MAP3122: Métodos numéricos e aplicações

Quadrimestral 2020

Antoine Laurain

Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

MMQ e polinômios ortogonais

Seja $f \in \mathcal{C}^0([x_I, x_F])$. Vamos aproximar f usando um polinômio $g = \sum_{k=0}^{m} a_k g_k$, onde $g_k(x) = x^k$. O sistema normal é

$$\begin{bmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \dots & \langle g_0, g_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle g_0, g_m \rangle & \dots & \langle g_m, g_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^\star \\ \vdots \\ a_m^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, g_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, g_m \rangle \end{bmatrix}$$

com

$$\langle g_i, g_j \rangle = \int_{x_I}^{x_F} g_i(x) g_j(x) dx = \int_{x_I}^{x_F} x^{i+j} dx$$

$$\langle f, g_j \rangle = \int_{x_I}^{x_F} f(x) g_j(x) dx$$

Exemplo: Aproximar $f(x) = \sin(\pi x)$ com $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. O sistema normal é

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 1 & \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 \\ \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 & \int_0^1 x^3 \\ \int_0^1 x^2 & \int_0^1 x^3 & \int_0^1 x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^\star \\ a_1^\star \\ a_2^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \sin(\pi x) \\ \int_0^1 x \sin(\pi x) \\ \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos

$$g(x) = -4.12251 x^2 + 4.12251 x - 0.050465$$

Enfrentamos dois problemas quando m é grande:

1. O custo computacional da resolução do sistema normal de dimensão $(m+1) \times (m+1)$ é alto quando m é grande.
2. Os coeficientes da matriz do sistema normal são

$$\langle g_i, g_j \rangle = \int_{x_I}^{x_F} x^{i+j} dx = \frac{x_F^{i+j+1} - x_I^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

   Este tipo de matriz chama-se Matriz de Hilbert. Matrizes de Hilbert são mal condicionadas quando m é grande. Consequentemente, vamos enfrentar erros de arredondamento altos ao resolver este sistema.

Como podemos mitigar estes problemas?

- Não precisamos escolher $g_k(x) = x^k$ em $g = \sum_{k=0}^{m} a_k g_k$.
- É possivel achar uma familia $\{g_k\}_{k=0}^{m}$ de polinômios tal que a matriz do sistema normal é diagonal, o que facilita bastante a resolução do problema.
- Para isso, precisamos achar uma familia $\{g_k\}_{k=0}^{m}$ satisfazendo

$$\int_{x_I}^{x_F} g_i(x) g_j(x) dx = 0 \text{ quando } i \neq j.$$

  Este tipo de polinômios chama-se polinômios ortogonais.

Definição: As funções $\{\phi_k\}_{k=0}^m$ são linearmente independente (L.I.) em $[x_I, x_F]$ se

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \phi_k(x) = 0 \text{ para todos } x \in [x_I, x_F] \implies c_0 = c_1 = \cdots = c_k = 0.$$

Se não for o caso, o conjunto $\{\phi_k\}_{k=0}^m$ é linearmente dependente.

Teorema: Se ϕ_j é um polinômio de grau j para cada $j = 0, \ldots, m$, então $\{\phi_k\}_{k=0}^m$ é L.I. em $[x_I, x_F]$.

Teorema: Seja Π_m o conjunto de todos polinômios de grau $\leq m$. Se o conjunto $\{\phi_k\}_{k=0}^m$, com $\phi_k \in \Pi_m$, for L.I., então todo polinômio de Π_m escreve-se de maneira única como uma combinação linear de polinômios de $\{\phi_k\}_{k=0}^m$.

Definição: Uma função integravel ω chama-se função peso no intervalo $[x_I, x_F]$ se $\omega(x) \geq 0$ para todos $x \in [x_I, x_F]$, e se para qualquer subintervalo I de $[x_I, x_F]$, ω não for identicamente zero em I.

- Vamos considerar o problema de mínimos quadrados seguinte:

$$\min_{(a_0,\ldots,a_m)\in\mathbb{R}^{m+1}} E(a_0,\ldots,a_m) := \int_{x_I}^{x_F} \omega(x)\,(f(x)-g(x))^2\,dx$$

  com $f \in \mathcal{C}^0([x_I, x_F])$, $g(x) := \sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)$, onde as funções $\{g_k\}_{k=0}^{m}$ são L.I., e ω é uma função peso em $[x_I, x_F]$.
- Nós já calculamos no capitulo anterior o sistema normal no caso particular onde $\omega(x) = 1$ para todos $x \in [x_I, x_F]$.
- No caso geral, o sistema normal tem exatamente a mesma forma, mas o produto scalar é

$$\langle g_i, g_j\rangle = \int_{x_I}^{x_F} \omega(x) g_i(x) g_j(x) dx.$$

- Agora queremos escolher as funções $\{g_k\}_{k=0}^{m}$ de modo que a matriz do sistema normal seja diagonal, isto é

$$\langle g_i, g_j\rangle = \int_{x_I}^{x_F} \omega(x) g_i(x) g_j(x) dx = 0 \text{ para } i \neq j.$$

- Queremos tambem $\langle g_i, g_i\rangle > 0$.
- Se adicionalmente temos $\langle g_i, g_i\rangle = 1$ para todos $i = 0, \ldots, m$, dizemos que o sistema é ortonormal.

- Se conseguirmos achar uma familia $\{g_k\}_{k=0}^m$ que satisfaz estas propriedades, então a matriz do sistema normal é diagonal, e obtemos imediatamente a solução:

$$a_i^\star = \frac{\langle g_i, f\rangle}{\langle g_i, g_i\rangle} = \frac{\displaystyle\int_{x_I}^{x_F} \omega(x) f(x) g_i(x) dx}{\displaystyle\int_{x_I}^{x_F} \omega(x) g_i(x)^2 dx} \qquad \forall i = 0, \ldots, m.$$

- Como achar uma familia $\{g_k\}_{k=0}^m$ de polinômios ortogonais?
- O teorema seguinte fornece um procedimento recursivo para construir uma tal familia. Este teorema pode ser provado por indução.

Teorema: O conjunto de polinômios $\{g_k\}_{k=0}^m$ seguinte é ortogonal em $[x_I, x_F]$, com respeito à função peso ω.

$$g_0(x) = 1, \quad \forall x \in [x_I, x_F],$$

$$g_1(x) = x - B_1, \quad \forall x \in [x_I, x_F], \text{ com } B_1 = \frac{\int_{x_I}^{x_F} x\omega(x) g_0(x)^2 dx}{\int_{x_I}^{x_F} \omega(x) g_0(x)^2 dx},$$

$$g_k(x) = (x - B_k) g_{k-1}(x) - C_k g_{k-2}(x), \quad \forall x \in [x_I, x_F], \text{ para } k \geq 2,$$

$$\text{com } B_k = \frac{\int_{x_I}^{x_F} x\omega(x) g_{k-1}(x)^2 dx}{\int_{x_I}^{x_F} \omega(x) g_{k-1}(x)^2 dx}, \quad C_k = \frac{\int_{x_I}^{x_F} x\omega(x) g_{k-1}(x) g_{k-2}(x) dx}{\int_{x_I}^{x_F} \omega(x) g_{k-2}(x)^2 dx}.$$

Observação: O conjunto de polinômios $\{g_k\}_{k=0}^m$ fornecido por este teorema é L.I. em $[x_I, x_F]$.

Exemplo: Vamos calcular polinômios ortogonais $\{g_k\}_{k=0}^m$ no intervalo $[-1,1]$, com respeito à função peso $\omega \equiv 1$, usando este teorema. Calculamos

$$g_0(x) = 1, \quad \forall x \in [-1,1],$$

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x\omega(x)g_0(x)^2dx}{\int_{-1}^1 \omega(x)g_0(x)^2dx} = \frac{\int_{-1}^1 xdx}{\int_{-1}^1 dx} = 0,$$

$$g_1(x) = x - B_1 = x,$$

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x\omega(x)g_1(x)^2dx}{\int_{-1}^1 \omega(x)g_1(x)^2dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^3dx}{\int_{-1}^1 x^2dx} = 0,$$

$$C_2 = \frac{\int_{-1}^1 x\omega(x)g_1(x)g_0(x)dx}{\int_{-1}^1 \omega(x)g_0(x)^2dx} = \frac{\int_{-1}^1 x^2dx}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{1}{3},$$

$$g_2(x) = (x - B_2)g_1(x) - C_2g_0(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

Observação: Os polinômios de Legendre $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ são também uma familia de polinômios ortogonais no intervalo $[-1,1]$, com respeito à função peso $\omega \equiv 1$. Cada polinômio de Legendre difere do polinômio g_k calculado neste exemplo apenas por uma constante multiplicativa.

Observação: Cada intervalo $[x_I, x_F]$ e peso ω fornecerá uma nova familia de polinômios ortogonais $\{g_k\}_{k=0}^m$. Algumas familias ficaram famosas e têm nomes, como os polinômios de Legendre, Hermite, Laguerre, ou Chebychev.

Exemplo: Vamos calcular polinômios ortogonais $\{g_k\}_{k=0}^m$ no intervalo $[0,1]$, com respeito à função peso $\omega \equiv 1$, usando este teorema. Calculamos

$$g_0(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1],$$

$$B_1 = \frac{\int_0^1 x\omega(x)g_0(x)^2dx}{\int_0^1 \omega(x)g_0(x)^2dx} = \frac{\int_0^1 xdx}{\int_0^1 dx} = \frac{1}{2},$$

$$g_1(x) = x - B_1 = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{\int_0^1 x\omega(x)g_1(x)^2dx}{\int_0^1 \omega(x)g_1(x)^2dx} = \frac{\int_0^1 x(x-1/2)^2dx}{\int_0^1 (x-1/2)^2dx} = \frac{1}{2},$$

$$C_2 = \frac{\int_0^1 x\omega(x)g_1(x)g_0(x)dx}{\int_0^1 \omega(x)g_0(x)^2dx} = \frac{\int_0^1 x(x-1/2)dx}{\int_0^1 dx} = \frac{1}{12},$$

$$g_2(x) = (x - B_2)g_1(x) - C_2g_0(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Observamos que os polinômios g_1 e g_2 no caso $[x_I, x_F] = [0,1]$ são diferentes do caso $[x_I, x_F] = [-1,1]$ (compare com o exemplo anterior), mesmo que o peso ω seja o mesmo.

Exemplo: Vamos calcular polinômios ortogonais $\{g_k\}_{k=0}^m$ no intervalo $[0,\infty)$, com respeito à função peso $\omega(x) = e^{-x}$, usando o teorema. Neste cao o produto escalar é

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx.$$

Esta integral sempre existe quando f e g são polinômios. Calculamos

$$g_0(x) = 1, \quad \forall x \in [0,\infty),$$

$$B_1 = \frac{\int_0^\infty x\omega(x) g_0(x)^2 dx}{\int_0^\infty \omega(x) g_0(x)^2 dx} = \frac{\int_0^\infty x e^{-x} dx}{\int_0^\infty e^{-x} dx} = \frac{[-xe^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x} dx}{[-e^{-x}]_0^\infty} = 1,$$

$$g_1(x) = x - B_1 = x - 1,$$

$$B_2 = \frac{\int_0^\infty x\omega(x) g_1(x)^2 dx}{\int_0^\infty \omega(x) g_1(x)^2 dx} = \frac{\int_0^\infty x e^{-x}(x-1)^2 dx}{\int_0^\infty e^{-x}(x-1)^2 dx} = 3,$$

$$C_2 = \frac{\int_0^\infty x\omega(x) g_1(x) g_0(x) dx}{\int_0^\infty \omega(x) g_0(x)^2 dx} = \frac{\int_0^\infty x e^{-x}(x-1) dx}{\int_0^\infty e^{-x} dx} = 1,$$

$$g_2(x) = (x - B_2) g_1(x) - C_2 g_0(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Observação: Os polinômios de Laguerre $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = 1 - x$, $g_2(x) = \frac{x^2-4x+2}{2}$ são também uma familia de polinômios ortogonais no intervalo $[0,\infty)$, com respeito à função peso $\omega(x) = e^{-x}$. Cada polinômio de Laguerre difere do polinômio g_k calculado neste exemplo apenas por uma constante multiplicativa.

Polinômios ortogonais e mudança de variaveis

- As familias de polinômios ortogonais conhecidas tais que os polinômios de Legendre, Hermite, Laguerre, ou Chebychev podem ser encontradas facilemente de forma tabelada, por exemplo no Wikipedia.
- Cada uma dessas familias é definida para um peso ω e um intervalo $[x_I, x_F]$ particular, por exemplo $\omega(x) = e^{-x}$ e $[x_I, x_F] = [-1, 1]$ no caso de polinômios de Legendre.
- Em principio, deveriamos recalcular uma familia de polinômios ortogonais para cada novo intervalo $[x_I, x_F]$, mas podemos evitar esse cálculo usando uma mudança de variável, que permite usar famílias conhecidas de polinômios ortogonais.
- Vamos supor que a função f é definida em $[x_I, x_F]$, mas que dispomos de uma tabela de polinômios ortogonais apenas num outro intervalo $[t_I, t_F]$. Consideramos o problema de mínimos quadrados seguinte:

$$\min_{(a_0,\ldots,a_m)\in\mathbb{R}^{m+1}} E(a_0, \ldots, a_m) := \int_{x_I}^{x_F} (f(x) - g(x))^2 \, dx$$

  with $g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)$.
- Vamos definir novas funções $F(t) := f(x(t))$ e $G(t) := g(x(t))$ definidas em $[t_I, t_F]$, onde $x(t) = \alpha t + \beta$ é uma mudança de variaveis satisfazendo

$$\begin{cases} x(t_I) = x_I, \\ x(t_F) = x_F, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha t_I + \beta = x_I, \\ \alpha t_F + \beta = x_F, \end{cases}$$

  Assim, podemos calcular α e β resolvendo um sistema linear 2×2.

- Usando a mudança de variaveis $x(t) = \alpha t + \beta$ na integral, obtemos

$$E(a_0, \ldots, a_m) := \int_{t_I}^{t_F} (f(x(t)) - g((x(t)))^2 \, |x'(t)| dt = \alpha \int_{t_I}^{t_F} (F(t) - G(t))^2 \, dt$$

- Então vamos resolver o problema de minimização seguinte:

$$\min_{(a_0,\ldots,a_m)\in\mathbb{R}^{m+1}} E(a_0, \ldots, a_m) = \alpha \int_{t_I}^{t_F} (F(t) - G(t))^2 \, dt.$$

  cuja solução é $G(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k^\star G_k(t)$, onde $G_k(t)$ são polinômios ortogonais em $[t_I, t_F]$.
- Uma vez calculado $G(t)$, precisamos calcular $g(x) = G(t(x))$, onde $t(x)$ é a transformação inversa de $x(t)$, isto é $t(x)$ satisfaz $x = \alpha t(x) + \beta$, o que fornece $t(x) = \alpha^{-1}(x - \beta)$. Então obtemos a função g que aproxima f na forma seguinte:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k^\star g_k(x) = G(t(x)) = \sum_{k=0}^{m} a_k^\star G_k(\alpha^{-1}(x - \beta)).$$

  Esse mostra também que $g_k(x) = G_k(\alpha^{-1}(x - \beta))$.

Exemplo (mudança de variaveis): Vamos aproximar $f(x) = \sin x$ em $[x_I, x_F] = [0, \pi]$ usando polinômios ortogonais de Legendre. Estes polinômios são dados em $[t_I, t_F] = [-1, 1]$ por

$$G_0(t) = 1, \quad G_1(t) = t, \quad G_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

Calculamos $x(t) = \alpha t + \beta = \frac{\pi}{2}(t + 1)$ e verificamos que $x([t_I, t_F]) = [x_I, x_F] = [0, \pi]$. Então temos $F(t) = f(x(t)) = \sin(\frac{\pi}{2}(t + 1))$. Como os polinômios G_1, G_2, G_3 são ortogonais, o sistema normal é diagonal, e podemos calcular diretamente a solução (usando integração por partes)

$$a_0^\star = \frac{\langle F, G_0\rangle}{\langle G_0, G_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} \sin(\frac{\pi}{2}(t+1))dt}{\int_{-1}^{1} dt} = \frac{2}{\pi}, \quad a_1^\star = \frac{\langle F, G_1\rangle}{\langle G_1, G_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} t\sin(\frac{\pi}{2}(t+1))dt}{\int_{-1}^{1} t^2 dt} = 0,$$

$$a_2^\star = \frac{\langle F, G_2\rangle}{\langle G_2, G_2\rangle} = \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right).$$

Assim, obtemos a solução

$$G(t) = a_0^\star G_0(t) + a_1^\star G_1(t) + a_2^\star G_2(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\frac{3t^2 - 1}{2}.$$

Usando a transformação inversa $t(x) = \frac{2}{\pi}x - 1$, obtemos a função g que aproxima $f(x) = \sin x$ em $[x_I, x_F] = [0, \pi]$ na forma seguinte:

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right)\frac{3(\frac{2}{\pi}x - 1)^2 - 1}{2}.$$

Análise harmônica e MMQ

- Neste capitulo vamos supor f periódica, e procuramos uma aproximação $g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)$ com funções g_k também periódicas, com o mesmo periodo que f.

- Uma classe bastante usada de funções periódicas, de periodo 2π, é $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=0}^{\infty}$.

- Então seja f ume função periódica de periodo 2π, vamos aproximar $f(x)$, usando MMQ, por

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

- Se o periodo de f for diferente de 2π, podemos usar uma mudança de variavel para aproximar com $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=0}^{\infty}$.

- Este tipo de aproximação chama-se análise harmônica.

Análise harmônica e MMQ: dominio contínuo

- O MMQ no contexto de funções periódicas de periodo 2π é:

$$\min_{(a_0,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m)\in\mathbb{R}^{2m+1}} E(a_0,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m) := \int_c^{c+2\pi} (f(x)-g(x))^2\,dx$$

  para qualquer constante c. É comum escolher $c = 0$ ou $c = -\pi$.
- Definimos também o produto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_c^{c+2\pi} f(x)g(x)dx.$$

- As funções $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=0}^{\infty}$ são ortogonais com respeito a este produto escalar.
- Por exemplo para $k \neq l$ temos

$$\begin{aligned}\langle\cos(kx),\cos(lx)\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos((k-l)x)+\cos((k+l)x)}{2}dx = 0.\end{aligned}$$

- Consequentemente, a matriz do sistema normal do MMQ usando as funções $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=0}^{\infty}$ é diagonal.

- Então obtemos imediatamente a solução do MMQ como

$$a_0^\star = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$
$$a_k^\star = \frac{\langle f, \cos kx\rangle}{\langle \cos kx, \cos kx\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx,$$
$$b_k^\star = \frac{\langle f, \sin kx\rangle}{\langle \sin kx, \sin kx\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

- Para obter estas formulas, usamos:

$$\langle \cos kx, \cos kx\rangle = \int_0^{2\pi} \cos(kx)^2 dx = \pi,$$
$$\langle \sin kx, \sin kx\rangle = \int_0^{2\pi} \sin(kx)^2 dx = \pi$$

Exemplo (análise harmônica e mudança de variaveis): Vamos fazer a análise harmônica da função F de periodo T definida por:

$$F(t) = \begin{cases} +1 & \text{em } [0, T/2], \\ -1 & \text{em } [T/2, T]. \end{cases}$$

Vamos usar a mudança de variaveis $t(x) = \frac{T}{2\pi}x$ e definir $f(x) := F(t(x))$. Então temos

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{em } [0, \pi], \\ -1 & \text{em } [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Aproximaremos f por

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

A soluçõ do MMQ é

$$a_0^\star = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} dx = 0,$$

$$a_1^\star = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos(x)dx = 0,$$

$$a_2^\star = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos(2x)dx = 0,$$

$$a_3^\star = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(3x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos(3x)dx = 0,$$

e para os parãmetros $b_k^\star$:

$$b_1^\star = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(x)dx = \frac{4}{\pi},$$
$$b_2^\star = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(2x)dx = 0,$$
$$b_3^\star = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(3x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(3x)dx = \frac{4}{3\pi}.$$

Então obtemos

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\sin(x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3x).$$

Usando a transformação inversa $x(t) = \frac{2\pi}{T}t$ obtemos a função $G(t)$ que aproxima $F(t)$ em $[0, T]$:

$$G(t) = g(x(t)) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right).$$

Análise harmônica e MMQ: dominio discreto

- No caso discreto da análise harmônica, consideramos $2n$ pontos $\{x_j\}_{j=0}^{2n-1}$ e uma função f tabelada com valores $\{f(x_j)\}_{j=0}^{2n-1}$ nestes pontos.
- Para facilitar a apresentação, vamos considerar uma discretização do intervalo $[-\pi, \pi]$ com pontos equidistantes e passo de discretização π/n, isto é $x_j = -\pi + \frac{j}{n}\pi$, para $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, assim teremos $x_0 = -\pi$ e $x_{2n-1} = \pi - \frac{\pi}{n}$.
- Hipótese importante: suponhamos $m < n$.
- Vamos considerar o problema de mínimos quadrados seguinte:

$$\min_{(a_0,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_{m-1})\in\mathbb{R}^{2m}} E(a_0,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_{m-1}) = \sum_{j=0}^{2n-1} \big(f(x_j) - g(x_j)\big)^2\, dx$$

  onde a função aproximadora tem a forma seguinte:

$$g(x_j) = \frac{a_0}{2} + a_m \cos(mx_j) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j).$$

- Observação: o fato de não colocar um termo $b_m \sin(mx_j)$ na função g é arbitrario. Alguns autores colocam este termo.

- Vamos definir $\phi_k(x) := \cos(kx)$ para $k = 1, \ldots, m$, e $\phi_{m+\ell}(x) := \sin(\ell x)$ para $\ell = 1, \ldots, m-1$. Definimos também o produto escalar de duas funções g e h definidas nos pontos $\{x_j\}_{j=0}^{2n-1}$ como:

$$\langle g, h \rangle := \sum_{j=0}^{2n-1} g(x_j) h(x_j).$$

- Podemos mostrar que as funções $\{\phi_i\}_{i=0}^{2m-1}$ são ortogonais com respeito a este produto escalar. Esta propriedade simplifica bastante a determinação da solução $(a_0^\star, \ldots, a_m^\star, b_1^\star, \ldots, b_{m-1}^\star)$.
- Para mostrar que $\{\phi_i\}_{i=0}^{2m-1}$ é uma familia de funções ortogonais, usamos o resultado seguinte.

Lema: Se $r \in \mathbb{N}$ não for um multiplo de $2n$, então

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \cos(rx_j) = 0, \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{2n-1} \sin(rx_j) = 0.$$

Se $r \in \mathbb{N}$ não for um multiplo de n, então

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (\cos(rx_j))^2 = n, \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{2n-1} (\sin(rx_j))^2 = n.$$

Idéia da demonstração: escrever $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ e calcular $\sum_{j=0}^{2n-1} e^{irx_j}$.

Usando este lema com $\phi_k(x) := \cos(kx)$ para $k = 1, \ldots, m$, e $\phi_{m+\ell}(x) := \sin(\ell x)$ para $\ell = 1, \ldots, m-1$, obtemos

$$\langle \phi_k, \phi_{m+\ell} \rangle = \sum_{j=0}^{2n-1} \cos(kx_j)\sin(\ell x_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n-1} \sin((k+\ell)x_j) + \sin((k-\ell)x_j) = 0,$$

pois ambos $(k+\ell)$ e $(k-\ell)$ não são multiplos de $2n$. De fato, usando à hipótese $m < n$, temos

$$-2n < 1 \leq k+\ell \leq 2m-1 < 2n,$$
$$-2n < 2-m \leq k-\ell \leq m-1 < 2n.$$

Theorema: Consideramos o problema de mínimos quadrados seguinte:

$$\min_{(a_0,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_{m-1})\in\mathbb{R}^{2m}} E(a_0,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_{m-1}) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left(f(x_j) - g(x_j)\right)^2 dx$$

onde a função aproximadora tem a forma seguinte:

$$g(x_j) = \frac{a_0}{2} + a_m \cos(mx_j) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \cos(kx_j) + b_k \sin(kx_j).$$

A solução do problema de mínimos quadrados é:

$$a_k^\star = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j)\cos(kx_j), \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, m,$$

$$b_k^\star = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j)\sin(kx_j), \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Idéia da demonstração (a fazer em exercício): Escrever as condições de otimalidade

$$\frac{\partial E}{a_k}(a_0^\star,\ldots,a_m^\star,b_1^\star,\ldots,b_{m-1}^\star) = 0, \quad \frac{\partial E}{b_k}(a_0^\star,\ldots,a_m^\star,b_1^\star,\ldots,b_{m-1}^\star) = 0.$$

e depois usar que $\{\phi_i\}_{i=0}^{2m-1}$ é uma familia de funções ortogonais.