Aula dia 18/03/20

Bom dia!

Falamos sobre o gráfico de controle u ou c

Objetivo: Monitorar a taxa média λ

Suposição: $X \rightarrow$ v.a segue uma distribuição Poisson com parâmetro λ.

$H_0: \lambda = \lambda_0$ $\quad$ $H_1: \begin{cases} \lambda \neq \lambda_0 \\ \lambda > \lambda_0 \\ \lambda < \lambda_0 \end{cases}$

Procedimento:

1- Num intervalo de tempo fixo h, (de hora em hora, 30 min a 30 min, etc)

2. Uma amostra aleatória de tamanho n é coletada, obtendo-se $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

3) A estatística utilizada no monitoramento deve ser $\overline{X}$, pois ela é bom estimador de λ. Ou seja

$$\hat{\lambda} = \overline{X}$$

Determinação dos limites de controle.

Veremos 2 casos de limites de controle: um utilizado a distribuição exata de $\overline{X}$ e outra aproximada baseado no Teorema Central do limite.

a) distribuição de $\overline{X}$ - Exata

$\overline{X} = \dfrac{\sum X_i}{n}$ Se soubermos qual a distribuição de $\sum X_i$, a distribuição de $\overline{X}$ está determinada. Sob H_0, $X_i \sim Poisson(\lambda_0)$. Segue $\sum X_i \sim Poisson(n\lambda_0)$.

Fixado $\alpha \rightarrow$ os limites de controle são determinados tal que estejam satisfeitas as equações:

$$P(\sum X_i > a) = \alpha/2 = P(\sum X_i < b)$$

$a \rightarrow$ Quantil tal que $P(\sum X_i < a) = 1 - \alpha/2$

$b \rightarrow$ Quantil tal que $P(\sum X_i < b) = \alpha/2$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} > \frac{\cancel{UCL}\ a}{n}\right) = \frac{\alpha}{2} = P\left(\bar{X} < \frac{b}{n}\right).$$

Segue que $\frac{a}{n} = UCL$ e $\frac{b}{n} = LCL$

Exercício ~~Exemplo~~: $n = 5$ e $H_0: \lambda = 0.5$.

Para

α	LCL	UCL
0.10		
0.05		
0.025		
0.01		
0.0027		

Usem a função do Excel p/ isto.

Para os ~~dados~~ casos unilaterais, procedimento similar, porém

$$P\left(\sum X_i < b\right) = \alpha\cancel{/2} \Rightarrow P\left(\bar{X} < \frac{b}{n}\right)$$

$b \rightarrow$ Quantil tal que acumulada resulte α

Segue que $\frac{k}{n} \to LCL$

$$E \quad P(\sum X_i > a) = \alpha \Rightarrow P(\overline{X} > \frac{a}{n})$$

$a \to$ Quantil de $\sum X_i \,/\, P(\sum X_i < a) = 1-\alpha$

~~Exemplo~~ Exercício - determine LCL / UCL para os dados unilaterais

α	n e $\lambda=0.5$: 3	n e $\lambda=0.5$: 9	n e $\lambda=1.0$: 3	n e $\lambda=1.0$: 9
	LCL	UCL	LCL	UCL
0.05				
0.03				
0.01				

O que é possível constatar?

Use a função no Excel ou no R p/ tal.

b) distribuição de $\bar{X}$ - aproximação

Pelo TCL, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{\text{sob } H_0} \sim N\left(\sum \mu_0, \sum \mu_0\right) \Rightarrow$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\mu_0}{n}\right)$$

Fixado $\alpha \Rightarrow$ caso bilateral

$$P(\bar{X} > UCL) = \alpha/2 = P(\bar{X} < LCL)$$

Segue que $LCL = \lambda_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$ e

$$UCL = \lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$$

Caso Unilateral

$$H_1: \lambda > \lambda_0 \Rightarrow UCL = \lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$$

$$H_1: \lambda < \lambda_0 \Rightarrow LCL = \lambda_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$$

Exercício = Para o monitoramento de λ,
Compare os limites de controle determinados com a ~~amostral~~ distribuição de $\bar{X}$:
exata e aproximada
no caso do teste bilateral.

		n = 5				n = 10			
		$\lambda = 0.5$		$\lambda = 10$		$\lambda = 0.5$		$\lambda = 10$	
	α	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
	0.10								
exata	0.05								
	0.01								
	0.10								
aprox	0.05								
	0.01								

Função Poder

$\beta = P(\text{aceitar } H_0,\ H_0 \text{ é falsa})$

Poder:

$1-\beta = P(\text{rejeitar } H_0,\ H_0 \text{ é falsa}).$

Vamos considerar que $\lambda_1 = \lambda_0(1+d)$, $d \neq 0$.

ou $\lambda_1 = \lambda_0 \delta$ ou $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\sqrt{\lambda_0}$.

$\sqrt{\lambda_0}(\sqrt{\lambda_0} + \Delta)$

Qualquer que seja a forma de expressar λ_1,

$$1-\beta = P(\bar{X} > UCL \mid \lambda_1) + P(\bar{X} < LCL \mid \lambda_1)$$

a) distribuição exata

$$1-\beta = P\left(\bar{X} > \frac{a}{n} \mid \lambda_1\right) + P\left(\bar{X} < \frac{b}{n} \mid \lambda_1\right) =$$

$$= P\left(\sum X_i > a \mid \lambda_1\right) + P\left(\sum X_i < b \mid \lambda_1\right)$$

Agora $\sum X_i$ sob $H_1 \sim \text{Poisson}(n\lambda_1)$

b) distribuição aproximada

$$1-\beta = P(\bar{X} > UCL \mid \lambda_1) + P(\bar{X} < LCL \mid \lambda_1)$$

Sabemos que $UCL = \lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$ e

$$LCL = \lambda_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$$

Segue que sob H_1: $\bar{X}_i \sim N\left(\lambda_1, \frac{\lambda_1}{n}\right)$, portanto

$$P(\bar{X} > UCL \mid \lambda_1) =$$

$$P\left(\bar{X} > \lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} \mid \lambda_1\right) =$$

$$P\left(Z > \frac{\lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1/n}}\right) =$$

$\boxed{\text{Se } \lambda_1 = \lambda_0(1+d)}$

$$P\left(Z > \frac{\lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} - \lambda_0(1+d)}{\sqrt{\frac{\lambda_0(1+d)}{n}}}\right) =$$

$$P\left(Z > \frac{\sqrt{n\lambda_0}(1-1-d) + z_{\alpha/2}}{\sqrt{1+d}}\right)$$

~~Similar~~ Similar p/ $P(\bar{X} < LCL \mid \lambda_1) =$

$$P\left(Z < \frac{-\sqrt{n\lambda_0}\,d \mp z_{\alpha/2}}{\sqrt{1+d}}\right)$$

Poder:

$$P\left(Z < \frac{-z_{\alpha/2} - \sqrt{n\lambda_0}\, d}{\sqrt{1+\alpha}}\right) + P\left(Z > \frac{z_{\alpha/2} - \sqrt{n\lambda_0}\, d}{\sqrt{1+\alpha}}\right)$$

se $\lambda_1 = \lambda_0 \delta$

$$P(\bar{X} > UCL \mid \lambda_1) + P(\bar{X} < LCL \mid \lambda_1)$$

$$P\left(Z > \frac{UCL - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1/\sqrt{n}}}\right) + P\left(Z < \frac{LCL - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1/n}}\right)$$

$$P\left(Z > \frac{\lambda_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} - \lambda_0\delta}{\sqrt{\frac{\lambda_0\delta}{n}}}\right) + P\left(Z < \frac{\lambda_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} - \lambda_0\delta}{\sqrt{\frac{\lambda_0\delta}{n}}}\right)$$

$$P\left(Z > \frac{\lambda_0(1-\delta) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}}{\sqrt{\frac{\lambda_0\delta}{n}}}\right) +$$

$$P\left(Z < \frac{\lambda_0(1-\delta) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}}{\sqrt{\frac{\lambda_0\delta}{n}}}\right) =$$

$$P\left(Z > \sqrt{\frac{n\lambda}{\delta}}(1-\delta) + z_{\alpha/2}\sqrt{\delta}\right) + P\left(Z < \sqrt{\frac{n\lambda}{\delta}}(1-\delta) - z_{\alpha/2}\sqrt{\delta}\right) =$$

$$P\left(Z > \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[(1-\delta)\sqrt{m\lambda_0} + \delta z_{\alpha/2}\right]\right) +$$

$$P\left(Z < \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[(1-\delta)\sqrt{m\lambda_0} - \delta z_{\alpha/2}\right]\right)$$

<u>Exercício</u> Sob $H_0: \lambda = 0.5, 10$

$H_1: \lambda_1 = \lambda_0 \delta$, $\delta = 0.5; \cancel{1.5}\ 2; 0.25; 4$

$\alpha = 0.10; 0.05; 0.01$

$n = 5, 30, 100$

Usem as distribuições exatas e assintóticas para calcular o poder. <u>O que pode se observar?</u>

		$\delta = 0.5$						$\delta = 2$						$\delta = 0.25$						$\delta = 4$					
	α	5		30		100		5		30		100		5		30		100		5		30		10	
		E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A	E	A
	0.10																								
$\lambda_0 = 0.5$	0.05																								
	0.01																								
	0.10																								
$\lambda_0 = 10$	0.05																								
	0.01																								

Resuma os resultados:

- O exato ≈ aproximado.
- O que acontece qdo $\lambda \to$ "pequeno" e λ "gde"

etc.

Resumo

Gráficos de controle

$\overline{X}$ → p/ monitorar μ → N

→ " " $p \sim$ Binomial/Bernoulli

→ " " $\lambda \sim$ Poisson

Distribuições abordadas até agora

distribuição	Parâmetros	$E(X)$	$Var(X)$
Normal	μ, σ^2	μ	σ^2
Bernoulli	p	p	$p(1-p)$
Binomial	$n.p$	np	$np(1-p)$
Poisson	λ	λ	λ

$\overline{X}$ → utilizado p/ monitorar média do processo.

Medidas de desempenho em gráfico de controle

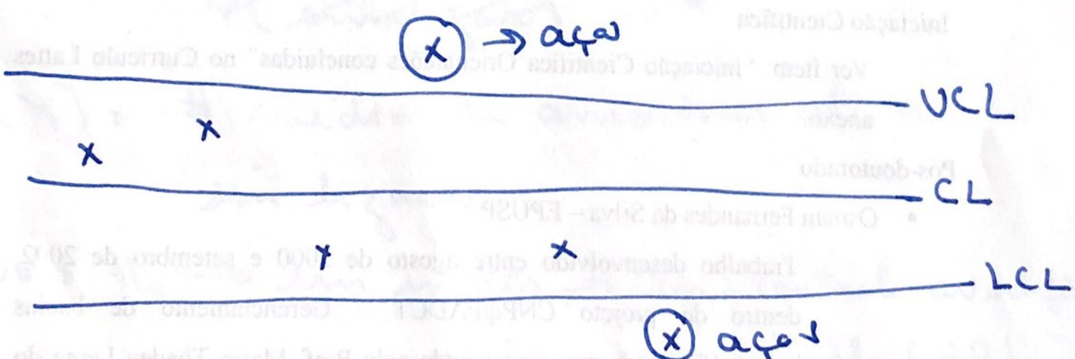
Planejamento de gráfico de controle:

$n \rightarrow$ tamanho de amostra

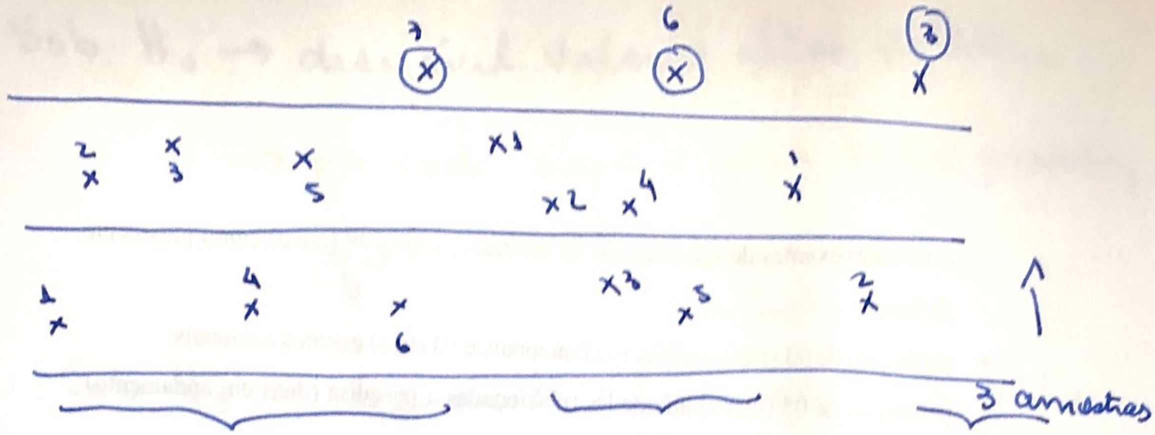
$LCL, UCL \rightarrow$ limites de controle

$h \rightarrow$ intervalo de inspeção (pode-se assumir por ora $h=1$).

Ação: ocorre se a estatística plotada ?
cair fora dos limites de controle



Uma medida de desempenho: ~~quantas~~ o número médio de amostras ~~em~~ necessárias ~~em média~~ para ocorrência de uma sinalização



7 amostras   6 amostras ...   3 amostras

Y = # de amostras até a ocorrência de uma sinalização → v.a

em inglês - run lenght

<u>Sob H_0</u> → Prob de sinalizar sob H_0 → α

→ Não sinalizar → $(1-\alpha)$

v.a → segue distribuição geométrica

$\cancel{E(Y) = \frac{1}{P(\text{sinalizar})} = \frac{1}{\alpha}}$

$E(Y)$ = # médio de amostras até a sinalização.

Sob H_0 → em inglês → In-control average ~~control~~ run length ($\underline{ARL_0}$)

Sob H_1 → Out-of-control average run length ($\underline{ARL_1}$)

Sob H_0 → desejável valores altos de ARL_0

→ pq cada alarme = gera uma parada

gasto. fora limites de controle

Sob H_1 → desejável valores baixos de ARL_1

$ARL_1 \cong 1$ → sinalização imediata

geralmente fixa-se valores de $ARL_0 = 370$,

ou 500

Se as observações (estatísticas) forem independentes

$$ARL_0 = \frac{1}{P(\text{sinalização})} = \frac{1}{\alpha}$$

Para $\alpha = 0.0027 \Rightarrow ARL_0 = 370$.

$$ARL_1 = \frac{1}{P(\text{sinalização})} = \frac{1}{1-\beta}$$

P(poder)

Agora, vocês devem entender

porque a minha insistência

de obter sempre o poder.

Ou seja, conseguindo obter o

poder, obtém-se ARLs

<u>Exercício</u> -

Refazer os exercícios de poder e

obter ARL's.

Monitoramento da variabilidade

Qdo monitoramos a média da Normal nas aulas anteriores, consideramos a variância conhecida.

Vamos supor que existe interesse em verificar se a variância está estável.

Existem várias estatísticas para isto:

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} S^2 \rightarrow \text{variância amostral} \\ \\ R \rightarrow \text{amplitude amostral} \\ \quad \max X_i - \min X_i \end{cases}$$

—— x —— x ——