Energia no Movimento Harmônico Simples

A energia cinética do corpo de massa m é

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t).$$

Substituindo nesta expressão a equação para $x(t)$ deduzida na aula 1,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

temos que

$$K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

A energia potencial de um corpo que obedece a lei de Hooke é dada pela integral da lei de força em relação a x[1],

$$U(x) = -\int_0^x F(x)dx.$$

Definindo $U(0) = 0$,

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2,$$

onde se usou a equação (3) da aula 1 ($\omega^2 = k/m$). Substituindo a expressão para $x(t)$ nesta equação

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (2)$$

[1] Dica: Faça uma revisão das suas notas de aula de Física I sobre energia mecânica.

Somando (1) e (2) temos a expressão para a energia total do sistema:

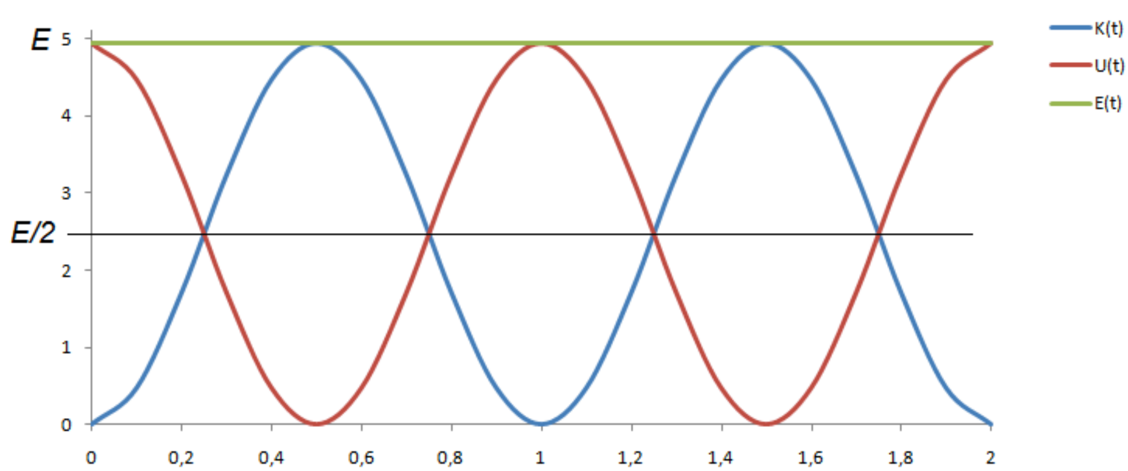
$$E = K + U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2, \tag{3}$$

onde se usou a identidade trigonométrica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Notem que a expressão (3) não depende de *t*. A energia total de um sistema que executa o MHS é constante, ela se conserva.

Notem também que a energia total é proporcional ao quadrado da amplitude A do movimento oscilatório e ao quadrado da frequência ω.

O gráfico abaixo mostra os valores de $K(t)$, $U(t)$ e $E(t)$ durante um período de oscilação (o gráfico foi feito no Excel e os valores usados para os parâmetros das equações acima foram $m = 1$, $A = 1$, $\varphi_0 = 0$ e $T = 2$).



Observem que quando a energia cinética $K(t)$ é máxima a energia potencial $U(t)$ é mínima e vice-versa.

Observem também que, por simetria (lembrem-se que $T = 2$),

$$\int_0^T K(t)dt + \int_0^T U(t)dt = TE$$

e

$$\int_0^T K(t)dt = \int_0^T U(t)dt \,.$$

Isto implica que

$$\int_0^T K(t)dt = \frac{TE}{2}$$

e

$$\int_0^T U(t)dt = \frac{TE}{2} \,.$$

O valor médio de uma função $f(t)$ num intervalo $0 \leq t \leq T$ é definido por

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \,.$$

Combinando esta definição com os resultados acima, temos que

$$\overline{K} = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 \tag{4}$$

e

$$\overline{U} = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 \; . \tag{5}$$

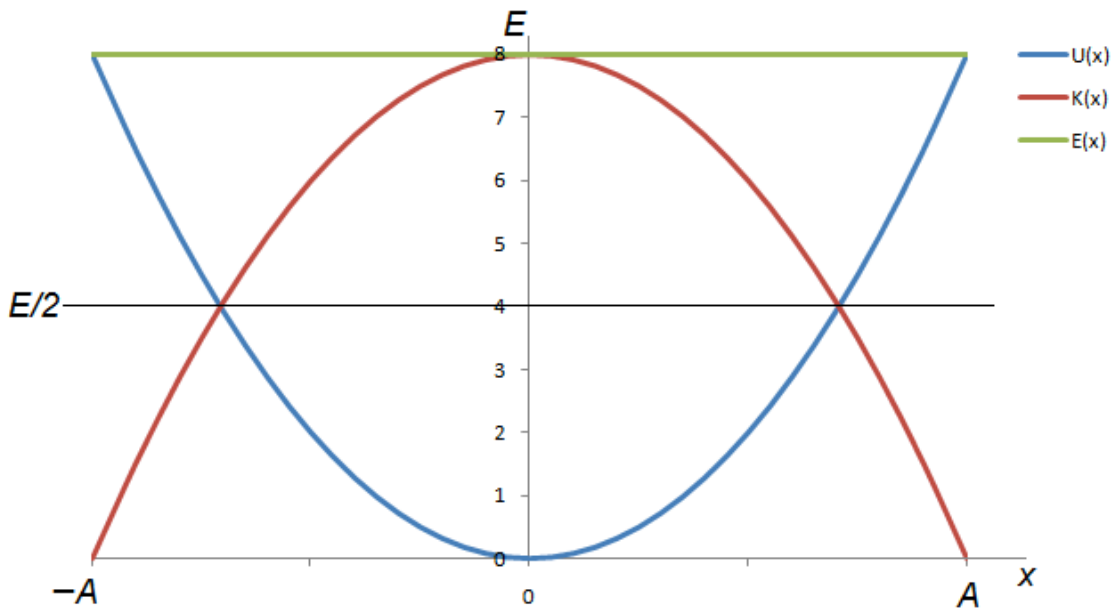
A energia cinética média por período é igual à energia potencial média por período e cada uma vale metade da energia total.

A equação (3) também nos permite escrever a energia cinética em termos da posição do corpo oscilante:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K = E - U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) \tag{6}$$

O gráfico abaixo ilustra as variações de K e de U com a posição do oscilador entre A e $-A$.



Exercício: interpretem o significado das curvas para $K(x)$, $U(x)$ e $E(x)$ no gráfico acima.

A equação (6) também permite obter uma expressão para a velocidade instantânea do oscilador. Como $K = (1/2)mv^2$, temos que:

$$v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}\ , \tag{7}$$

onde o sinal de mais ou de menos indica que o corpo está se deslocando, ou para a direita, ou para a esquerda.

Como exercício, estude os Exemplos 13.2, 13.3 e 13.4 do livro de Sears e Zemansky (vol. 2, pp. 41-48).