**Aula de exercícios - 01** **10/03/2020**

4302306 – Mecânica II – $1^o$ Semestre 2020 – IFUSP Noturno – Prof. Airton Deppman

---

**Exercício 1**

Considere uma partícula livre de massa $m$ no espaço 3D. Determine a Lagrangeana e as equações do movimento.

*Solução:*

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{1}$$

$$V = 0 \tag{2}$$

$$L = T - V = T \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = 0}, \boxed{m\ddot{y} = 0}, \boxed{m\ddot{z} = 0} \tag{4}$$

---

**Exercício 2**

Considere uma partícula de massa $m$ no espaço 3D sujeita a um potencial $V(\vec{r})$. Determine a Lagrangeana e as equações do movimento.

*Solução:*

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{5}$$

$$V = V(r) = V(x, y, z) \tag{6}$$

$$\therefore$$

$$L = T - V \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x, y, z) = F_x} \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{y} = -\frac{\partial}{\partial y}V(x, y, z) = F_y} \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{z} = -\frac{\partial}{\partial z}V(x, y, z) = F_z} \tag{10}$$

Note que, sendo $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$m\ddot{x} + m\ddot{y} + m\ddot{z} = F_x + F_y + F_z \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}} \tag{11}$$

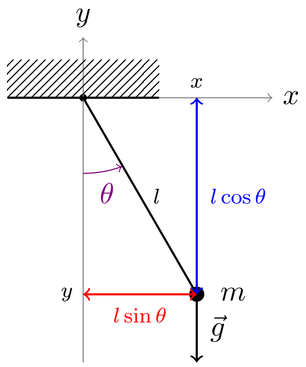
é equivalente à segunda Lei de Newton.

---

**Exercício 3**

*Pêndulo Simples* – determine a Lagrangeana e as equações de Lagrange de um sistema de massa $m$ sujeito à aceleração da gravidade $g$.

*Solução:*




$$x = l\sin\theta \implies \dot{x} = +l\cos\theta\dot{\theta} \tag{12}$$

$$y = -l\cos\theta \implies \dot{x} = l\sin\theta\dot{\theta} \tag{13}$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 \tag{14}$$

$$V = mgy = -mgl\cos\theta \tag{15}$$

$$\therefore$$

$$L = T - V \implies \boxed{L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta} \tag{16}$$

$$\theta : \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \implies \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta} \tag{17}$$

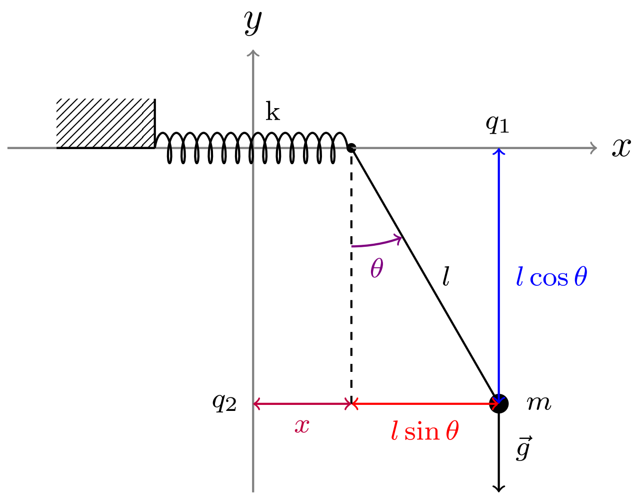
**Exercício 4**

*Pêndulo Simples acoplado a uma mola* – considere um sistema formado por um pêndulo simples de comprimento $l$ e massa $m$ que se encontra acoplado a uma mola horizontal de constante elástica $k$. Determine a Lagrangeana e as equações de Lagrange do sistema.

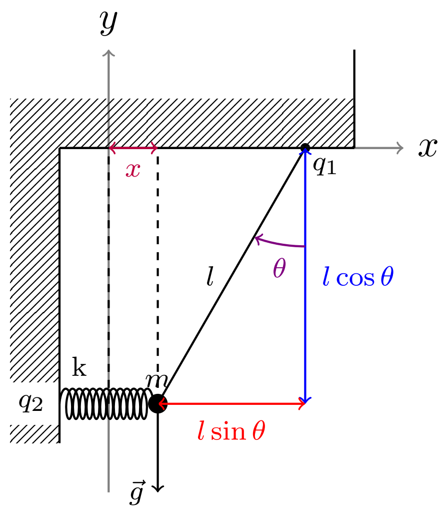
*Solução:*

Diagramas (I) e (II), onde $x$ é a amplitude de oscilação da mola, são equivalentes:

**(I):**




**(II):**




$$q_1 = x + l\sin\theta \implies \dot{q}_1 = \dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta} \tag{18}$$

$$q_2 = -l\cos\theta \implies \dot{q}_2 = l\sin\theta\dot{\theta} \tag{19}$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}_1{}^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_2{}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) \tag{20}$$

$$V = \frac{kx^2}{2} - mgl\cos\theta \tag{21}$$

$$\therefore L = T - V \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) - \frac{kx^2}{2} + mgl\cos\theta}$$

$$\mathbf{x}: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta})\right) = m\ddot{x} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ddot{\theta} \tag{22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m\ddot{x} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ddot{\theta} + kx = 0 \tag{24}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = l(\sin\theta\dot{\theta}^2 - cos\theta\ddot{\theta})} \tag{25}$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml\cos\theta\dot{x} + ml^2\dot{\theta}\right) = ml(-\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + \cos\theta\ddot{x}) + ml^2\ddot{\theta} \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} - mgl\sin\theta \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + ml\cos\theta\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad ml\cos\theta\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta} \tag{28}$$

Note que, no caso em que não há acoplamento com mola ($x = 0$, $\dot{x} = 0$ e $\ddot{x} = 0$):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta} \tag{29}$$

que é a solução do pêndulo simples (exercício anterior).

---