O Pêndulo Simples

O protótipo físico do movimento harmônico simples (MHS) visto nas aulas passadas – um corpo de massa m preso a uma mola executando vibrações de pequenas amplitudes com força restauradora dada por $F = -kx$ – é uma situação *aproximada*.

Apesar disso, uma grande variedade de deformações de sistemas físicos, resultantes de trações, compressões, flexões ou torções (ou combinações delas) satisfaz, sob determinadas condições, a propriedade de que a força restauradora é proporcional ao deslocamento.

Nesses casos, a equação diferencial resultante que descreve o movimento do sistema é formalmente idêntica à equação de movimento de um MHS,

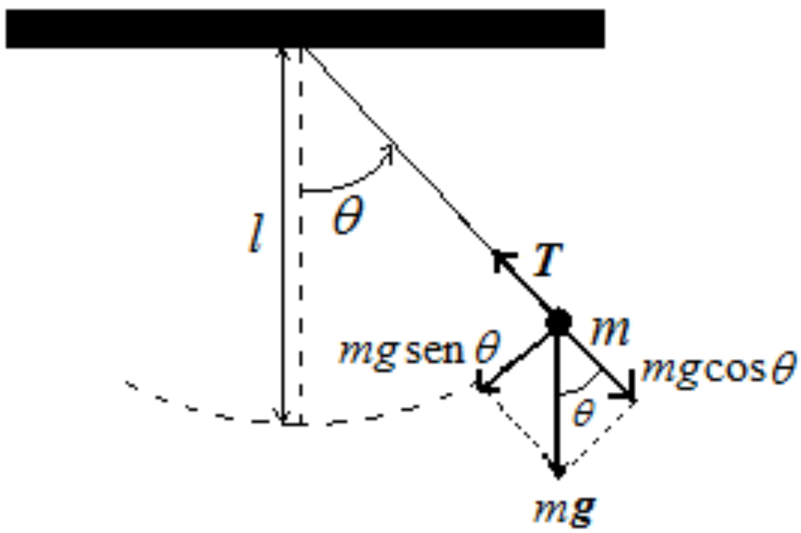
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

de maneira que o sistema se comporta como um oscilador harmônico simples.

Nesta aula veremos outro exemplo importante de modelo simples para um sistema físico oscilatório que recai em um MHS.

O Pêndulo Simples

O pêndulo simples é outro modelo idealizado da física. Ele consiste de um corpo de massa m preso a um fio de massa desprezível e comprimento l. Supõe-se que o corpo realiza pequenos deslocamentos angulares sobre uma circunferência de raio l em torno da posição de equilíbrio (posição vertical, com $\theta = 0$).



A figura acima ilustra o modelo. Há duas forças atuando sobre o corpo, a tensão $\boldsymbol{T}$ e o peso $m\boldsymbol{g}$.

Como se faz geral em problemas de mecânica que envolvem rotação, pode-se decompor as forças em suas componentes tangencial e radial.

A única componente tangencial é a componente do peso ao longo da direção tangencial,

$$F_\theta = -mg\,\text{sen}\theta. \tag{1}$$

O sinal negativo decorre do fato de que a direção positiva é a que se afasta da vertical ao longo da circunferência.

As componentes radiais são a própria tensão e a componente do peso ao longo da direção radial. Como o corpo não se move na direção radial, essas duas componentes são iguais e de sentidos contrários (veja a figura),

$$T = mg\cos\theta. \tag{2}$$

Esta última equação nos permite calcular o valor da tensão T para qualquer valor de θ.

A equação que nos interessa aqui é a (1). O deslocamento do corpo ao longo da trajetória em relação ao repouso é medido por

$$s = l\theta.$$

Dessa maneira, a aceleração tangencial do corpo é

$$a_\theta = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{3}$$

Multiplicando (3) por m para se ter a força tangencial e igualando a (1) obtemos a equação de movimento:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \qquad (4)$$

Esta equação é diferente da equação do oscilador harmônico simples, pois a força restauradora não é proporcional ao deslocamento angular θ, mas ao seno de θ.

Quando se mede o ângulo θ em radianos, porém, temos que, para ângulos pequenos,

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta. \qquad (5)$$

Por exemplo, para θ = 0,1745 rad (= 10°), sen θ = 0,1736. Notem que os dois valores são muito próximos; o erro relativo vale (0,1745 – 0,1736)/0,1736 = 0,005 (~ 0,5%).

Portanto, para pequenos desvios em relação à posição de equilíbrio, a equação de movimento do pêndulo simples pode ser aproximada por,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \qquad (6)$$

com θ medido em radianos.

Esta é a equação de um MHS com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{7}$$

A freqüência e o período das pequenas oscilações são, respectivamente,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{8}$$

e

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{9}$$

Notem que o período *T* das oscilações do pêndulo simples não depende da amplitude das oscilações (desde que elas sejam pequenas), mas apenas do comprimento do pêndulo *l*.

Este fato foi observado por Galileu (1564-1642) em 1602 e constitui o que ele chamou de *isocronismo* do pêndulo. Em cartas a amigos, Galileu sugeriu que o isocronismo do pêndulo simples para pequenas oscilações poderia ser usado para a construção de instrumentos de medida de tempo.

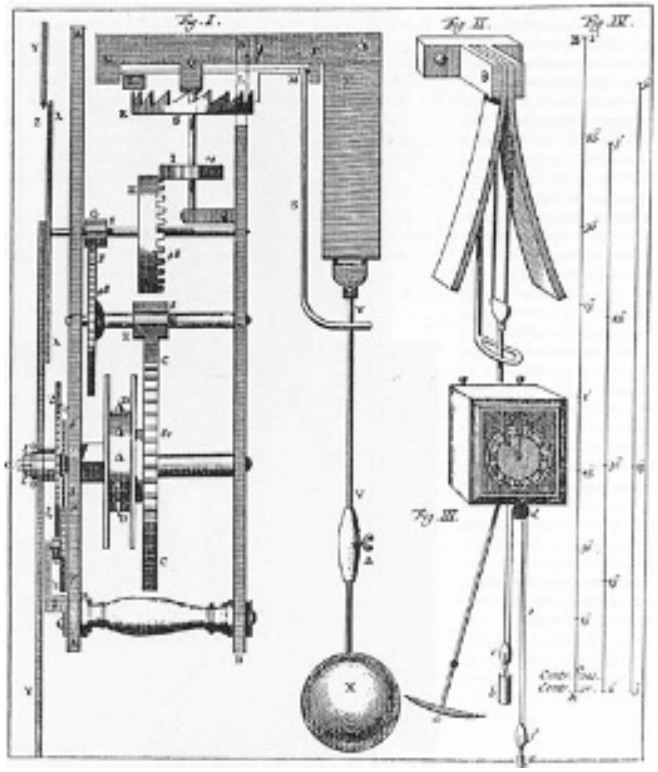
Por exemplo, supondo que a intensidade do campo gravitacional é a mesma para todos os pontos da superfície da Terra e vale g = 9,8 m/s^2, o comprimento l do pêndulo para que o seu período T seja de 1 segundo pode ser calculado a partir de (15) como:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})1}{4\pi^2} = 0{,}248\ \mathrm{m},$$

ou seja, um pêndulo de comprimento 24,8 cm que oscile com amplitudes menores que 10^o possui período de aproximadamente 1 segundo com erro da ordem de 0,5%.

Em 1603, um dos amigos de Galileu, o médico Santorio Santorio, passou a usar um pendulo simples (que ele chamou de *pulsilogium*) para medir o pulso de seus pacientes.

A aplicação mais importante do isocronismo do pêndulo, no entanto, veio em 1656, após a morte de Galileu, com a construção do primeiro relógio de pêndulo pelo físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695). A figura abaixo mostra o esquema do primeiro relógio de pêndulo construído por Huygens (a figura foi tirada do site http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart1.pdf, que contém a tradução para o inglês do livro de Huygens sobre o relógio de pêndulo *Horologium Oscillatorium*).



A energia cinética do pêndulo simples é

$$K = \frac{1}{2} m v^2 .$$

A velocidade do pêndulo é

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(l\theta)}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} .$$

Substituindo esta expressão da velocidade na equação para a energia cinética,

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 . \qquad (10)$$

Para calcular a energia potencial U do pêndulo, vamos considerar que a posição em que U é nula é a posição de equilíbrio $\theta = 0$. Desta forma, a energia potencial pode ser calculada como o negativo do trabalho realizado pela força restauradora para levar o pêndulo de $\theta = 0$ até um valor de θ qualquer diferente de zero:

$$U = -W_{0\rightarrow\theta} = -\int_0^\theta F_\theta ds = -\int_0^\theta \left(-mg\,\mathrm{sen}\,\theta'\right) l\,d\theta' = mgl\int_0^\theta \mathrm{sen}\,\theta' d\theta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = mgl\left[-\cos\theta'\right]_0^\theta .$$

Ou seja,

$$\Rightarrow U = mgl\left(1-\cos\theta\right). \qquad (11)$$

Observem que as equações (10) e (11) são absolutamente gerais para o pêndulo simples, isto é, elas valem mesmo quando não se faz a aproximação de pequenos ângulos.

Se, no entanto, fizermos a aproximação de ângulos pequenos,

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta\,,$$

a energia potencial torna-se

$$U = mgl\int_0^\theta \theta' d\theta' = mgl\left[\frac{(\theta')^2}{2}\right]_0^\theta .$$

Ou seja,

$$U = \frac{1}{2} mgl\theta^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 l^2 \theta^2 \quad (\theta << 1). \tag{12}$$

A energia total (que se conserva) do pêndulo simples para pequenas oscilações é então:

$$E = K + U = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 l^2 \theta^2 . \tag{13}$$

Faça, como exercício, uma análise do movimento do pêndulo simples baseada nesta equação da mesma forma que a que foi feita na aula anterior para o movimento do sistema massa-mola.