Aproveitando-se do fato que y_p é uma solução da equação (26), então:

$$y_p' = p + q \cdot y_p + r \cdot y_p^2 \qquad (33)$$

Substituindo a equação (33) na equação equação (32), temos:

$$\cancel{y_p' \cdot u^2} - u' = \cancel{y_p' \cdot u^2} + (q + 2 \cdot y_p) \cdot u + r \Rightarrow \boxed{u' + (q + 2 \cdot r \cdot y_p) \cdot u = -r} \qquad (34)$$

↳ Essa é uma E.D.O. linear de 1ª ordem não-homogênea que agora pode ser resolvida.

Equação Diferencial de Lagrange

Chama-se equação diferencial de Lagrange à E.D.O. que possui a seguinte forma:

$$y = x \cdot \Phi(y') + \Psi(y'), \qquad (35)$$

sendo $\Phi(y')$ e $\Psi(y')$ funções deriváveis na variável y'.

A solução geral da equação de Lagrange é geralmente apresentada na forma paramétrica, como um sistema de equações:

$$\begin{cases} x = e^{\int_{p_0}^{p} \frac{\Phi'(s)\,ds}{s - \Phi(s)}} \cdot \left(\int_{p_0}^{p} \frac{\Psi'(s)}{s - \Phi(s)} \cdot e^{-\int_{s_0}^{s} \frac{\Phi'(t)}{t - \Phi(t)} dt} \cdot ds + C \right) & (36.a) \\ y = x \cdot \Phi(p) + \Psi(p) & (36.b) \end{cases}$$

Demonstração: Para demonstrar a obtenção da equação de Lagrange, procederemos da seguinte forma:

Chamaremos $y' = p$, sendo $p(x) = p$, e o substituímos na equação (35), tal que:

$$y = x \cdot \Phi(p) + \Psi(p). \qquad (37)$$

Derivando-se a equação (37) em relação a x, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x \cdot \Phi(p) + \Psi(p)\right) = \Phi(p) + x \cdot \Phi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \Psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \qquad (38)$$

Rearranjando os termos da equação (39), chegamos à:

$$p-\Phi(p) = \left(x.\Phi'(p) + \Psi'(p)\right)\frac{dp}{dx} \qquad (39)$$

Admitindo que $p-\Phi(p) \neq 0$, dividiremos a equação acima por esse termo:

$$\left(\frac{1}{p-\Phi(p)}\right).\left(p-\Phi(p)\right) = \frac{1}{(p-\Phi(p))}.\left(x.\Phi'(p) + \Psi'(p)\right).\frac{dp}{dx} \qquad (40)$$

Rearranjando os termos da equação (40), obtemos:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x.\Phi'(p)}{p-\Phi(p)} + \frac{\Psi'(p)}{p-\Phi(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{\Phi'(p)}{p-\Phi(p)}.x = \frac{\Psi'(p)}{p-\Phi(p)} \qquad (41)$$

Repare que a equação (41) é uma E.D.O. linear em $x = x(p)$. Reescrevendo a equação (41) de forma a torná-la mais simples, chegamos à:

$$x' + a(p).x = b(p) \qquad (42)$$

sendo $a(p) = -\dfrac{\Phi'(p)}{p-\Phi(p)}$ e $b(p) = \dfrac{\Psi'(p)}{p-\Phi(p)}$

Para resolver a equação (42), podemos procurar por um fator integrante que seja somente dependente de p. Chamando $f(p)$ de fator integrante e usando a equação (15), temos:

$$f(p) = e^{\int a(p)dp} \qquad (43)$$

Multiplicando a equação (42) por $f(p)$, obtemos:

$$f(p).x' + f(p).a(p).x = f(p).b(p) \qquad (44)$$

Como já mostrado anteriormente, caso o fator integrante exista, a equação (44) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dp}[f(p).x] = f(p).\frac{dx}{dp} + f(p).a(p).x = f(p).b(p) \qquad (45)$$

Integrando-se a equação (45) em relação à p, chegamos à:

$$f(p).x = \int \frac{d}{dp}[f(p).x]dp = \int b(p).e^{\int a(p).dp}.dp + C \Rightarrow$$

$$e^{\int a(p)dp}.x = \int b(p).e^{\int a(p)dp}.dp + C \Rightarrow x = e^{-\int a(p)dp}.\left[\int b(p).e^{\int a(p)dp} + C\right] \qquad (46)$$

ou

$$x = e^{\int \frac{\Phi'(p)}{p-\Phi(p)}dp} \cdot \left[\int \frac{\Psi'(p)}{p-\Phi(p)} \cdot e^{-\int \frac{\Phi'(p)}{p-\Phi(p)}dp} + C \right] \quad (47)$$

Equações Diferenciais Exatas

Dizemos que uma E.D.O. de 1ª ordem

$$M(x,y) + N(x,y)\, dy' = 0 \quad (48)$$

é exata em uma determinada região aberta e simplesmente conexa (sem buracos), R, se existir uma função $u(x,y)$ e suas primeiras derivadas parciais forem contínuas, tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad (49)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad (50)$$

$\forall\ (x,y)$ em R e

$$u(x,y) = C \quad (51)$$

definir implicitamente $y = h(x)$ como uma função diferenciável de x. Dizemos que a equação (4) representa a forma da solução implícita de uma E.D.O. Se a equação (48) é exata, então o diferencial total da função $u(x,y)$ será dado por:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \quad (52)$$

Portanto, quando comparamos as equações (48) e (52), verificamos uma forma de assegurar que uma E.D.O. é exata, ou seja, as equações (49) e (50). Assim, nós podemos derivar uma expressão para verificar se a equação (48) é ou não exata. Sejam, portanto, $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ e $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ funções contínuas no retângulo

$$R = \{(x,y) : \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\},$$

Então, calculando-se as derivadas parciais das equações (49) e (50), em relação a x e y, obtemos:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad (53)$$

e

$$\frac{\partial u^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (54)$$

Como estamos supondo que $u(x,y)$ possui derivadas parciais contínuas, então:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (55)$$

Essa condição não é somente necessária, mas também suficiente para a equação (48) ser uma E.D.O. exata. Se a equação (48) é exata, então a função $u(x,y)$ pode ser obtida por integração da equação (49) ou (50). Integrando-se a equação (49) em relação a x, temos:

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y). \quad (56)$$

Como a integração é em relação a x, então y é encarado como uma "constante" e $k(y)$ fará o papel de uma constante de integração. Para determinar $k(y)$, nós derivamos a equação (56) em relação à y e a igualamos à equação (50) para obtermos $\frac{dk(y)}{dy}$. Em seguida, integramos $\frac{dk(y)}{dy}$ para obter a função $k(y)$. A função $u(x,y)$ pode ser igualmente obtida se integrarmos $u(x,y)$ em relação a y:

$$u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \ell(x). \quad (57)$$

Para determinar $\ell(x)$, basta derivar a equação (57) em relação a x, usar a equação (49) para obter $\frac{d\ell}{dx}$ e integrarmos $\frac{d\ell}{dx}$ para obter ℓ.

Exemplo: Resolva $\cos(x+y)\,dx + (3y^2 + 2y + \cos(x+y))\,dy = 0$

Solução: Primeiro Passo → Teste a equação para ver se a mesma é exata.

Veja, se compararmos a equação acima com a equação (48), então:

$$M(x,y) = \cos(x+y) \quad \text{e} \quad N(x,y) = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$$

Assim, basta derivarmos $M(x,y)$ e $N(x,y)$ para ver se obtemos derivadas parciais iguais. Derivando M em relação a y, temos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x+y)$$

Derivando, agora, N(x,y) em relação a x, chegamos à:

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\sin(x+y)$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, então podemos concluir que a equação é exata.

Segundo Passo: Obtendo uma solução geral explícita.

Por integração, obtemos u(x,y) como na equação (56):

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + K(y) = \int \cos(x+y)\,dx + K(y) = \sin(x+y) + K(y)$$

Em seguida, derivamos u(x,y) em relação a y:

$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \frac{dK(y)}{dy}$. Como $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ (ver equação 50), então:

$\cos(x+y) + \frac{dK(y)}{dy} = 3y^2 + 2y + \cos(x+y) \Rightarrow \frac{dK(y)}{dy} = 3y^2 + 2y$. Por integração, obtemos:

$K(y) = y^3 + y^2 + C$. Assim, $u(x,y) = \sin(x+y) + y^3 + y^2 + C$

Terceiro Passo: Verificando uma solução implícita

Nós verificamos a solução implícita diferenciando u(x,y) e observamos se o resultado nos leva à E.D.O. escrita na forma da equação (48).

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \cos(x+y)\,dx + (\cos(x+y) + 3y^2 + 2y)\,dy = 0$$

Fator Integrante

Algumas vezes, é possível converter uma E.D.O. que não é exata numa E.D.O. exata multiplicando-a por um fator integrante. Nos casos mais simples, nós podemos achar o fator integrante por tentativa e erro. Mas, de maneira geral, uma forma de achar o fator integrante é a seguinte:

Para $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, a condição para que a E.D.O. seja exata é: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Se multiplicarmos a equação não exata $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ por F, por exemplo, obtemos:

$$F.P.dx + F.Q.dy = 0. \qquad (58)$$

Para que a E.D.O. seja exata, então:

$$\frac{\partial(F.P)}{\partial y} = \frac{\partial(F.Q)}{\partial x} \qquad (59)$$

Pela regra do produto, chegamos à:

$$\frac{\partial F}{\partial y}.P + F.\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}.Q + \frac{\partial Q}{\partial x}.F \qquad (60)$$

De forma a descomplicar o problema, nós procuramos por um fator integrante somente em uma variável: felizmente, em muitos casos, há dois fatores. Assim, tomemos $F \equiv F(x)$. Então, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ e a equação (60) pode ser reescrita como:

$$F.\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}.Q + \frac{\partial Q}{\partial x}.F \qquad (61)$$

Dividindo-se a equação (61) por F.Q e reorganizando os termos, chegamos à:

$$\frac{1}{F.Q}\left(F.\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{F.Q}\left(\frac{\partial F}{\partial x}.Q\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}.F\right).\frac{1}{F.Q} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Q}.\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{F}.\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}.\frac{1}{Q} \Rightarrow \frac{1}{F}.\frac{\partial F}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{= R}$$

$$\frac{1}{F}.\frac{\partial F}{\partial x} = R \qquad (62)$$

Isso prova o seguinte teorema:

Teorema 1: Se uma E.D.O. não exata $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ é tal que R depende somente de x, então essa E.D.O. possui fator de integração $F \equiv F(x)$, o qual é obtido integrando-se à equação (62) e tomando-se os expoentes em ambos os lados da equação tal que:

$$F(x) = e^{\int R(x)dx} \qquad (63)$$

já que $\frac{\partial F}{F} = R.dx \Rightarrow \int \frac{dF}{F} = \int R.dx \Rightarrow \ln|F| = \int R.dx \Rightarrow e^{\ln|F|} = e^{\int R(x)dx} \Rightarrow$

$F = e^{\int R(x)dx}$. Similarmente, se $F^* = F^*(y)$, então ao invés da equação (62), nós obteríamos: $\frac{1}{F^*}.\frac{\partial F^*}{\partial y} = R^*$, com $R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

Assim,

$$F^*(y) = e^{\int R^*(y)\,dy} \quad (64)$$

<u>Exemplo</u>: Verifique se a E.D.O. $(e^{x+y} + y.e^{y})dx + (x.e^{y} - 1)dy = 0$ é exata. Caso não seja, ache o fator integrante para transformá-la em uma E.D.O. exata e ache a solução geral dela.

<u>Primeiro passo</u>: Verificando se a E.D.O. é exata:

$$P(x,y) = e^{x+y} + y.e^{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y} + y.e^{y}) = e^{x+y} + e^{y} + y.e^{y}$$

$$Q(x,y) = x.e^{y} - 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, então a E.D.O. não é exata.

<u>Segundo passo</u>: <u>Achar o fator de integração</u>

Neste caso, não é possível achar o fator de integração com a equação (63) porque R depende tanto de x quanto de y. No entanto, com a equação (64), nós podemos calcular R^*. Logo:

$$R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{x.e^{y}}\left[(e^{x+y} + e^{y} + y.e^{y}) - e^{y}\right] \Rightarrow R = \frac{e^{x+y} + y.e^{y}}{x.e^{y} - 1}$$

↳ depende tanto de x quanto de y.

$$R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{e^{x+y} + y.e^{y}} \cdot (e^{y} - e^{x+y} - e^{y} - y.e^{y}) = -1$$

Em seguida, basta usarmos a equação (64) para obtermos o fator de integração:

$$F^*(y) = e^{-y}$$

A partir desses dois últimos resultados, nós obtemos a equação exata:

$$F.P = e^{-y}(e^{x+y} + y.e^{y}) = e^{x} + y$$

$$F.Q = e^{-y}(x.e^{y} - 1) = x - e^{-y}$$

$$(e^x+y)dx + (x-e^{-y})dy = 0$$

Para verificar se a equação obtida é, de fato, exata, usaremos a equação (55):

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$. Procuraremos, agora, pela função $u(x,y)$, solução da E.D.O.: Integrando $M(x,y) = (e^x+y)$, em relação a x, temos: $u(x,y) = \int (e^x+y)dx = e^x + x.y + k(y)$. Diferenciando $u(x,y)$ em relação a y, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dk(y)}{dy} = N = x - e^{-y} \quad \therefore \quad \frac{dk(y)}{dy} = -e^{-y}, \quad k = e^{-y} + C^*$$

Assim, a solução geral é:

$$\boxed{u(x,y) = e^x + x.y + e^{-y} + C^*}$$

Existência e Unicidade de soluções para problemas de valor inicial

Problemas de Valor Inicial (PVI)

Definição: Um sistema formado por:

- Uma E.D.O. de ordem n e
- n condições complementares que determinam, em um mesmo valor da variável independente, o valor da função incógnita e suas derivadas é chamado de problema de valor inicial (PVI). As condições complementares são ditas condições iniciais.

Um problema de valor inicial para E.D.O. de ordem n é do tipo:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), y^{(3)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \qquad (65)$$

Uma solução do problema de valor inicial é uma função que satisfaz tanto a E.D.O. como as condições complementares.

Exemplo: Resolva o seguinte problema do valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = 3y \\ y(0) = 5,7 \end{cases}$$

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = 3y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3dx \Rightarrow \ln|y| = 3x + C \Rightarrow$$

$$e^{\ln|y|} = e^{3x+C} \Rightarrow y = D.e^{3x}$$, sendo $D = e^{C}$ uma constante arbitrária.

A partir da solução geral obtida para a E.D.O., nós obtemos uma solução particular impondo-se as condições iniciais: $y(0) = D.e^{3(0)} = 5.7 \Rightarrow D = 5,7$. Portanto, o problema de valor inicial tem a solução $y(x) = 5,7.e^{3x}$. Essa é uma solução particular do problema.

Existência e Unicidade de Soluções para (PVI)

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esse problema de valor inicial não possui solução porque $y = 0$ é a única solução dessa E.D.O.

Considere, agora, outro problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Veja que esse problema tem solução: $y = x^2 + 1$.

Para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x.y' = y - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

encontramos infinitas soluções, já que $y = 1 + C.x$, sendo C uma constante arbitrária, pois $y(0) = 1$ para qualquer C.

A partir dos exemplos mostrados acima, nós percebemos que um problema ou valor inicial pode não ter solução, pode ter solução única ou pode ter infinitas soluções.

Esses fatos nos levam a duas questões fundamentais:

- **Problema de Existência**

  - Sob quais condições um problema de valor inicial da forma:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem ao menos uma solução?

- **Problema de unicidade**

  - Sob quais condições o problema possui uma única solução?

Teorema 1 : Teorema da Existência

Suponha que $f(x,y)$ em um problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (66)$$

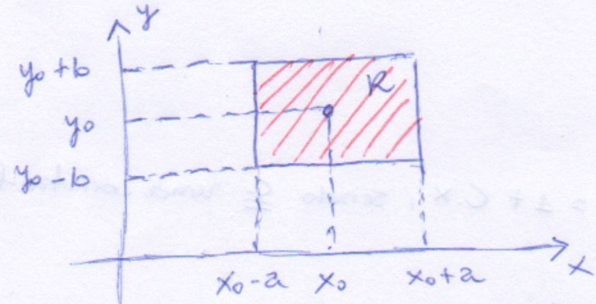
Seja contínua em todos os pontos (x,y) em algum retângulo

$$R: |x - x_0| < a \quad , \quad y\ |y - y_0| < b$$

e limitada em R, isto é, existe um número $\underline{K}$ tal que:

$$|f(x,y)| \leq K \qquad (67)$$

$\forall (x,y) \subset R$. Nessas condições, o problema de valor inicial (66) tem ao menos uma solução $y(x)$. Essa solução existe ao menos para todo x no intervalo $|x - x_0| \leq \alpha$ do intervalo $|x - x_0|$, sendo α o menor dos dois números a e b/K.



Retângulo R nos teoremas da existência e unicidade

Teorema da Unicidade

Sejam $f(x,y)$ e sua derivada parcial em relação a y, f_y, contínuas para qualquer (x,y) contido no retângulo R e limitadas, tal que:

$$|f(x,y)| \leq K \qquad (68)$$

e

$$|f_y(x,y)| \leq M \qquad (69)$$

para todos os (x,y) em $\underline{\underline{R}}$. Então, o problema de valor inicial dado por (66) tem no máximo uma solução. Assim, pelo teorema 1, o problema tem precisamente uma solução. Essa solução existe ao menos para todo x no subintervalo $|x-x_0|<\alpha$.

E.D.O.'s lineares de 2ª ordem

Uma E.D.O. de segunda ordem é classificada como linear se ela puder ser escrita na forma:

$$y''(x) + p(x).y'(x) + q(x).y(x) = r(x), \qquad (70)$$

sendo $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas num intervalo aberto I e $r(x)$ uma função dada. Se a E.D.O. de 2ª ordem não puder ser escrita na forma da equação (70), então ela é não-linear.

Se

$$r(x) = \begin{cases} 0, & \text{a E.D.O. é dita ser homogênea} \\ \neq 0, & \text{a E.D.O. é dita ser não-homogênea} \end{cases}$$

Princípio da Superposição

As E.D.O.'s lineares possuem uma propriedade muito importante. Essa propriedade é conhecida como princípio da superposição e diz que mais soluções de uma E.D.O. podem ser obtidas combinando-se soluções conhecidas, somando-as ou multiplicando-as por uma constante arbitrária.

Teorema Fundamental para E.D.O.'s lineares homogêneas de 2ª ordem

Para qualquer E.D.O. linear homogênea de 2ª ordem

$$y''(x) + p(x).y'(x) + q(x).y(x) = 0 \qquad (71)$$

qualquer combinação linear de duas soluções em um intervalo aberto I é também soluções da equação (71) em I. Em particular, para tal equação, a soma de duas soluções multiplicadas por constantes arbitrárias é também solução da equação (71).

Prova: Sejam y_1 e y_2 duas soluções quaisquer linearmente independentes da equação (71) no intervalo aberto I. Se calcularmos a derivada primeira e segunda da combinação linear $y = C_1 . y_1 + C_2 . y_2$, sendo C_1 e C_2 duas constantes arbitrárias e substituirmos y, y' e y'' na equação (72), obtemos:

$$y = C_1 . y_1 + C_2 . y_2 \quad , \quad y' = C_1 . y_1' + C_2 . y_2' \quad , \quad y'' = C_1 . y_1'' + C_2 . y_2''$$

$$y'' + p(x) . y' + q(x) . y = (C_1 . y_1'' + C_2 . y_2'') + p(x) . (C_1 y_1' + C_2 . y_2') + q(x)((C_1 . y_1 + C_2 . y_2)) =$$

$$C_1 \underbrace{(y_1'' + p(x) . y_1' + q(x) . y_1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + C_2 \underbrace{(y_2'' + p(x) . y_2' + q(x) . y_2)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

Importante! Esse teorema é válido para E.D.O's lineares homogêneas, ou seja, sua aplicação não é válida para E.D.O.'s lineares não-homogêneas nem E.D.O.'s não-lineares.

Independência Linear de Soluções

Duas soluções são linearmente independentes se satisfazem a seguinte equação:

$$C_1 . y_1(x) + C_2 . y_2(x) = 0, \quad (71)$$

$\forall x$, se e somente se $C_1 = C_2 = 0$, ou seja, não é possível achar $C \neq 0$ tal que a relação $y_2(x) = C . y_1(x)$ seja verdadeira. Se fosse possível achar $C \neq 0$ tal que $y_2(x) = C . y_1(x)$ as soluções fossem linearmente dependentes, e que pudéssemos formar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y_2(x) = C . y_1(x) & (72.a) \\ y_2'(x) = C . y_1'(x) & (72.b) \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação (72.a) por $-y_2'$ e a equação (72.b) por y_2', o sistema acima será reescrito como:

$$\begin{cases} -y_2' . y_2 = -C . y_2' . y_1 & (73.a) \\ y_2' . y_2 = C . y_1' . y_2 & (73.b) \end{cases}$$

Somando-se as equações (73.a) e (73.b), temos:

$$C.y_1'.y_2 - C.y_2'.y_1 = 0 \Rightarrow C.(y_1'.y_2 - y_2'.y_1)$$. Como $C \neq 0$ por suposição, para y_1 e y_2 linearmente dependentes, então:

$$y_1' y_2 - y_2'.y_1 = 0 \qquad (74)$$

A quantidade $y_1'.y_2 - y_2'.y_1$ representa o Wronskiano de y_1 e y_2, que é o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \qquad (75)$$

Assim, as soluções y_1 e y_2 em um intervalo I são linearmente dependentes se e somente se o Wronskiano $W(y_1, y_2) = y_1'.y_2 - y_2'.y_1$ é zero em algum ponto $x = x_0$ dentro do intervalo I. Além disso, se $W(y_1, y_2) = 0$ em um ponto $x = x_0$ dentro do intervalo I, então $W(y_1, y_2) = 0$ sobre todo o intervalo I. Dessa forma, se existe um ponto x_1 em I no qual $W(y_1, y_2)$ é diferente de zero, então y_1 e y_2 são linearmente independentes sobre todo o intervalo I.

E.D.O.'s lineares de 2ª ordem a coeficientes constantes

São E.D.O.'s da forma:

$$y''(x) + a.y'(x) + b.y(x) = r(x) \qquad (76)$$

sendo a e b coeficientes constantes. e

$$r(x) = \begin{cases} = 0, & \text{a E.D.O é homogênea} \qquad (77.a) \\ \neq 0, & \text{a E.D.O. é não-homogênea} \qquad (77.b) \end{cases}$$

Solução da E.D.O. linear homogênea de 2ª a coeficientes constantes

A solução da E.D.O. homogênea

$$y''(x) + a.y'(x) + b.y(x) = 0 \qquad (78)$$

é da forma $y = C.e^{p.x}$, sendo C e p constantes. Calculando-se y' e y'', obtemos:

$$y' = C.p.e^{p.x} \qquad (79)$$

e

$$y''(x) = C \cdot p^2 \cdot e^{p.x} \quad (80)$$

Substituindo y' e y'' na equação (78), chegamos à:

$$C \cdot p^2 \cdot e^{p.x} + a \cdot C \cdot p \cdot e^{p.x} + b \cdot C \cdot e^{p.x} = 0 \quad (81)$$

Colocando-se os termos em comum em evidência, temos:

$$C \cdot e^{p.x} \underbrace{(p^2 + a.p + b)}_{\text{polinômio característico}} = 0$$

$C \cdot e^{p.x} \neq 0$

$\to = 0$ Solução trivial

As soluções não triviais da E.D.O. (76) são dadas estabelecendo-se as raízes do polinômio característico: $p^2 + a.p + b = 0$, ou seja,

$$p = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4.b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Para diferentes a e b, podemos ter as seguintes situações:

(1) Raízes reais e distintas, ou seja, $\Delta > 0$;

(2) Raízes reais e iguais, ou seja, $\Delta = 0$;

(3) Raízes complexas conjugadas, ou seja, $\Delta < 0$.

Como o polinômio característico é de grau dois, existirão duas soluções distintas linearmente independentes da forma $y(x) = C.e^{p.x}$. A solução geral será dada pela combinação linear dessas soluções (princípio da superposição).

Para o caso (1):

$$p_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{raízes reais distintas}$$

Nessa situação, tem-se duas famílias de soluções para a E.D.O.:

$$y_1(x) = C_1.e^{p_1.x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = C_2.e^{p_2.x}$$

Pelo princípio da superposição, $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução dessa E.D.O. e também é solução geral dela.

Para o caso (2): $\Delta = 0$, $p_1 = p_2 = -\frac{a}{2}$, raiz dupla.

Nessa situação, tem-se uma única família de soluções: $y_1 = C_1 . e^{p.x}$, sendo $p = -\frac{a}{2}$.

No entanto, E.D.O.'s de 2^a ordem sempre possuem duas famílias de soluções independentes. Para se obter a segunda família de soluções, faz-se uso da seguinte propriedade:

Se $p_1 = -\frac{a}{2}$ é raiz do polinômio característico, então p_1 é também raiz da derivada do polinômio característico. O polinômio característico $p^2 + a.p + b = 0$ possui raiz dupla $p_1 = -\frac{a}{2}$.

Derivando-se o polinômio característico em relação a p, temos: $\frac{d}{dp}(p^2 + a.p + b) = 0 \Rightarrow$

$2.p + a = 0 \Rightarrow p = -\frac{a}{2}$ $\therefore$ $\boxed{y_2(x) = \frac{d}{dp}(y_1(x))}$

↳ É a segunda solução independente da E.D.O.

Disso, resulta a seguinte família de soluções:

$$y_2(x) = C_2 . x . e^{p.x}$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral será dada por:

$$y(x) = (C_1 + C_2 . x) . e^{p.x} \quad (p \text{ é raiz dupla})$$

Para o caso 3: $\Delta < 0$, $p_1 = \frac{-a + i\sqrt{\Delta}}{2}$, $p_2 = \frac{-a - i\sqrt{\Delta}}{2}$, raízes complexas conjugadas.

Por praticidade, escreve-se:

$p_1 = \alpha + i\beta$
$p_2 = \alpha - i\beta$, sendo $\alpha = -\frac{a}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$

Dessa forma, tem-se as soluções:

$$y_1(x) = C_1 . e^{p_1 . x} = C_2 . e^{(\alpha + i.\beta).x}$$

$$y_2(x) = C_2 . e^{p_2 . x} = C_2 . e^{(\alpha - i\beta).x}$$

Essas são soluções complexas da E.D.O.. Para se obter soluções reais, procedemos da seguinte forma:

$$y_1(x) = C_1 . e^{\alpha . x} . e^{i\beta . x}$$

$$y_2(x) = C_2 . e^{\alpha . x} . e^{-i\beta . x}$$

Como C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, podemos tomá-las, num primeiro momento como $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, obtendo duas soluções particulares:

$$y_{1P}(x) = \frac{1}{2} . e^{\alpha . x} . e^{i\beta x} \quad \text{e} \quad y_{2P}(x) = \frac{1}{2} . e^{\alpha . x} . e^{-i\beta . x}$$

Como pelo princípio da superposição qualquer combinação linear de y_{1P} e y_{2P} é solução da E.D.O., então, $u(x) = y_{1P} + y_{2P}$ é solução. Logo:

$$u(x) = \frac{e^{\alpha . x} . e^{i.\beta . x} + e^{\alpha . x} . e^{-i.\beta . x}}{2} = \frac{e^{\alpha . x}(e^{i.\beta . x} + e^{-i.\beta . x})}{2} = e^{\alpha . x} . \cos(\beta . x)$$

Obtemos, assim, uma solução real independente $u(x)$. Para determinar outra solução real independente $v(x)$, tomemos $C_1 = \frac{1}{2i}$ e $C_2 = -\frac{1}{2i}$. Pelo princípio da superposição:

$$v(x) = y_{1P}(x) + y_{2P}(x)$$

$$v(x) = \frac{1}{2i} . e^{\alpha . x} . e^{i\beta x} - \frac{1}{2i} e^{\alpha . x} . e^{-i\beta x} = \frac{e^{\alpha . x} . e^{i\beta x} - e^{\alpha . x} . e^{-i\beta x}}{2i} = \frac{e^{\alpha . x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})}{2} =$$

$e^{\alpha . x} . \sin(\beta . x)$. Assim, usando o princípio da superposição, a solução geral da E.D.O. é:

$$y(x) = D_1 . e^{\alpha . x} . \cos(\beta . x) + D_2 . e^{\alpha . x} . \sin(\beta . x)$$

sendo D_1 e D_2 constantes arbitrárias.

Obs.: Muitos sistemas físicos são descritos por E.D.O.'s lineares de 2^a ordem. No entanto, na maioria das situações, somente são válidas soluções decrescentes no tempo. Soluções crescentes não são realizáveis fisicamente.

E.D.O.'s lineares de 2^a ordem não-homogênea

As E.D.O.'s lineares de 2^a ordem não-homogênea possuem a seguinte forma:

$$y''(x) + p(x) . y'(x) + q(x) . y(x) = r(x) \qquad (82)$$

Sendo $r(x) \neq 0$, $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ funções contínuas num intervalo aberto I. Como no caso da E.D.O. linear de 1^a ordem, a solução geral da E.D.O. de 2^a ordem é dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

sendo $y_h(x)$ a solução geral da E.D.O. homogênea associada e $y_p(x)$ uma solução particular da não-homogênea. Se nós tivermos uma E.D.O. a coeficientes constantes, $y'' + a.y' + b.y = r(x)$, então uma forma de se determinar uma solução particular é através do método dos coeficientes a determinar. Nesse método, a solução é simplificada quando $r(x)$ é um polinômio em x, exponencial em x e seno/cosseno em x ou um produto desses tipos de funções. Esse método, no entanto, é restritivo à funções de $r(x)$ nas quais as derivadas possuem forma similar a própria função $r(x)$, como explicado acima. Assim, é desejável que possamos ter um método mais geral para se resolver a equação (82). Um método que atende esse requesito é o método da variação de parâmetros ou método de Lagrange. Esse método é atribuído ao matemático ítalo-francês Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia).

Método da variação dos parâmetros ou método de Lagrange

O método de variação dos parâmetros nos permite calcular uma solução particular da equação não-homogênea dada pela equação (82), ou seja, ele também funciona quando $p(x)$ e $q(x)$ não são funções constantes.

A idéia do método consiste em encontrarmos uma solução particular da equação não-homogênea (82) da seguinte forma:

$$y_p(x) = y_1(x).u_1(x) + y_2(x).u_2(x), \qquad (83)$$

sendo $u_1(x)$ e $u_2(x)$ funções de x que deverão ser determinadas. A idéia parte, justamente, da solução geral E.D.O. homogênea associada:

$$y_h(x) = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) \qquad (84)$$

sendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente indepedentes da homogênea. Na equação (84), portanto, C_1 e C_2 são substituídas pelas funções u_1 e u_2. As funções u_1 e u_2 serão obtidas ao substituirmos a equação (83) e suas derivas na equação (82), como a seguir:

$$y_p' = y_1'.u_1 + y_2'.u_2 + \underbrace{y_1.u_1' + y_2.u_2'}_{=\text{ equação } 86}. \qquad (85)$$

A equação (83) deve satisfazer à equação (82). Isso nos fornece uma condição para determinarmos duas funções u_1 e u_2. Assim, precisamos determinar uma segunda condição. A condição a ser imposta é a seguinte:

$$y_1.u_1' + y_2.u_2' = 0 \qquad (86)$$

Substituindo a equação (86) na equação (85), temos:

$$y_p' = y_1'.u_1 + y_2'.u_2. \qquad (87)$$

Derivando-se a equação (87), chegamos à:

$$y_p'' = y_1''\cdot u_1 + y_2''\cdot u_2 + y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2'. \qquad (88)$$

Agora, substituindo as equações (83), (87) e (88), obtendo:

$$(y_1''\cdot u_1 + y_2''\cdot u_2 + y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2') + p(x)(y_1'\cdot u_1 + y_2'\cdot u_2) + q(x)\cdot(y_1\cdot u_1 + y_2\cdot u_2) = r(x) \Rightarrow$$

$$(y_1'' u_1 + p(x)\cdot y_1'\cdot u_1 + q(x)\cdot y_1\cdot u_1) + (y_2''\cdot u_2 + p(x)\cdot y_2'\cdot u_2 + q(x)\cdot y_2\cdot u_2) + y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2' = r(x) \Rightarrow$$

$$\underbrace{(y_1'' + p(x)\cdot y_1' + q(x)\cdot y_1)}_{0}\cdot u_1 + \underbrace{(y_2'' + p(x)\cdot y_2' + q(x)\cdot y_2)}_{0}\cdot u_2 + y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2' = r(x) \qquad (89)$$

Como y_1 e y_2 são soluções da E.D.O. homogênea associada, a equação (89) será dada por:

$$y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2' = r(x). \qquad (90)$$

Dessa forma, u_1' e u_2' são soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2' = r(x) & (91.a) \\ y_1\cdot u_1' + y_2\, u_2' = 0 & (91.b) \end{cases}$$

Na forma matricial, o sistema (91) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(x) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (92)$$

O sistema de equações (91) pode ser resolvido por eliminação da seguinte maneira:

Multiplequemos a equaçã (91.a) por $-y_2$ e a equação (91.b) por y_2', tal que:

$$\begin{cases} -y_2\cdot y_1'\cdot u_1' - y_2\cdot y_2'\cdot u_2' = -y_2\cdot r(x) & (93.a) \\ y_2'\cdot y_1\cdot u_1' + y_2'\cdot y_2\cdot u_2' = 0 & (93.b) \end{cases}$$

Somando-se as equações (93.a) e (93.b), obtemos:

$$u_1'(y_2'\cdot y_1 - y_2\cdot y_1') = -y_2\cdot r(x) \qquad (94)$$

A equação (94) pode ser reescrita como:

$$u_1' = \frac{-y_2 \cdot r(x)}{(y_2' \cdot y_1 - y_2 \cdot y_1')} \quad \text{ou} \quad u_1' = \frac{y_2 \cdot r(x)}{(y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_1)} \qquad (95)$$

Sendo $(y_2 \cdot y_1' - y_2' \cdot y_1) = W(y_1, y_2)$ o Wronskiano, que é o determinante da primeira matriz da equação (92). Para isolarmos u_2', nós multiplicamos a equação (91.a) por y_1 e a equação (91.b) por $-y_1'$. Assim,

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_1' \cdot u_1' + y_1 \cdot y_2' \cdot u_2' = y_1 \cdot r(x) & (96.a) \\ -y_1' \cdot y_1 \cdot u_1' - y_1' \cdot y_2 \cdot u_2' = 0 & (96.b) \end{cases}$$

Somando-se as equações (96.a) e (96.b), obtemos:

$$u_2' (y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2) = y_1 \cdot r(x) \qquad (97)$$

A equação (97) pode ser reescrita como:

$$u_2' = \frac{y_1 \cdot r(x)}{(y_1 \cdot y_2' - y_1' y_2)} \quad \text{ou} \quad u_2' = \frac{-y_1 \cdot r(x)}{(y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_1)} \qquad (98)$$

Integrando-se as equações (95) e (98) em relação a x, obtemos:

$$u_1 = \int u_1' \, dx = \int \frac{r(x) \cdot y_2 \cdot dx}{y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_1} \qquad (99)$$

e

$$u_2 = \int u_2' \, dx = \int \frac{-r(x) \cdot y_1 \cdot dx}{y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y} \qquad (100)$$

A solução particular da E.D.O. de 2ª ordem linear não-homogênea, $y_p(x)$, será dada, portanto, por:

$$\boxed{y_p = y_1 \cdot \int \frac{r(x) \cdot y_2}{y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_1} dx + y_2 \cdot \int \frac{-r(x) \cdot y_1 \cdot dx}{y_1' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_1}} \qquad (101)$$

Caso ao final da integração do primeiro e do segundo membro do lado direito da equação (101) seja adicionada a constante de integração, obtemos, diretamente, a solução **Geral** da E.D.O. não homogênea:

$$\boxed{y(x) = y_1 \cdot \int \frac{r(x) \cdot y_2 \, dx}{W(y_1, y_2)} + y_1 \cdot C_1 + y_2 \cdot \int \frac{-r(x) \cdot y_1}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \cdot C_2} \quad (102)$$

sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias.