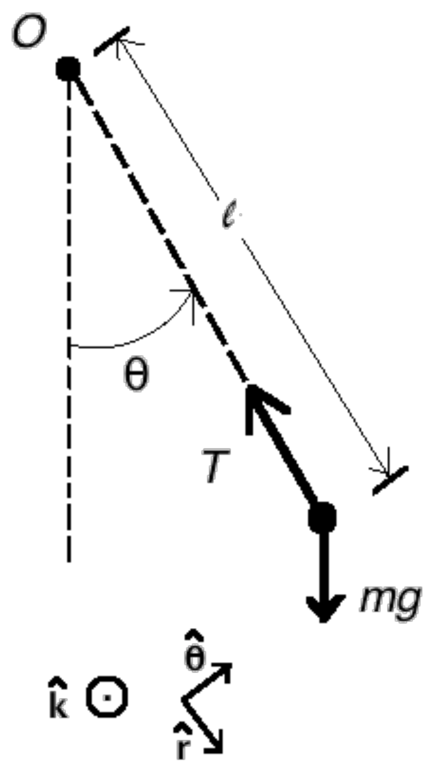
O Pêndulo Físico

O chamado pêndulo físico é qualquer pêndulo real. Ele consiste de um corpo rígido (com qualquer forma) suspenso por um ponto O e que pode girar livremente (sem atrito) em torno desse ponto.

Antes de estudarmos o pêndulo físico, é conveniente voltarmos ao pêndulo simples e analisa-lo usando o conceito de torque. Consideremos o diagrama de forças para o pêndulo simples e o sistema de coordenadas (r, θ, z) definido na figura abaixo, cujos versores são ($\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\mathbf{k}}$).



O torque em relação ao ponto de rotação (ponto pivô) O é dado por,

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_O = \vec{\mathbf{r}}_{O,m} \times m\vec{\mathbf{g}} \,. \tag{1}$$

Escrevendo os vetores $\vec{\mathbf{r}}_{O,m}$ e $m\vec{\mathbf{g}}$ em termos de suas componentes no sistema ($\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{k}}$):

$$\vec{\mathbf{r}}_{O,m} = \ell\hat{\mathbf{r}} \tag{2}$$

e

$$m\vec{\mathbf{g}} = mg\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - mg\sin\theta\hat{\theta} \,. \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1):

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_O = \ell\hat{\mathbf{r}} \times mg\left(\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\theta}\right),$$

ou

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_O = \ell mg\left[\hat{\mathbf{r}} \times \left(\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\theta}\right)\right].$$

Usando a tabela abaixo (tente obter os valores da tabela usando a regra do “determinante” para calcular o produto vetorial):

$$\begin{array}{l} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0; \quad \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} = \hat{\mathbf{k}}; \quad \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\theta} \\ \hat{\theta} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{k}}; \quad \hat{\theta} \times \hat{\theta} = 0; \quad \hat{\theta} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\theta}; \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\theta} = -\hat{\mathbf{r}}; \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \end{array},$$

obtemos:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_O = -\ell mg\sin\theta\hat{\mathbf{k}} \,. \tag{4}$$

O torque em relação ao pivô O tem componente apenas na direção z. Quando $\theta > 0$, o torque em relação a O aponta no sentido negativo de z; quando $\theta < 0$, o torque em relação a O aponta no sentido positivo de z.

O momento de inércia do corpo pontual de massa m em relação ao eixo que passa pelo pivô O é definido por (lembre de Física I):

$$I_O = m\ell^2 . \tag{5}$$

Como o corpo de massa m está girando em torno de O, a sua equação de movimento é:

$$\tau_O = I_O \alpha , \tag{6}$$

onde $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ é a aceleração angular do corpo.

Podemos reescrever (6) usando (4), (5) e a definição de α:

$$-mg\ell \sin\theta = m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} ,$$

ou

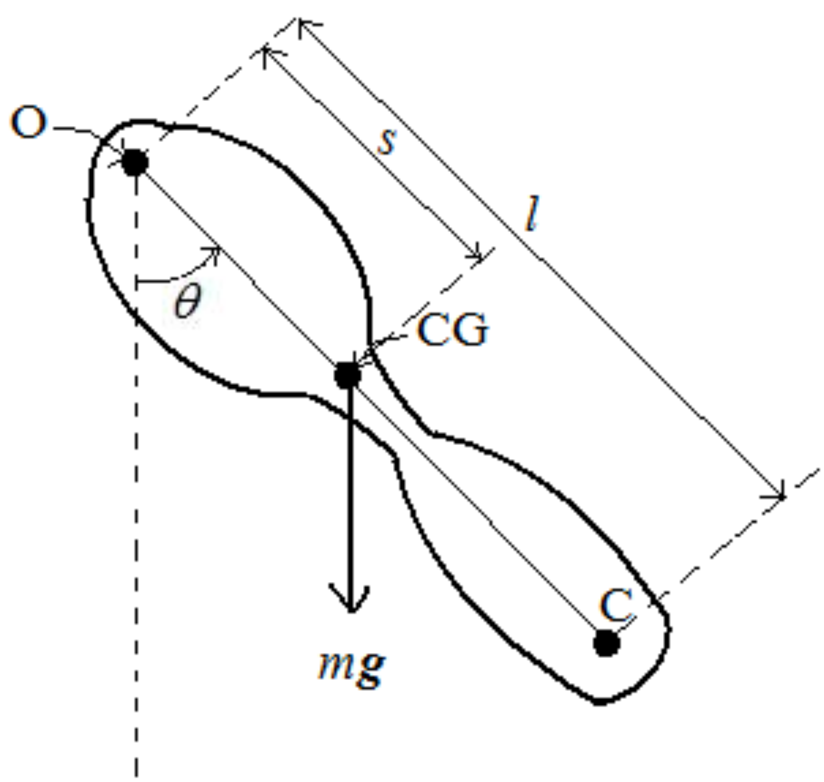
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta . \tag{7}$$

Esta é a equação de movimento para o pêndulo simples obtida na aula passada (equação (4)).

Portanto, o tratamento baseado no torque e na equação de movimento rotacional é equivalente ao feito anteriormente, baseado na segunda lei de Newton[1].

Vamos agora aplicar a abordagem baseada no torque e na lei rotacional de movimento ao caso do pêndulo físico.

A figura abaixo ilustra um pêndulo físico.



[1] Tinha que ser, pois a equação de movimento rotacional é obtida a partir da segunda lei de Newton.

O centro de gravidade (CG) do corpo está situado a uma distância s de O. Na posição de equilíbrio, quando o pêndulo está na vertical, o ponto CG está localizado abaixo de O ao longo da linha vertical. Quando o corpo oscila, seu deslocamento em relação à vertical é descrito pelo ângulo θ como indicado no desenho.

Vamos supor que a massa total do corpo é m e que o seu momento de inércia em relação ao eixo que passa por O é I.

Quando o corpo está na posição indicada pelo desenho, o seu peso provoca um torque restaurador em relação a O dado por

$$\tau = -s(mg\,\mathrm{sen}\theta)\,. \tag{8}$$

O sinal negativo decorre do fato de que a direção positiva é a que se afasta da vertical.

Esta equação pode ser obtida pelo mesmo método usado na dedução da equação (4) para o torque do pêndulo simples. Basta usar $\vec{\mathbf{r}}_{O,m} = s\hat{\mathbf{r}}$ e $m\vec{\mathbf{g}} = mg\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - mg\sin\theta\hat{\theta}$.

A equação de movimento para o corpo é, então,

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}\,,$$

ou

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgs\,\text{sen}\theta,$$

que rearranjando nos dá

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgs}{I}\text{sen}\theta = 0. \qquad (9)$$

Note que esta equação é idêntica à equação de movimento para um pêndulo simples (equação (10) da aula passada ou equação (7) desta aula) se fizermos o comprimento do pêndulo simples ser igual a

$$l = \frac{I}{ms}. \qquad (10)$$

Na realidade, o pêndulo simples é um caso particular do pêndulo físico em que toda a massa *m* do pêndulo físico está concentrada a uma distância *l* de O. Neste caso, a distância *s* entre o CG deste sistema e o ponto de suspensão O é igual a *l* e o momento de inércia do sistema em relação a O é $I = ml^2$.

O ponto do corpo que está a uma distância *l* de O está indicado por C na figura da página 4. Como visto acima, se toda a massa do corpo estivesse concentrada em C e ele estivesse ligado a O por um fio sem massa teríamos um pêndulo simples equivalente, do ponto de vista dinâmico, ao pêndulo físico. O ponto C é denominado de *centro de oscilação* do pêndulo físico.

A observação de que um pêndulo físico com toda a sua massa m concentrada no seu centro de oscilação é equivalente a um pêndulo simples foi feita por Huygens em seu tratado sobre o relógio de pêndulo (ver aula passada).

No caso de pequenas oscilações, a equação de movimento para o pêndulo físico torna-se

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgs}{I}\theta = 0. \qquad (11)$$

Esta é a equação de um MHS com

$$\omega = \sqrt{\frac{mgs}{I}}. \qquad (12)$$

A frequência das oscilações é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgs}{I}} \qquad (13)$$

e o período é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}. \qquad (14)$$

Compare estas equações com as equações (7), (8) e (9) da Aula 3 para o pêndulo simples.

A equação (14) nos sugere um método para determinar o momento de inércia de um corpo de forma complicada. Vamos supor que seja possível determinar o centro de gravidade do corpo, por exemplo, por testes de equilíbrio. Conhecendo-se o CG do corpo, este é colocado para fazer pequenas oscilações em torno de um eixo passando por um ponto O.

Mede-se então o período T das oscilações de pequenas amplitudes e a distância s entre o ponto O e o CG do corpo. Como também temos a massa m do corpo, a única variável desconhecida em (14) é o momento de inércia I em relação a O. O valor de I, portanto, pode ser determinado por substituição direta dos valores das demais variáveis em (14).

Uma propriedade interessante do pêndulo físico é que se a distância s do CG ao ponto O for pequena, o período das oscilações pode ser bem grande. Esta é uma característica desejável para se medir tempo. Em comparação, a única maneira de se conseguir períodos longos com um pêndulo simples é usando cordas bem longas.