

MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Seção 1.6: Amostragem e aliasing

Dependência do sinal em relação à taxa de amostragem

Figura 1.8: Exemplo simples de sinal 1D amostrado a 20Hz ($\Delta_t = 0.05$)

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

```
In [14]: t = np.linspace(0,1,21)
x = np.sin(44*m.pi*t)
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.axhline(y=0.0, color='gray', linestyle='--', ms=1)
plt.plot(t,x, "*")
plt.show()
```

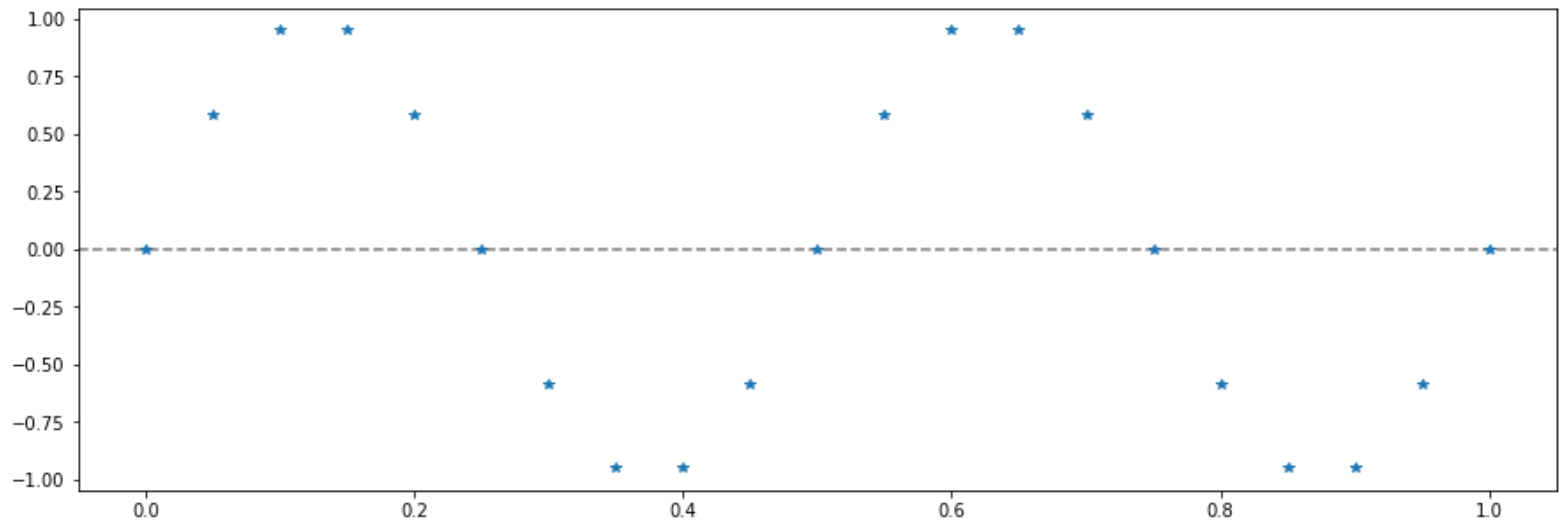
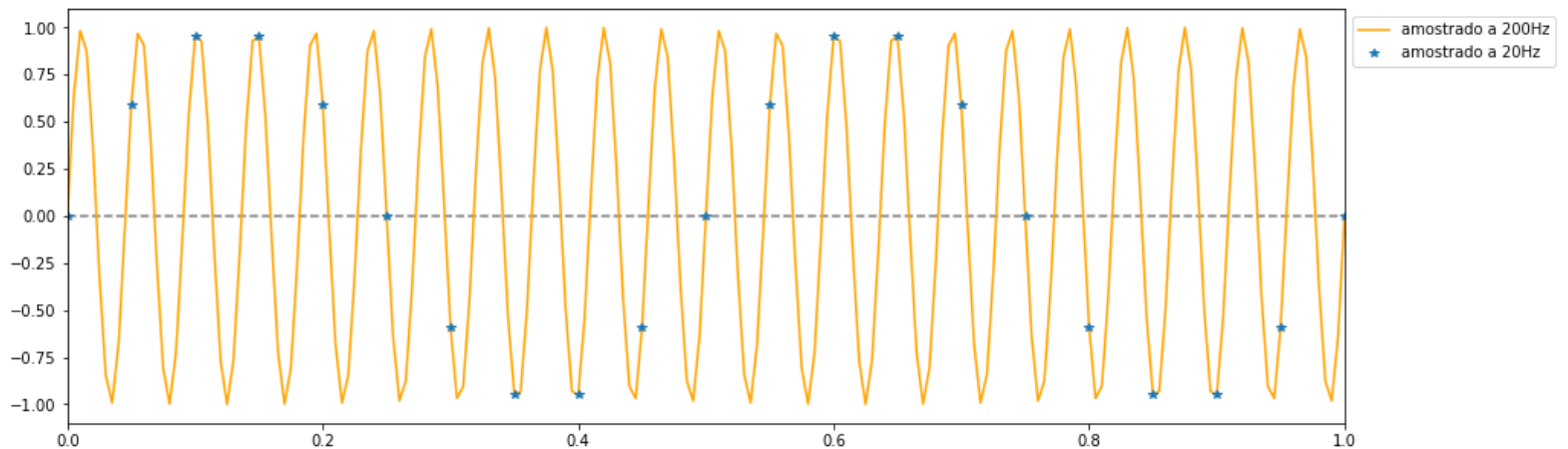


Figura 1.9: A mesma função anterior, amostrada a 200Hz ($\Delta_t = 0.005$)

```
In [15]: t = np.linspace(0,1,21)
x = np.sin(44*m.pi*t)
t2 = np.linspace(0,1,201)
x2 = np.sin(44*m.pi*t2)
plt.figure(figsize=(15,5))
plt.axhline(y=0.0, color='gray', linestyle='--', ms=1)
plt.plot(t2,x2, label='amostrado a 200Hz', color='orange')
plt.plot(t,x,"*", label='amostrado a 20Hz')
plt.xlim([0, 1])
plt.legend(loc='upper left', bbox_to_anchor=(1, 1))
plt.show()
```



Explicação: o fenômeno do rebatimento

O problema: existem infinitos valores de f e g tais que

$$\sin\left(2\pi f \frac{n}{R}\right) = \sin\left(2\pi g \frac{n}{R}\right), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para essa condição valer, basta que os argumentos das senoides acima correspondam sempre a ângulos equivalentes. Isso ocorre, por exemplo, quando

$$2\pi f \frac{n}{R} = 2\pi g \frac{n}{R} + k * 2\pi * n$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$ e para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. A condição acima equivale a

$$f - g = kR.$$

A mesma condição vale para que dois cossenos de frequências f e g produzam a mesma lista de amostras, e analogamente para duas exponenciais complexas de frequências f e g :

$$\begin{aligned}
 e^{i2\pi f \frac{n}{R}} &= e^{i2\pi g \frac{n}{R}}, \forall n \in \mathbb{Z} \\
 &\Downarrow \\
 e^{i2\pi(f-g) \frac{n}{R}} &= 1, \forall n \in \mathbb{Z} \\
 &\Downarrow \\
 \forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi(f-g) \frac{n}{R} &= k2\pi \\
 &\Downarrow \\
 \exists k \in \mathbb{Z} : f - g &= kR
 \end{aligned}$$

Assim, ao utilizarmos uma taxa de amostragem R , todas as senoides e/ou exponenciais com frequências

$$g = \dots, f - 3R, f - 2R, f - R, f, f + R, f + 2R, f + 3R \dots$$

gerarão a mesma lista de amostras que aquela com frequência f .

Aliasing traz duas implicações importantes:

implicação física/perceptual: ao se amostrar um sinal analógico com taxa de amostragem R , perde-se a capacidade de discernir frequências separadas por múltiplos de R , e em particular os valores que não estão na faixa $-\frac{R}{2} < f \leq \frac{R}{2}$ serão representados incorretamente (rebatidos), correspondendo a alguma outra frequência (aparente) que pertence à faixa

- *representável.*

implicação matemática: para se analisar um sinal a R Hz, basta considerar frequências na faixa

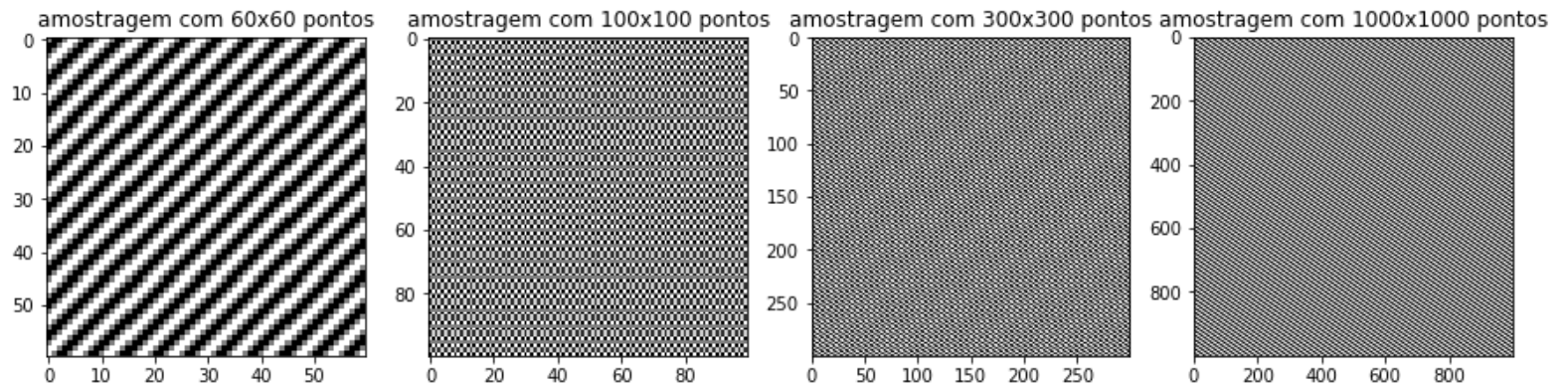
- $-\frac{R}{2} < f \leq \frac{R}{2}$.

Essas implicações ilustram a condição de Shannon-Nyquist, que afirma que para representar corretamente componentes senoidais de até F Hz é necessário utilizar uma taxa de amostragem $R \geq 2F$ Hz, e também explicam a necessidade de utilização de filtros passa-baixas na conversão analógico-digital.

Figura 1.10: Exemplo de aliasing espacial. A mesma função
$$f(x, y) = 256 \sin(2\pi(50x + 70y))$$

é amostrada em grids de 60x60, 100x100, 300x300 e 1000x1000

```
In [16]: N=[60, 100, 300, 1000]
g, ax = plt.subplots(1,4,figsize=(15,4))
for j in range(4):
    R = N[j]; x = np.arange(0,1,1/R); y = np.arange(1,0,-1/R)
    x, y = np.meshgrid(x,y)
    f = m.e ** (2 * m.pi * 1j * 70 * y) * m.e ** (2 * m.pi * 1j * 50 * x)
    ax[j].imshow(0.5*(f.imag)+1)
    ax[j].set_title("amostragem com {0}x{1} pontos".format(N[j],N[j]))
plt.show()
```



Alternativa: mostra a variação do tamanho do grid de 10 em 10

In [20]: `HTML(imf.to_jshtml())`

Out[20]:

