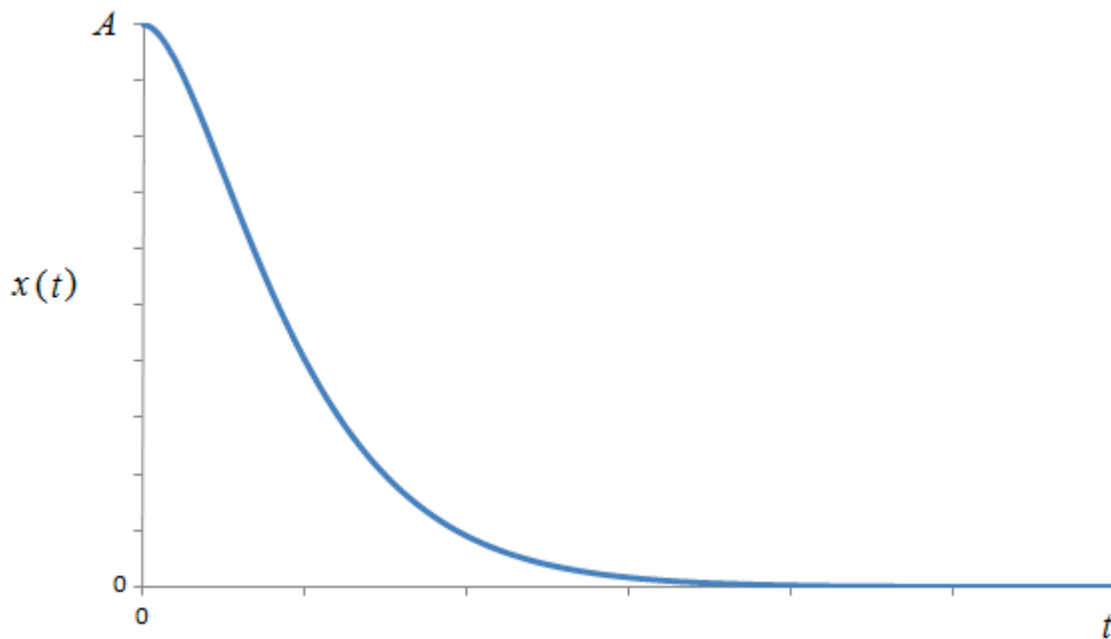
- a) Se $\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4}$, ω é zero;
- b) Se $\omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{4}$, ω é um número imaginário puro.

No caso (a), quando ω é zero, pode-se mostrar que a solução da equação diferencial (4) é:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad (14)$$

onde A e B são constantes.

O gráfico desta solução é dado abaixo (supondo que $x(0) = A$ e que $\dot{x}(0) = 0$).



Note que não há mais oscilações. O movimento decai exponencialmente em direção a zero!

Vejamos agora o caso (b) em que $\omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{4}$ e ω é um número imaginário puro. Neste caso, podemos escrever:

$$\omega = i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \equiv i\beta,$$

onde β é uma constante real *positiva*.

O tratamento matemático deste caso está além dos objetivos deste curso, mas pode-se mostrar que a solução mais geral de (4) para este caso é dada por:

$$x(t) = a_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t} + a_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t}. \quad (15)$$

onde as constantes a_1 e a_2 são dois números reais arbitrários.

Observem que a solução acima não é mais oscilatória, assim como no caso (a). Ela é dada pela soma de duas exponenciais e, portanto, pode ser uma função que cresce indefinidamente ou decresce indefinidamente, dependendo dos valores relativos dos expoentes constantes que multiplicam t nas duas exponenciais.

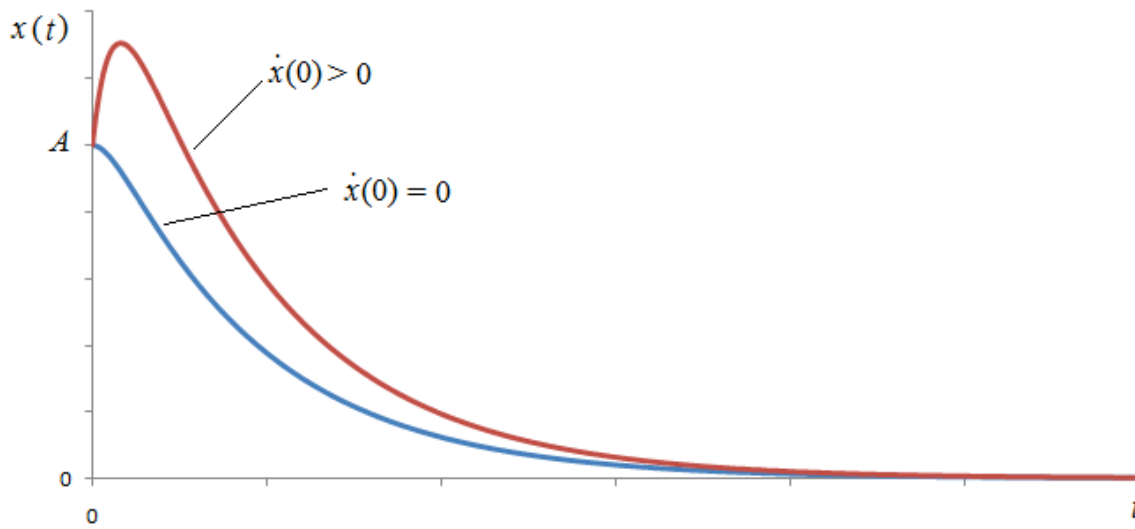
O expoente da primeira exponencial é $-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)$, que é sempre negativo; portanto, a primeira exponencial é sempre decrescente. O expoente da segunda exponencial é $-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)$ e também é sempre negativo, pois $\gamma/2 > \beta$ (para mostrar isto, basta lembrar da definição de β :

$$\beta^2 = (\gamma^2/4) - \omega_0^2 \Rightarrow (\gamma^2/4) - \beta^2 = \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \gamma^2/4 > \beta^2 \Rightarrow \gamma/2 > \beta).$$

Portanto, a segunda exponencial também é sempre decrescente.

Em resumo, a solução (15) para o caso (b) decresce exponencialmente no tempo e *sem oscilações*.

O gráfico abaixo mostra dois comportamentos típicos da solução (15). Nos dois o corpo começa a se movimentar da posição inicial $x(0) = A$, mas em um a velocidade inicial é zero ($\dot{x}(0) = 0$) e no outro a velocidade inicial é maior do que zero ($\dot{x}(0) > 0$).



Se a velocidade do corpo no instante inicial é *positiva*, a posição do corpo aumenta a partir desse instante, atinge um máximo e depois decai em direção a zero. Se a velocidade inicial do corpo é nula, sua posição decai monotonicamente em direção a zero.

Notem que para tempos grandes os dois decaimentos se igualam. Observando a solução (15), vemos que o termo exponencial cujo

expoente é $-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)$ decai mais rapidamente que o termo exponencial cujo expoente é $-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)$ (explique o porquê disto).

Isto implica que, para tempos grandes, o termo cujo expoente é $-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)$ domina o comportamento da solução (15):

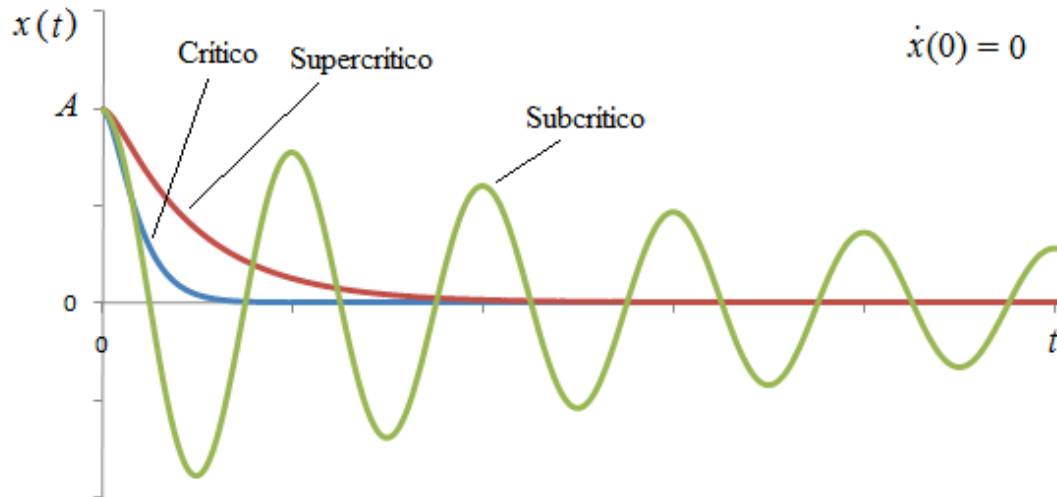
$$x(t) \cong a_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t}, \quad (\text{para } t \text{ grande}). \quad (16)$$

Independentemente da velocidade inicial do corpo e do que acontece para valores pequenos de t , para tempos grandes o decaimento da solução para o caso (b) é sempre o mesmo, de tipo exponencial como na equação (16).

Exercício: Use um programa como o Excel ou qualquer outro similar para estudar o comportamento da solução (15) para diferentes valores de $\dot{x}(0)$ (supondo sempre que $x(0) = A$). Em particular, veja o que acontece quando a velocidade inicial for negativa e tiver um módulo suficientemente grande.

O gráfico abaixo sintetiza os comportamentos dos três casos de amortecimento estudados nesta aula. Nos três casos, para facilitar a

comparação, a posição inicial do corpo é $x(0) = A$ e a sua velocidade inicial é $\dot{x}(0) = 0$.



O gráfico explica a razão dos nomes dados aos três casos.

- O único dos três casos que é oscilatório é o do amortecimento subcrítico;
- Os casos de amortecimento crítico e supercrítico levam a um decaimento monótono (sem oscilações) em direção ao repouso;
- A solução com amortecimento crítico é a que decai mais rapidamente em direção ao repouso;
- O nome “crítico” vem do fato de que é para o valor do parâmetro γ deste caso ($\gamma/2 = \omega_0$) que o comportamento de decaimento do corpo em direção ao repouso deixa de ser oscilatório e passa a ser monótono (exponencial).

O caso de amortecimento crítico tem aplicação prática importante na construção de balanças ou outros instrumentos de precisão baseados em sistemas mecânicos elásticos. A ideia é construir o aparelho de maneira que o seu amortecimento seja crítico para que o movimento atinja o equilíbrio o mais depressa possível e permita uma rápida leitura do resultado.

Amortecedores de automóveis também são ajustados para o caso crítico, para retornar o mais rapidamente possível ao equilíbrio após um buraco para estar prontos para o próximo.