Capítulo 1

Princípio de D'Alembert e Equações de Lagrange

1.1 Princípio de D'Alembert

As Equações de Lagrange formam uma nova expressão das Três Leis de Newton escritas em termos de grandezas integradas, como energia cinética e energia potencial. As vantagens práticas desse formalismo se devem, de um lado, por partir de grandezas integrais e, de outro lado, por permitir a eliminação de variáveis espúrias que surgem a partir de vínculos que podem ser ipostos ao sistema.

Para se poder eliminar essas variáveis devemos abndonar o formalismo vetorial e tratar cada uma das coordenadas restantes como uma variável independente. Veremos que, apesar disso, o novo formalismo ainda traz vntagens em muitos casos. Há também vantagens do ponto de vista conceitual, que são expressadas através do Princípio de Hamilton, e que permitem olhar os princípios da mecânica de um ponto de vista totalmente novo. Devido à importância desse princípio ele será estudado em um capítulo específico. Aqui introduziremos as Equalçoes de Lagrange pelo método de D'Alembert, que parte das Três Leis de Newton.

O Princípio de D'Alembert representa uma forma de encarar problemas dinâmicos, em que a força resultante não é nula, como um problema de equilíbrio de forças. Para isso, interpreta a derivada temporal do momento linear como uma espécie de força, que somada à força resultante sobre o sistema resulta numa nova resultante nula.

A grande novidade com relação a esse princípio é o de separar forças de vínculos de forças externas, o que pode reduzir o número de variáveis do sistema, já que novas coordenadas, chamadas coordenadas generalizadas, permitem eliminar aquelas limitadas pelos vículos. Assim o npmero de coordenadas passa a ser igual ao número de graus de liberdade, tornando o problema mais tratável. A transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas leva à Equação de Lagrange, esta sim de grande aplicação na prática para resolver problemas mais complexos.

O vetor posição do corpo i é dado por $\mathbf{r}_i = \{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, e a 2ª lei de

Newton leva à equação

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

onde $\mathbf{F_i}$ é a resultante das forças que agem sobre o corpo i e $\mathbf{p}_i$ o seu momento linear.

Da equação acima segue que para qualquer deslocamento $\delta\mathbf{r}_i$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i\right).\delta\mathbf{r}_i = 0\,. \tag{1.1}$$

A equação acima mostra que, se $\dot{\mathbf{p}}_i$ for considerado uma força, qualquer problema dinâmico, isto é, em que haja aceleração do sistema, pode ser interpretado como um problema de estática, ou seja, de equilíbrio de forças. Este resultado é conhecido como Princípio de D'Alembert.

A seguir vamos usar o princípio discutido acima para obter as Equações de Lagrange, que representam um formalismo consideravelmente diferente das Três Leis de Newton para resolver problemas que usualmente encontramos na Física, em especial na Mecânica, porém retratam exatamente os mesmos princípios estabelecidos por Isaac Newton. Em muitos casos o formalismo de Lagrange apresenta vantagens práticas, e em grande medida isso decorre do fato de que coordenadas espúrias, que são aquelas que podem ser eliminadas quando se consideram os vínculos do sistema, podem ser eliminadas do problema desde o início, facilitando a solução dos problemas. Essas coordenadas desaparecem por causa de vínculos que restringem o movimento do sistema físico estudado. Exemplos de sistemas com vínculos são, uma conta que se move presa a um fio, que pode ter qualquer formato, como circular, espiral, etc., ou um bloco que se move sobre uma superfície rígida.

Chamamos de holonômicos os vínculos que podem ser descritos por meio equações na forma $f_i(x_j) = 0$, sendo x_j as coordenadas da posição do corpo i. Os vículos não-holonômicos são todos aqueles cuja restrição de movimento não pode ser escrito nesta forma. No que se segue nos restringimos aos vínculos holonômicos.

Dados os vínculos que agem sobre as M partículas, o número de graus de liberdade pode ser reduzido de $3D$ para um número N, onde D é a dimensão do espaço onde os corpos se movem (normalmente $D = 3$). Podemos então introduzir N coordenadas, chamadas coordenadas generalizadas, que correspondem aos graus de liberdade das M partículas.

1.2 Equações de Lagrange

As Equações de Lagrange podem ser obtidas apartir do Princípio de D'Alembert ao se mudar o sistema de coordenadas eliminando aquelas supérfluas. Assim, um sistema com M partículas pode ser descrito por N coordenadas independentes, obtidas após a eliminação das coordenadas espúrias usando as equações de vínculos holonômicos.

As equações de movimento das M partículas pode então ser escritas em função das N coordenadas generalizadas, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2..., q_N, t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M(q_1, q_2..., q_N, t) \end{cases}$$

e daqui segue que

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\,.$$

Assim, a variação $\delta\dot{\mathbf{r}}_i$ devido à variação das coordenadas generalizadas, após um intervalo de tempo δt, é dada por

$$\delta\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \ \delta\dot{q}_j\,, \tag{1.2}$$

onde $\delta\dot{q}_j = \dot{q}_j\delta t$.

Por outro lado, como $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$, temos

$$\delta\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\ \ \delta\dot{q}_j\,, \tag{1.3}$$

e comparando as duas equações para $\delta\dot{\mathbf{r}}_i$ obtemos que

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}\,. \tag{1.4}$$

O primeiro termo da equação (1.1), que representa o Princípio de D' Alembert, também pode ser reescrito em função das coordenadas generalizadas como

$$\sum_i \mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\,. \tag{1.5}$$

Definindo as *componentes das forças generalizadas*

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\,, \tag{1.6}$$

segue que

$$\sum_i \mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i = \sum_j Q_j\delta q_j\,. \tag{1.7}$$

Assim, o trabalho realizado pelas forças $\mathbf{F}_i$ pode ser calculado através das forças generalizadas. Se $\mathbf{F_i}$ são forças conservativas, então existe uma energia potencial V tal que

$$\mathbf{F}_i = -\nabla V\,, \tag{1.8}$$

e daqui se pode concluir que

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}\,, \tag{1.9}$$

onde V é a energia potencial do sistema.

Para obtermos as Equações de Lagrange, vamos escrever a equação 1.1, que representa o Princípio de D'alembert, em termos das coordenadas generalizadas, q_j. Para tratarmos do segundo termo da equação (1.1), note que

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i.\delta\mathbf{r}_i = m\ddot{\mathbf{r}}_i\delta\mathbf{r}_i\,,$$

e que

$$\ddot{\mathbf{r}}_i\delta\mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_i\delta\mathbf{r}_i) - \dot{\mathbf{r}}_i.\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_i \tag{1.10}$$

No primeiro termo da equação acima temos

$$\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ \delta q_j = \sum_j \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \ \delta q_j,$$

onde foi usada a equação (1.4). Portanto podemos escrever

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}_i \ \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}) \ \delta q_j \ .} \tag{1.11}$$

No segundo termo da equação 1.10 temos

$$\dot{\mathbf{r}}_i \ \frac{d}{dt} \ \delta \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \ \delta \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \mathbf{r}_i \ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \ \delta q_j,$$

e então

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}_i \ \frac{d}{dt} \ \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) \ \delta q_j \ .} \tag{1.12}$$

Assim, o segundo termo da equação (1.1) fica

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}_i \ \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) \right] \ \delta q_j} \tag{1.13}$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (1.1) também pode ser reescrito como

$$F_i.\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \ F_i. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ \delta q_j = \sum_j \ Q_i \ \delta q_j,$$

onde $Q_j = F_i . \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ é chamada força generalizada. Agora a equação (1.1) fica

$$\sum_i \ \sum_j \left[\frac{d}{dt} \ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) - Q_j \right] \ \delta q_j = 0, \tag{1.14}$$

sendo as somatórias em i e j independentes e portanto podemos trocar a ordem da soma.

Note que $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}$ e

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t}$$

portanto

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} + 2 \sum_j \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} \right)$$

Com isso temos

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} \right) + \sum_j \left[\sum_i m_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j + \sum_{j,k} \left[\sum_i \frac{m_i}{2} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Se a transformação entre os sistemas de coordenadas $\dot{\boldsymbol{r}}_i \longrightarrow q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ for independente do tempo, $\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial t} = 0$ portanto

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \,. \tag{1.15}$$

onde

$$m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_k}$$

e

$$\sum_i Q_j \; \delta q_j = \sum_i F_i \; \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \; \delta q_j = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \; \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \; \delta q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \; \delta q_j,$$

e a somatória em i na equação (1.14) pode ser eliminada em

$$\boxed{\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - U) \right] \; \delta q_j = 0} \tag{1.16}$$

Se nos restringirmos a potenciais $U = U(q_1, q_2, ..., q_n)$, isto é, potenciais que não dependem da velocidade, podemos definir a função lagrangeana $L = T - U$ e escrever

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \tag{1.17}$$

já que os δq_j são arbitrários e a igualdade (1.16) deve ser sempre válida, quaisquer que sejam os δq_j.

A equação (1.17) é chamada equação de Lagrange, e é equivalente às Leis de Newton,como demonstramos aqui. Dessas equações resultam as equações de movimento, como veremos a seguir.

1.3 Exercícios

1. *Pêndulo Símples:* Determine a Lagrangeana e a Equação de Lagrange para um sistema unidimensional de massa m sujeito a um potencial $V = -kx^2/2$.

2. *Pêndulo Simples acoplado a uma mola:* Considere um sistema formado por um pêndulo de comprimeto l e massa m que se encontra acoplado a uma mola horizontal de constante elástica k. Determine a Lagrangeana e a equação de Lagrange do sistema.

3. Considere uma partícula de massa m que se move sem vínculos no espaço numa região onde sua energia potencial é dada por $V(\mathbf{r})$.

   (a) Escreva a Lagrangeana do sistema.

   (b) Mostre que as esquações de Lagrange são idênticas às equações obtidas através da aplicação das Leis de Newton.

4. Dois corpos de pesos P_1 e P_2 estão conectados por um fio inextensível de massa desprezível e comprimento L. Os pesos são colocados sobre uma superfície cilíndrica lisa de raio R, cujo eixo está na horizontal. Encontre a posição de equilíbrio usando o Princípio de D'Alembert.

5. Dois corpos de massas m_1 e m_2 ligados por um fio inextensível de massa desprezível são colocados sobre uma cunha que tem uma superfície horizontal apoioda sobre a mesa e uma surfície inclinada de um ângulo θ com a horizontal, de modo que o corpo de massa m_1 pende preso ao fio vertical, que após passar por uma roldana no ponto mais alto da cunha, se fixa ao corpo de mass m_2 que se encontra apoiado sobre a superfície inclinada da cunha. Encontre a posição de equilíbrio usando o Princípio de D'Alembert.**R:**$sen\theta = m_2/m_1$

6. Dois corpos de massas m_1 e m_2 ligados por um fio inextensível de massa desprezível são colocados sobre uma cunha que tem uma superfície horizontal apoioda sobre a mesa e uma surfície inclinada de um ângulo φ com a horizontal.

   a) Determine a aceleração do sistema em função de φ, m_1 e m_2.
   b) Determine a condição de equilíbrio.
   c) O que acontece se $sen\varphi < m_2/m_1$?

7. Usando as Eqs. de Lagrange, obtenha a segunda Lei de Newton em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.**R:**$md^2q_i/dt^2 = F_i$**,** $F_r = m\ddot{r} -, r\dot{\theta}$ **e** $rF_\theta = d/dt(mr^2\dot{\theta}$

8. Um corpo de massa m desliza sem atrito sobre uma cunha de ângulo θ em relação à horizontal. A cunha de massa M se encontra sobre uma superfície horizontal sem atrito. Determine a Lagrangeana do sistema e as eqs. de movimento.

9. Uma partícula se move num plano sob a ação de um campo de força dado por
$$\mathbf{F} = -kr\,cos\theta\,\mathbf{r}\,, \tag{1.18}$$
   onde k é uma constante e $\mathbf{r}$ é o versor radial.

   a) O momento angular é conservado? Justifique.
   b) Obtenha a equação de movimento da órbita da partícula. **R:** $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -krcos\theta$

10. Uma barra de comprimento r tem sua extremidade ligada a uma haste vertical de modo que se move livremente na vertical com movimento dado pela função $z = asen(\omega t)$. Na extremidade superior está preso um corpo de massa m. O ângulo que a barra faz com a vertical pode variar livremente. Determine a Langrangeana do sistema e as equações de movimento. **R:** $r\ddot{\theta} = (g - a\omega^2 sen(\omega t))sen\theta$

11. Uma barra inclinada de um ângulo θ em relação à vertical gira em torno do eixo vertical com frequência angular ω. Na barra inclinada está uma conta que pode deslizar sem atrito. Determine a Lagrangeana do sistema e

a equação do movimento. Obtenha a solução geral e discuta o movimento. Se a velocidade inicial da conta é v_o e sua posiç ao inicial é r_o, determine a função do movimento da conta. **R:** $\ddot{r} = r\omega^2 sen^2\theta - gcos\theta$

12. Uma escada encontra-se apoiada sobre uma parede vertical de modo a formar um ângulo θ com o piso horizontal. Despreze o atrito entre as superfícies e a escada. Sendo l o comprimento da escada, determine a Lagrangeana e a equação de movimento. **R:** $(ml^2 + 4I)\ddot{\theta} = 2mglcos\theta$

13. Uma partícula de massa m tem seu movimento restrito à superfície interior de um cone liso cujo semi-ângulo com a vertical é α, e sujeito à força peso (Fig. 2.2). Determine o conjunto de variáveis generalizadas e ache as equações de movimento.

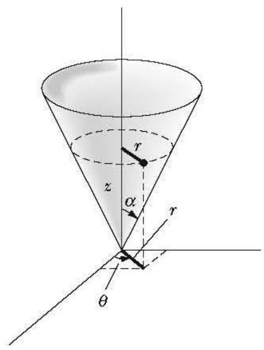

Figura 1.1: Partícula que se move sobre a superfície interna e lisa de um cone.

14. Considere a Máquina de Atwood mostrada na figura 1.2, com duas massas iguais, m. O plano é liso e se encontra inclinado de um ângulo de 30 graus. Usando as equações de Lagrange, determine as acelerações das massas.

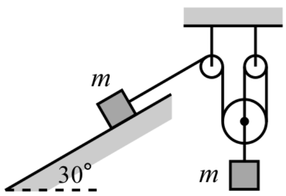

Figura 1.2: Máquina de Atwood sobre um plano.

15. O ponto de apoio de um pêndulo simples de comprimento b se move sobre um aro de raio a, girando com velocidade angular constante, ω (Fig. 1.3). Obtenha as equações de em termos de coordenadas cartesianas, da velocidade e da aceleração da massa m. Obtenha também a aceleração angular para o ângulo θ.

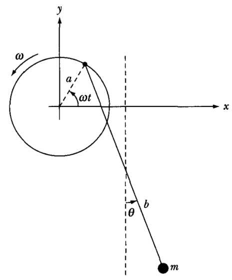

Figura 1.3: Pedulo num anel girante.

16. Um bloco de massa m é mantido em repouso sobre uma cunha lisa de massa M, que tem um ângulo de inclinação θ (veja Fig. 1.4). A cunha pode se mover também sem atrito sobre o plano horizontal. Ache as equações de movimento quando o bloco é liberado. Qual a aceleração da cunha?

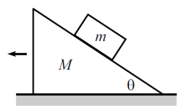

Figura 1.4: Moving plane.

Capítulo 2

Princípio de Mínima Ação de Hamilton

Vimos no Capítulo anterior que as equações de Lagrange representam um grande avanço formal na aplicação das Leis de Newton para resolver problemas de sistemas mecânicos que apresentam vínculos. Do ponto de vista conceitual, no entando, os avanços não são tão grandes, já que essas equações foram obtidas através de uma transformação de variáveis, com redução do número de coordenadas para se adequar ao número de graus de liberdade do sistema, porém partiram do Princípio de D'Alembert, que por sua vez segue diretamente das Leis de Newton.

Veremos neste capítulo que o mesmo resultado, isto é, as Equações de Lagrange, pode ser obtido a partir de um princípio completamente novo, e aparentemente sem vínculo com as Leis de Newton. Esse é o chamado Princípio de Mínima Ação de Hamilton, que afirma que um sistema físico evolui de modo a minimizar uma nova grandeza física, a Ação, entre os instantes inicial e final.

Para entendermos como isso funciona temos que, antes de mais nada, conhecer o método variacional, que nos ajuda a determinar curvas que minimizam uma dada grandeza. Um exemplo de aplicação desse método é a determinação da curva chamada braquistocrona, que determina a trajetória que um corpo deve descrever entre um ponto A e outro ponto B, este numa altura inferiro ao primeiro, de modo que, apenas sob a ação da força peso, o tempo que o corpo gasta para fazer o percurso é mínimo.

2.1 Método variacional

O método variacional é uma técnica importante que permite encontrar uma função que minimiza uma grandeza integral. Tem aplicações em vários campos do conhecimento, principalmente na geometria não Euclideana, em Teoria da Relatividade Geral, e na Mecânica está relacionada a uma nova interpretação das Equações de Lagrange. Aqui chegaremos ao Princípio de Hamilton, que representa um salto conceitual importante com relação às Leis de Newton, ao contrário da formulação das Equaões de Lagrange via Princípio de D'Alembert, que vimos no capítulo anterior, e que decorre diiretamente daquelas leis. O

Princípio de Hamilton leva à mesma Mecânica que se obtém pelas Leis de Newton, porém partindo de um conceito totalmente novo.

Considere a função $f(y,x)$, e a integral de linha ao longo de um caminho C,

$$I = \int_C f(y,x)ds$$

onde ds é um deslocamento infinitesimal ao longo do caminho C . Para diferentes caminhos o resultado da integral pode ser diferente . O método variacional permite obter o caminho para o qual esse resultado é um extremo , isto é , dados os pontos inicial (x_o, y_o) e final (x_f, y_f) , obtemos o caminho para o quel I é mínimo ou é maximo . Para isso , vamos supor que o caminho possa ser parametrizado na forma $y = y(x)$, e vamos estudar como é a variação de integral, δI , quando variamos a forma de $y(x)$. Vamos indicar por δy a variaçãodessa fução , mas é importante esclarecer que essa não é a variação infinitesimal de uma variável , como dx , mas corresponde a uma alteração da forma da função. Isto é , se inicialmente temos $y(x) = \eta(x)$, sendo η uma função definida no mesmo dominio temos y, e sendo $\xi(x)$ outra função no mesmo dominio de y, temos

$$\delta y(x) = \eta(x) + \epsilon\xi(x),$$

onde ϵ é uma constante real suficientemente pequena.

Quando mudamos a forma da função $y(x)$, mudamos tambén a sua derivada $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$, de forma, de modo que agora a função f depende tambén de y', ou seja, $f = f(y, y', x)$.Então a integral de caminho fica

$$I = \int_{x_o}^{x_f} f(y, y', x)dx \tag{2.1}$$

onde a integração agora é apenas em dx já que o caminho está parametrizado na função $y = y(x)$. Uma variação δy produz uma variação δf dada por

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \tag{2.2}$$

definida em cada valor da variável x. Aqui

$$\delta y' = \eta'(x) + \epsilon\xi'(x) = \frac{d}{dx}(\delta y).$$

Quando f varia de δf, obtemos uma variação na integral I que é dada por

$$\delta I = \int_{x_o}^{x_f} \delta f(x)dx = \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right] dx \tag{2.3}$$

O segundo termo dessa integral pode integra por partes, como

$$\int_{x_o}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \int_{x_o}^{x_f} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx - \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right] dx\,.$$

A primeira integral do lado direito da equação acima é nula, pois

$$\int_{x_o}^{x_f} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}(x)\right]_{x_o}^{x_f} = 0\,,$$

já que $\delta y(x_o) = \delta y(x_f) = 0$ por definição. Portanto obtemos

$$\int_{x_o}^{x_f} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = - \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx \, . \tag{2.4}$$

e substituíndo 4 em 3 chegamos em

$$\delta I = \int_{x_o}^{x_f} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \, . \tag{2.5}$$

A equação 5 nos dá a variação da integral de linha, I, quando variamos o caminho C ao longo do qual a integração é feita. Essa variação do caminho é representada pela variação $\delta y(x)$. Quando o caminho representa um extremo da integral (máximo, mínimo ou inflexão), devemos ter $\delta I = 0$, qualquer que seja a variação $\delta y(x)$ suficientemente pequena. Como δy é arbitrário, teremos $\delta I = 0$ somente se

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \, . \tag{2.6}$$

Esta equação diferencial relaciona f, que é uma função conhecida, com $y(x)$, que é a função a ser determinada, permitindo obter o caminho associado ao extremo da integral I.

2.2 Princípio de mínima ação de Hamilton

Considere agora a mudança de variáveis $x \to t$ e $y \to q$, e com isso teremos também $y' \to \dot{q}$. Também chaemos f de L. Então segue que a equação da trajetória que minimiza a funçaõ S é

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \, . \tag{2.7}$$

que é exatamente a Equação de Lagrange obtida no capítulo anterior através do Princípio de D'Alembert.

Daqui podemos concluir que a Equação de Lagrange pode ser obtida pelo método variacional, e portanto o sistema físico cuja dinâmica é descrita por essa equação evolui no tempo segundo uma trajetória que minimiza a grandeza

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \, . \tag{2.8}$$

Esse resultado foi obtido primeiramente por Hamilton, por isso é conhecido como Princípio de Hamilton. A grandeza S aqui introduzida é chamada ação, e desempenha um papel fundamental na Mecânica Clássica bem como na Mecânica Quântica. Observe que a constante de Planck, h, tem a mesma unidade da ação. Este resultado também é conhecido como Princípio de Mínima Ação.

Note que este resultado não modifica as Equações de Lagrange, antes, mostram que elas podem ser obtidas através de um processo completamente diferente. Enquanto no capítulo 2 obtivemos essa equações a partir do Princípio de D'Alembert, que segue diretamente das Leis de Newton, aqui o mesmo resultado é obtido a partir do princípio de minimização da ação. Conceitualmente este é um grande salto em relação à Mecânica Newtoniana.

2.3 Exemplo - Brachistocrona

Considere um corpo de massa m sujeito a um campo gravitacional uniforme. Ele pode partir em repouso de um ponto inicial A e chegar a um ponto B localizado a uma altura menor ou igual ao ponto A. Considere que ele possa ser vinculado a uma trajetória específica no plano (x, y) com extremos fixados nos pontos A e B. Qual a forma dessa trajetória para minimizar o tempo gasto para o corpo ir de A até B? A figura 2.1 mostra esquematicamente o problema e a solução. Neste caso, podemos, sem perda de generalidade, escolher o ponto A como sendo a origem.

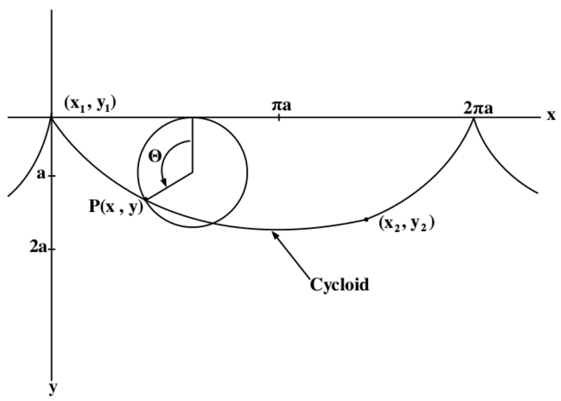

Figura 2.1: O problema da braquistocrona. A solução indica que a ciclóide é a curva em que o corpo percorre o caminho no menor tempo.

Para determinar a curva que minimiza o tempo de percurso, usaremos o método variacional demonstrado acima. Para isso, vamos obter a equação do tempo gasto no percurso entre dois pontos ao longo de uma curva genérica dada pela função $x(y)$, já que o movimento se dá num plano vertical. O eixo vertical, y, é orientado para baixo, e o horizontal, x, para a direita. Se no ponto A (escolhido como origem aqui) o corpo se encontra em repouso, sua velocidade será dada por

$$mgy = (1/2)mv^2 \,, \tag{2.9}$$

portanto

$$v = \sqrt{2gy}\,. \tag{2.10}$$

Um delocamento ds ao longo da curva é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{2.11}$$

sendo dx e dy as projeções do deslocamento $\boldsymbol{ds}$ sobre os eixos x e y. Observe que esta expressão é válida para qualquer que seja o caminho ao longo do qual o corpo se desloca. Daqui segue que

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{x'^2 + 1}\,, \tag{2.12}$$

onde $x' = dx/dy$. Como

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{dy}\,, \tag{2.13}$$

e como $ds/dt = v$, segue que

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v}\sqrt{x'^2 + 1}\,, \tag{2.14}$$

e usando a expressão para a velocidade em função de y, segue

$$dt = \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2gy}}\,. \tag{2.15}$$

Definindo o momento em que o corpo é liberado na origem como $t_o = 0$, temos

$$t = \int \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2gy}} dy\,. \tag{2.16}$$

Para determinar a equação $x(y)$ que minimiza o tempo t dispendido para percorrer o percurso, usamos a Equação de Euler-Lagrange derivada na seção anterior. Para isso, identificamos a função

$$f(x, x', y) = \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2gy}} \tag{2.17}$$

com y sendo a variável independente e $x = x(y)$. Portanto devemos estar atentos à troca $x \leftrightarrow y$ ao usar a equação, que fica

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,. \tag{2.18}$$

Como a função f não depende de x explicitamente, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,. \tag{2.19}$$

A derivada parcial de f em relação a x' leva ao resultado

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{2gy(x'^2 + 1}}\,, \tag{2.20}$$

e portanto a Equação de Euler-Lagrange para este problema fica

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x'}{\sqrt{2gy(x'^2 + 1}}\right) = 0\,. \tag{2.21}$$

Como x e x' são consideradas variáveis independentes, a equação acima implica que

$$\frac{x'}{\sqrt{y(x'^2 + 1)}} = \sqrt{2g}C \tag{2.22}$$

onde $C =$e uma constante que vamos expressar em termos de uma outra constante tal que

$$\frac{1}{2a} = 2gC^{\prime 2}\,. \tag{2.23}$$

Com isso, elevando ao quadrado de ambos os lados da equação (2.22), segue que

$$\frac{x'^2}{y(x'^2+1} = \frac{1}{2a}\,. \tag{2.24}$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,. \tag{2.25}$$

Integrando os dois lados e usando $x_o = 0$, resulta

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy\,. \tag{2.26}$$

Para resolvermos essa integral, usamos a substituição $y = a(1 - cos\theta)$, que leva a $dy = asen\theta d\theta$, onde $theta$. Com isso temos

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1-cos\theta)}{a(1+cos\theta)}} asen\theta d\theta\,. \tag{2.27}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador do termos dentro da raiz quadrada por $1 - cos\theta$ temos

$$x = a \int (1 - cos\theta) d\theta\,, \tag{2.28}$$

de onde resulta facilmente que

$$x = a(\theta - sen\theta)\,. \tag{2.29}$$

Assim, juntamente com a equação para y, temos a solução

$$\begin{cases} x = a(\theta - sen\theta) \\ y = a(1 - costheta)\,. \end{cases} \tag{2.30}$$

2.4 Método Variacional em problemas com Vínculos

Muitos problemas de extremização de alguma função integral aparecem associados a vínculos que restringem o número de graus de liberdade. Assim, a integral

$$I = \int_{x_o}^{x_f} f(y, y', x) dx \tag{2.31}$$

deve ser minimizada, mas simultaneamente, x e y devem satisfazer uma relação, ou vínculo, expresso na forma

$$g(x, y) = C\,, \tag{2.32}$$

onde C é uma constante. Essa relação mostra que as variáveis x e y não são independentes, e deslocamentos infinitesimais nessas variáveis são tais que

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0\,. \tag{2.33}$$

Observe que daqui segue também

$$dy = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} dy\,. \tag{2.34}$$

Como a diferencial de f é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{2.35}$$

podemos sempre escrever

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right] dy\,, \tag{2.36}$$

onde λ é uma constante conhecida como multiplicador de Lagrange. A vantagem de incluir a função g dessa forma é que agora podemos considerar x e y como variáveis independentes.

Se f é a solução estacionária, isto é, é um extremo, então

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right] dy = 0\,, \tag{2.37}$$

e, considerando que x e y são independentes, resulta que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0\,, \end{cases} \tag{2.38}$$

e portanto λ pode ser determinada através da equação

$$\lambda = -\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial y}\,. \tag{2.39}$$

É interessante notar que das equações (2.34) e (2.35) temos que na trajetória estacionária

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx = 0\,. \tag{2.40}$$

Com isso, vemos que o método variacional pode ser aplicado para a expressão para df com a dependência em g e em λ. Usando o mesmo procedimento que aplicamos para o caso da extremização sem vínculo, obtemos

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] + \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right)\right] = 0\,. \tag{2.41}$$

2.5 Exercícios

1. Assuma que o custo de um avião voando a uma altura z é $e^{-\kappa z}$ por unidade de distância percorrida, onde κ é uma constante positiva. Considere que um avião se desloca no plano (x, z) de um ponto $(-a, 0)$ para o ponto $(a\,0)$, onde $z = 0$ corresponde ao nível do solo, com o eixo z direcionado para cima. Determine a curva que minimiza o custo da viagem.

2. **Catenária:** Uma corrente de massa M e comprimnto L é suspensa por suas extremidades em pontos fixos nas posições $A = (0, a)$ e $B = (x_b, y_b)$, estando de resto sujeita apenas à força peso. Determine a forma que a corrente assume no seu estado de repouso.

3. Uma partícula de massa m se move sobre a superfície interna de um cone liso com semi-ângulo α (Fig. 2.2), sujeito apenas à força peso. Determine as coordenadas generalizadas. Use o Princípio de Hamilton para encontrar as equações de movimento.

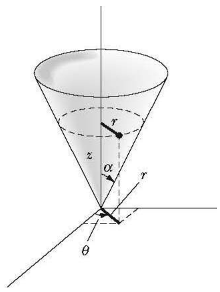

Figura 2.2: A particle moving on the inside surface of a smooth cone.

4. Uma conta desliza presa a um fio liso que tem a forma da parábola $z = c\,r^2$, onde c é uma constante. O fio gira em torno de seu eixo vertical com velocidade ω, e a conta gira em torno do mesmo eixo numa trajetória circular com raio R. Determine a constante c.

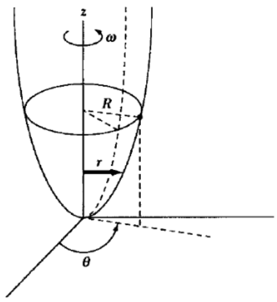

Figura 2.3: A bead slides along a smooth wire.

5. Considere a Máquina de Atwood dupla mostrada abaixo. Este sistema tem 2 graus de liberdade e vamos usar coordenadas generalizadas x_1 e x_2, como mostrado na figura. L_1, L_2, m_1, m_2, e m_3 são constantes que podem aparecer na sua solução. Assuma que as polias são ideais e que a aceleração da gravidade é g.

   a) Qual é a Lagrangeana desse sistema? Deixe sua resposta apenas em termos de m_1, m_2, m_3, x_1, x_2, L_1, L_2, g, $\dot{x}_1$, and $\dot{x}_2$.

b) Use o princípio de Hamilton para obter as equações diferenciais (acopladas) para $\ddot{x}_1$ e $\ddot{x}_2$.

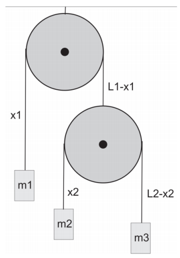

Figura 2.4: A bead slides along a smooth wire.

6. Uma função $f(y, y')$ é o extremo de uma quantidade $F = \int f(y, y')dx$, sendo que f depende apenas implicitamente (através de y e y') de x. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) . \tag{2.42}$$

7. (**Catenária**) Uma corrente de comprimento C e massa M está suspensa entre os pontos $(0, a)$ e (L, b). Ache a forma de equilíbrio.