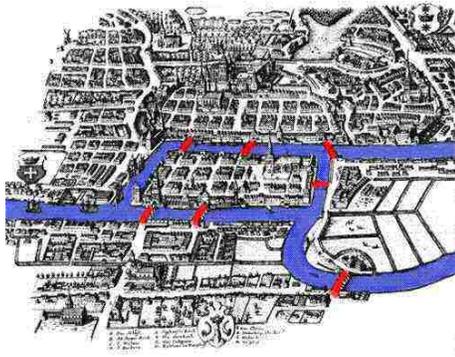


Capítulo 2

GRAFOS EULERIANOS

O PROBLEMA DAS 7 PONTES DE KÖNIGSBERG:

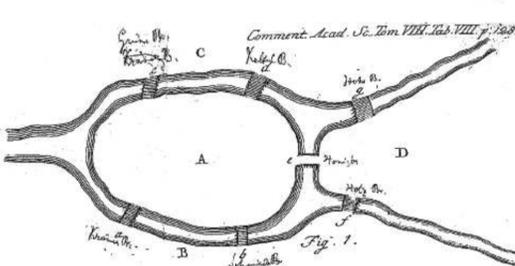
É possível achar um passeio que começa em uma das regiões de terra de Königsberg (regiões A, B, C, D na figura abaixo), passa por cada uma das 7 pontes exatamente uma vez e volta à região de origem?



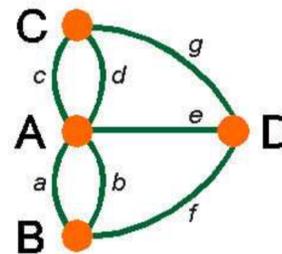
Königsberg em 1736
(hoje, Kaliningrado)



Leonhard Euler (1707-1783)



Desenho no artigo de Euler



Grafo G cujos vértices correspondem às regiões A, B, C, D

Considere um grafo G cujos vértices representem as regiões de terra (A, B, C, D), e cujas arestas representem as pontes ligando as regiões correspondentes (veja figura acima). É imediato que o problema das 7 pontes de Königsberg se reduz ao problema de decidir se o grafo G acima tem uma *trilha fechada* que passa por todas as suas arestas. Leonhard Euler (1736) provou que uma tal trilha não existe.

Uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo é chamada uma **trilha de Euler**, ou **trilha euleriana**. Um grafo é **euleriano** se possui uma trilha euleriana fechada.

[Königsberg ficava na antiga Prússia (século dezoito). Foi rebatizada de Kaliningrado pelos soviéticos em 1946. Atualmente pertence à Rússia. O rio, era conhecido como Pregel, hoje chama-se Pregolya. Euler era professor de matemática em St. Petersburgo quando tomou conhecimento do problema. Provou também resultados mais gerais sobre problemas do mesmo tipo. Não chegou porém a provar a suficiência da condição mencionada no teorema a seguir, embora seja considerado autor desse resultado. O artigo de Euler sobre o problema das 7 pontes e generalização desse problema, publicado em 1736, é considerado o primeiro artigo sobre teoria dos grafos. O termo *grafo* não é usado nesse artigo (em latim).]

Teorema 2.1. *Um grafo conexo é euleriano se e só se cada um de seus vértices tem grau par.*

Prova. [Suficiência da condição] (Prova usando argumento de contraexemplo minimal.)

Vamos provar que se G é um grafo conexo tal que todos os seus vértices têm grau par, então G é euleriano.

Suponha que a afirmação seja falsa. Ou seja, suponha que existam grafos conexos, cujos vértices são todos de grau par, e que sejam não-eulerianos. Escolha um tal grafo G com o menor número possível de arestas (um contraexemplo minimal).

Como G é conexo e tem grau mínimo 2 (note que o grafo trivial não seria um contraexemplo), então G tem um circuito, e portanto G tem uma trilha fechada. [Veja a Proposição 1.5 do Capítulo 1.] Seja T uma trilha fechada de comprimento máximo em G . Como T não é uma trilha euleriana (pois, por hipótese, G não é euleriano), T não contém todas as arestas de G . Assim, o grafo $G' = G - A(T)$ tem arestas. Assim, existe (pelo menos) um componente em G' que tem arestas (note que, G' pode ser desconexo e ter componentes que são vértices isolados). Considere um componente G^* de G' que tem arestas. Claramente, em G^* todos os vértices têm grau par. Portanto, como G^* é conexo, e todos os seus vértices têm grau par, segue que G^* é euleriano, pois caso contrário, G^* seria um contraexemplo menor que G (contradizendo a escolha de G). Assim, considere uma trilha euleriana fechada, digamos T^* em G^* .

Como G é conexo, existe um vértice v tal que $v \in V(T) \cap V(T^*)$. Sem perda de generalidade, suponha que v é a origem (e o término) de T e de T^* . Neste caso, $T.T^*$ é uma trilha fechada em G de comprimento maior do que o de T , uma contradição. Logo, não existe um contraexemplo para a afirmação do teorema, e com isso completamos a prova do teorema.

Corolário 2.2. *Um grafo conexo tem uma trilha euleriana se e só se tem no máximo 2 vértices de grau ímpar.*

Prova. [na aula]

Corolário 2.3. *Seja G um grafo conexo com $2k \geq 2$ vértices de grau ímpar. Então G tem k trilhas (abertas) T_1, T_2, \dots, T_k duas a duas disjuntas nas arestas e tais que $A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \dots \cup A(T_k)$.*

Prova. Chame de v_1, v_2, \dots, v_{2k} os vértices de grau ímpar de G . Para $i = 1, 2, \dots, k$, seja $\alpha_i = \{v_i, v_{k+i}\}$ uma aresta não pertencente a G . Considere o grafo $G' = G + \{\alpha_i : i = 1, 2, \dots, k\}$. Claramente, G' é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Portanto, pelo Teorema 2.1, G' é euleriano. Seja T uma trilha euleriana fechada de G . Chame de T_1, T_2, \dots, T_k as k seções de T que são obtidas ao remover de T o conjunto de arestas $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$. Note que as arestas α_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, são duas a duas independentes em G' , e portanto não ocorrem consecutivamente em T . Claramente, cada T_i é uma trilha em G (que começa e termina num vértice de grau ímpar de G), além disso, T_1, T_2, \dots, T_k são duas a duas disjuntas nas arestas e $A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \dots \cup A(T_k)$.

EXERCÍCIO 21. *Prove que um grafo conexo G é euleriano se e só se o conjunto das arestas de G pode ser particionado em circuitos.*

Denotamos por $c(\mathbf{G})$ o número de componentes de G . Dizemos que uma aresta α de G é uma **aresta-de-corte** ou **ponte** se $c(G - \alpha) > c(G)$.

ALGORITMO DE FLEURY

Entrada: Grafo conexo G com no máximo dois vértices de grau ímpar.

Saída: Trilha euleriana em G .

- (P_1) Se G possui vértices de grau ímpar, seja v_o um tal vértice; senão, seja v_o um vértice qualquer. Faça $T_o = (v_o)$.
- (P_2) Tendo escolhido a trilha $T_k = (v_o, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$, faça $G_k := G - \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Escolha em G_k uma aresta a_{k+1} incidente a v_k , dando preferência a uma que não seja ponte (se tal aresta não existir, escolha uma ponte). Seja $a_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ e $T_{k+1} := T_k \cdot (v_k, a_{k+1}, v_{k+1})$. Repita o passo P_2 enquanto isto for possível.

Teorema 2.4. *Seja G um grafo conexo com no máximo dois vértices de grau ímpar. Então o algoritmo de Fleury (acima definido) controla uma trilha euleriana em G .*

Prova. [Sugestão: provar por indução no número de arestas do grafo. (Veja Exercício 22.)]

EXERCÍCIO 22. *Faça a prova do Teorema 2.4 por indução no número de arestas do grafo.*

EXERCÍCIO 23. *Prove ou desprove: Existe um grafo conexo euleriano simples que tem um número par de vértices e um número ímpar de arestas.*

EXERCÍCIO 24. *Prove ou desprove: Se G é um grafo euleriano com arestas α, β que têm exatamente um vértice comum, então G tem uma trilha euleriana na qual α e β aparecem consecutivamente.*

EXERCÍCIO 25. *Seja G um grafo conexo, sem laços, cujos vértices têm grau par, e que possui um número par de arestas. Prove que as arestas de G podem ser coloridas com as cores azul e vermelha, de forma que em cada vértice incida o mesmo número de arestas azuis e vermelhas.*

Um problema relacionado - comentário na aula (como pode ser resolvido)

PROBLEMA CHINÊS DO CARTEIRO (Chinese Postman Problem): dado um grafo, encontrar um passeio fechado que passa por cada aresta pelo menos uma vez, e que seja de menor comprimento possível.