Física Matemática II Aulas 02-07 Modelagem Matemática

Alexandre Souto Martinez[1]
[1] *FM/DF/FFCLRP/USP*

(Dated: 16 de março de 2020)

CONTENTS

> *This concept is essentially based on the philosophical and psychological assumption that nature works with simplicity and efficiency.*
>
> ⋮
>
> Experience has lead us to the conclusion that: *all the interesting equations are either trivial, or impossibly difficult to solve analytically.*
> N. Vandewalle and M. Ausloos, in "Evolution Motivated Computer Models"

A seguir ilustra-se a idéia de modelagem matemática usando modelos contínuos e discretos. A complexidade dos modelos aumentam gradativamente, permitindo assim descrever situações cada vez mais complicadas. Primeiramente, consideram-se os modelos contínuos, que em alguns casos permitem obter soluções analíticas. Em seguida, discretiza-se alguns desses modelos contínuos, obtendo-se os modelos discretos.

I. MODELOS CONTÍNUOS

Para descrever a relação entre uma função de crescimento $f(t)$, que representa um modelo e uma variável temporal t, aumenta-se gradativamente a complexidade dos modelos apresentados aumentando o número de parâmetros.

A. Modelo Constante

A função mais simples que existe é o *modelo constante*:

$$f(t) = f_0 \ ,$$

em que f_0 é uma constante, que tem a unidade (dimensão) de f. Neste modelo, pode-se eliminar a dependência de f_0 fazendo $y(t) = f(t) - f_0 = 0$. Assim, com esta transformação (translação de $f(t)$ de f_0), todos os modelos constantes colapsam em $y(t) = 0$, uma reta passando sobre a abcissa do sistema de coordenadas. Em todo o domínio $-\infty < t < \infty$, a função não varia, pois:

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \ .$$

B. Modelo Linear

No *modelo linear*, a derivada da função não depende do valor da função.

1. Coeficiente Constante

A variação mais simples do modelo linear é expressa por:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \ ,$$

em que r_0 é uma constante que tem a unidade de f sobre unidade de t. Podemos entender r_0 como sendo a quantia que se ganha ($r_0 > 0$), ou se perde ($r_0 < 0$), por unidade de t. Observe que para $r_0 = 0$, reobtemos o modelo constante $df(t)/dt = 0$, no qual não se ganha, nem se perde e $f(t)$ fica constante: $f(t) = f_0$. A solução do modelo linear $df(t)/dt = r_0$ é a equação linear:

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) ,$$

com *condição inicial* $f_0 = f(t_0)$. Aqui assumimos que $f(t) = 0$ para $t < t_0$.

Vamos chamar a variável t de *variável independente*, pois podemos variá-la livremente dentro de seu domínio de definição. A variável f, chamamos de *variável dependente*, pois seu valor depende de t considerado [$f(t)$]. A grandeza r_0 é chamada de *parâmetro*, pois não varia com t e f_0 é chamada de condição inicial.

A equação $df(t)/dt = r_0$, com t aumentando a partir de t_0, para: (i) $r_0 < 0$, diminui (linearmente); (ii) $r_0 = 0$, permanece constante e (iii) $r_0 > 0$, aumenta (linearmente).

Dados f_0 e r_0 pode-se fazer um gráfico linear para representar a $f(t) = f_0 + r_0(t - t_0)$. O valor de $f_0 - r_0 t_0$ é aquele em que a reta corta o eixo da variável dependente (ordenada) e $r_0 = \tan\theta$ é o coeficiente angular, ou seja, a tangente do ângulo entre a reta e o eixo da variável independente (abscissa). No entanto, é interessante graficar $f(t) = f_0 + r_0(t - t_0)$, independentemente da condição inicial f_0 e do parâmetro r_0 para ter o *colapso dos dados*. Redefinindo as variáveis: $y = f(t) - f_0$ e $x = r_0(t - t_0)$, tem-se que a variável independente agora é x, que é uma grandeza adimensional e a variável dependente é $y(x)$, que se tornou independente da condição inicial, mas ainda tem a dimensão de f. Neste caso, o colapso de dados se dá na *reta padrão*: $y(x) = x$, que tem inclinação unitária e passa pela origem do sistema de coordenadas.

2. Coeficiente Variável

O modelo linear pode também ser expresso por:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0(t) ,$$

em que $r_0(t)$ é uma função nula, para $t < t_0$ e arbitrária, para $t \geq t_0$. A solução desta equação é dada por:

$$f(t) = f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \; r_0(t') .$$

A inclusão do coeficiente variável não alterou a natureza linear do problema, pois chamando: $y = f(t) - f_0$ e $x = \int_{t_0}^{t} dt' \; r_0(t')$, obtemos a reta padrão $y = x$.

C. Modelo Exponencial

A situação fica mais interessante se a variação de f depender linearmente do próprio valor de f, o *modelo exponencial*. Por exemplo, isto acontece em aplicações financeiras, onde o quanto se ganha, ou se perde, depende do quanto se tem aplicado em determinado ativo em um dado instante. O modelo de crescimento populacional de Malthus é um outro exemplo de aplicação deste modelo (1).

1. Coeficiente Constante

Considere o *modelo exponencial*:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) ,$$

em que r_1 é uma constante, que tem o inverso de t como unidade. Em matemática financeira, r_1 é chamado de *rendimento por unidade de tempo* e em dinâmica de populações de *taxa de crescimento intrínseco*. Observe que para $r_1 = 0$, reobtemos o modelo constante $df(t)/dt = 0$. Para obter a solução de $df(t)/dt = r_1 f(t)$, vamos detalhar alguns passos que justificam as mudanças de variáveis que iremos fazer: $[df(t)/f(t)]/dt = d\ln f(t)/dt = r_1$, assim integrando esta equação e tomando $t = t_0$ para determinar a constante de integração, obtemos: $\ln f(t) - \ln f_0 = r_1(t - t_0)$. Na escala logarítmica, reobtem-se o modelo linear [compare esta equação com: $f(t) - f_0 = r_0(t - t_0)$]. É esta transformação matemática que justifica o uso da escala logarítmica em gráficos. Fazendo a seguinte redefinição de variáveis: $y = \ln f(t) - \ln f_0 = \ln[f(t)/f(t_0)]$ e $x = r_1(t - t_0) = (t - t_0)/\tilde{t}_0$, tem-se o colapso de dados, em que a grandeza $\tilde{t}_0 = 1/r_1$ representa o *tempo característico* do sistema. Tanto a variável independente x quanto a variável dependente é $y(x)$ são adimensionais. Na escala logarítmica, tem-se o colapso de dados na reta padrão $y(x) = x$.

É possível obter o colapso de dados não-lineares (retas)? A resposta é sim. Da reta padrão $y(x) = x$, volta-se a escrever: $\ln[f(t)/f_0] = r_1(t - t_0)$ o que leva à:

$$\frac{f(t)}{f_0} = e^{r_1(t - t_0)} ,$$

que quando t aumenta a partir de t_0, apresenta o seguinte comportamento, para: (i) $r_1 < 0$, diminui (exponencialmente); (ii) $r_1 = 0$, permanece constante e (iii) $r_1 > 0$, aumenta (exponencialmente). Redefinindo as variáveis: $y = f(t)/f(t_0)$ e $x = r_1(t - t_0)$, tem-se o colapso de dados na *exponencial padrão*: $y(x) = e^x$.

2. Coeficiente Variável

É interessante observar que podemos considerar o caso de rendimento variável. Nesta situação, r_1 é uma função nula, para $t < t_0$ e arbitrária, para $t \geq t_0$. Assim

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t)$$

, pode facilmente ser resolvido pois: $d\ln f(t)/dt = r_1(t)$, o que leva à:

$$\frac{f(t)}{f_0} = \exp[\int_{t_0}^{t} dt' r_1(t')] \ ,$$

com $f_0 = f(t_0)$. Se r_1 for uma constante, reobtemos $f(t)/f_0 = e^{r_1(t-t_0)}$. Mesmo incluindo um coeficiente variável, a natureza intrínseca do modelo exponencial não foi alterada, pois: $y = f/f_0$ e $x = \int_{t_0}^{t} dt' r_1(t')$, que se reduz à exponencial padrão $y(x) = e^x$. Neste caso, chama-se $\tilde{t}_0(t) = 1/\bar{r}_1(t)$, onde $\bar{r}_1(t) = [1/(t - t_0)]\int_{t_0}^{t} dt' r_1(t')$ é o valor médio de $r_1(t)$, o tempo característico do sistema é dado por: $\tilde{t}_0 = \tilde{t}_0(\infty)$.

a. Exponencial Estendida. Um caso particular importante da equação $df(t)/dt = r_1(t)f(t)$ consiste em considerar $r_1(t) = \beta k t^{\beta-1}$: $df(t)/dt = \beta k t^{\beta-1} f(t)$, cuja solução é dada por: $f(t) = f_0 e^{k(t^\beta - t_0^\beta)}$, que é conhecida como a *função exponencial estendida* ou *função de Kohlrausch* (2; 3; 4; 5). Esta função, que é muito utilizada em medidas de tempo de decaimento de luminescência, ainda apresenta a natureza exponencial, mas na variável deformada t^β. Neste caso o colapso dos dados se dá nas variáveis: $y = f/f_0$ e $x = k(t^\beta - t_0^\beta)$.

D. Modelo Linear e Exponencial

Para representar, por exemplo, o crescimento de um ativo em uma aplicação financeira em que se aporta ou retira uma quantia fixa por unidade de tempo considere os seguintes modelos.

1. Coeficientes Constantes

Pode-se combinar o modelo exponencial com o modelo linear através da equação:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \ ,$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{r_1 t}\left[f_0 e^{-r_1 t_0} - \frac{r_1}{r_0}(e^{-r_1 t} - e^{-r_1 t_0})\right] \\ &= \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right)e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

com $f_0 = f(t_0)$. Neste caso, ainda temos a mesma natureza intrínseca do modelo exponencial, pois escrevendo: $y = (f - r_1/r_0)/(f_0 - r_1/r_0)$ e $x = r_1(t - t_0)$, o modelo se reduz a exponencial padrão: $y(x) = e^x$. A grandeza r_1, que é o inverso do tempo característico $\tilde{t}_0 = 1/r_1$, é relevante ao problema mas r_0 não, pois ela não aparece isolada nas transformações e sim dividida por r_1. Neste caso, a grandeza relevante é a razão r_1/r_0, em que $1/r_0$ serve simplesmente para determinar a unidade de tempo em valores absolutos, em que os aportes ou retiradas são realizados.

2. Coeficientes Variáveis

Considere primeiramente r_0 é uma função nula, para $t < t_0$ e arbitrária, para $t \geq t_0$. Assim:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \ ,$$

cuja solução é dada por:

$$f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \ .$$

Ainda neste caso não mudamos a natureza exponencial do modelo. Considere as seguintes mudanças de variáveis: $y = f/f_0 - r_1 e^{r_1 t_0}/f_0 \int_0^x dx' e^{-x'} r_0(x'/r_1 + t_0)$ e $x = r_1(t - t_0)$, tem-se a exponencial padrão $y(x) = e^x$.

Considere r_1 não mais uma constante, mas uma função que dependente de t, temos:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t) \ ,$$

cuja solução é dada por:

$$\frac{f(t)}{g[r_1(t)]} = f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' g[-r_1(t')] r_0(t')$$

com

$$g[r(t)] = \exp[\int_{t_0}^{t} dt'' r(t'')] \ .$$

Ainda neste caso não alteramos a natureza exponencial do modelo. Considere as seguintes mudanças de variáveis: $y = f/\{f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \exp[-\int_{t_0}^{t'} dt'' r_1(t'')] r_0(t')\}$ e $x = \int_{t_0}^{t} dt'' r_1(t'')$, levando a solução do modelo à exponencial padrão $y(x) = e^x$.

E. Modelo de Zipf-Mandelbrot ou Modelo de von Foester et al. de Dinâmica Populacional

Vamos agora considerar um modelo mais geral, em que f está elevado a uma potência arbitrária. Mostramos que, mesmo os modelos sendo não-lineares, em alguns casos eles podem ser expressos por modelos lineares. No entanto, não é mais possível definir um tempo característico para o sistema, o que é típico de *sistemas complexos*. Consideramos primeiramente o caso com coeficientes constantes e posteriormente o caso com coeficientes variáveis.

1. Coeficientes constantes

Considere primeiramente a seguinte equação:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\tilde{q}} f^{1-\tilde{q}}(t) \ . \tag{2}$$

Esta equação em química é chamada de *equação cinética de ordem* $1-\tilde{q}$ (6). Esta equação também descreve o crescimento populacional dos seres humanos na Terra (7) e uma data do juízo final[1] é prevista. Para $r_{1-\tilde{q}} = 0$, reobtemos o modelo constante; para $\tilde{q} = 0$, reobtemos o modelo exponencial e para $\tilde{q} = 1$, reobtemos o modelo linear. A solução desta equação pode ser encontrada reescrevendo-a como: $\tilde{q} f^{\tilde{q}-1}$ df/d$t = \tilde{q}k \Rightarrow$ d$f^{\tilde{q}}(t)$/d$t = \tilde{q} r_{1-\tilde{q}}$, que é linear na variável $v(t) = f^{\tilde{q}}(t)$ e pode ser resolvida: $v(t) = \tilde{q} r_{1-\tilde{q}}(t-t_0) + v_0$, em que a condição inicial é $v_0 = v(t_0) = f_0^{\tilde{q}}$ com $f_0 = f(t_0)$. Então, têm-se:

$$\frac{f(t)}{f_0} = \left(1 + \tilde{q}\ \frac{t-t_0}{\tilde{t}_{\tilde{q}}}\right)^{1/\tilde{q}} = e_{\tilde{q}}\left(\frac{t-t_0}{\tilde{t}_{\tilde{q}}}\right) \ , \tag{3}$$

com

$$t_{\tilde{q}} = \frac{f_0^{\tilde{q}}}{r_{1-\tilde{q}}} \ .$$

Esta grandeza somente é um tempo característico no modelo exponencial, quando $\tilde{q} = 0$ e ela fica independente da condição inicial. Para $\tilde{q} \neq 1$, existe a dependência com a condição inicial e ela não pode mais ser interpretada como um tempo característico do sistema. Sistemas que não apresentam um tempo característico são chamados de *sistemas complexos*.

Observe que esta equação pode ser escrita em termos da função exponencial generalizada oriunda da mecânica estatística não-extensiva (8; 9). A função $\tilde{q}$-exponencial $e_{\tilde{q}}(x)$ é definida como o valor t, de tal forma que a área debaixo da função $f_{\tilde{q}}(t) = 1/t^{1-\tilde{q}}$, no intervalo $t \in [1, e_{\tilde{q}}(x)]$, é x (10):

$$e_{\tilde{q}}(x) \ = \ \begin{cases} \lim_{\tilde{q}' \to \tilde{q}} (1+\tilde{q}'x)^{1/\tilde{q}'} \ , & \text{se } \tilde{q}x \geq -1 \\ 0 \ , & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4}$$

Esta é uma função não-negativa $e_{\tilde{q}}(x) \geq 0$ e $x = 0$ é um ponto especial, pois $e_{\tilde{q}}(0) = 1$, independentemente do valor de $\tilde{q}$. Para $\tilde{q} \to 0$, usando o limite fundamental, reobtem-se o modelo exponencial: $f(t) = f_0 e^{(t-t_0)/\tilde{t}_0}$, com $\tilde{t}_0 = 1/r_1$.

Na Eq. (3), padroniza-se a variável dependente $f(t)$ dividindo-a pela condição inicial f_0. A razão $y = f(t)/f_0$ é adimensional e f_0 estabelece a unidade de medida para $f(t)$. Ao contrário de f, nenhuma escala típica, intrínseca, característica ou robusta existe para a variável independente t. Apesar de $\tilde{t}_{\tilde{q}}$ ter a unidade de t, seu valor depende da condição inicial t_0. O colapso de dados é obtido nas seguintes variáveis: $y = f/f_0$ e $x = (t-t_0)/\tilde{t}_{\tilde{q}}$.

2. Coeficiente Variável

Considere $r_{1-\tilde{q}}$ não mais uma constante, mas uma função que dependente de t, temos:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\tilde{q}}(t) f^{1-\tilde{q}}(t) \ .$$

A solução desta equação é dada por:

$$f(t)/f_0 = e_{\tilde{q}}[f_0^{\tilde{q}} \int_{t_0}^{t} dt' r_{1-\tilde{q}}(t')] \ .$$

Um caso particular desta equação é quando $r_{1-\tilde{q}}(t) = \beta k t^{\beta-1}$: $df(t)/dt = \beta k t^{\beta-1} f^{1-\tilde{q}}(t)$, cuja solução é a *função exponencial estendida generalizada* (11)

$$\frac{f(t)}{f_0} = e_{\tilde{q}}\left[f_0^{\tilde{q}} k (t^\beta - t_0^\beta)\right] \ .$$

Observe que quando $\tilde{q} \to 0$, ela se torna a função exponencial estendida.

F. Modelo de Bernoulli e Modelo de Richards-Schaefer de Dinâmica Populacional

Como vimos, algumas vezes é possível resolver uma equação não-linear fazendo-se uma mudança na variável dependente que a transforma em uma equação linear.

1. Coeficientes Constantes

Considere o caso da equação de Bernoulli com coeficientes constantes:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_{1-\tilde{q}} f^{1-\tilde{q}}(t) + \tilde{r}_1 f(t) \ , \tag{5}$$

com a mudança de variável $v(t) = f^{\tilde{q}}(t)$, temos $dv(t)/dt = \tilde{r}_1 v(t) + r_{1-\tilde{q}}$, cuja solução é: $v(t) = [v(t_0) + \tilde{r}_1/r_{1-\tilde{q}}] e^{r_{1-\tilde{q}}(t-t_0)} - \tilde{r}_1 r_{1-\tilde{q}}$. Assim, na variável original temos:

$$\frac{f(t)}{f_0} = \left\{ \left[1 + \frac{\tilde{r}_1}{f_0^{\tilde{q}} r_{1-\tilde{q}}}\right] e^{r_{1-\tilde{q}}(t-t_0)} - \frac{\tilde{r}_1}{f_0^{\tilde{q}} r_{1-\tilde{q}}} \right\}^{1/\tilde{q}} \ . \tag{6}$$

Pode-se reescrever a equação de Bernoulli de modo a enfatizar a variação relativa da função $f(t)$. Para isto considere: $[df(t)/f(t)]dt = d\ln f(t)/dt = r_{1-\tilde{q}} f^{-\tilde{q}}(t) +$

[1] Fim da raça humana devido à superlotaçao de indivíduos na terra

$\tilde{r}_1$. Vamos considerar agora a variável $p(t) = 1/f(t)$, assim estabelecemos a ligação entre a equação de Bernoulli e os modelos de dinâmica populacional (modelos de crescimento) de uma espécie:

$$\frac{d \ln p(t)}{dt} = G_{r_{1-\tilde{q}},\tilde{r}_1}(p) \ . \tag{7}$$

em que chamamos de *função induzida de saturação* a expressão

$$\begin{aligned} G_{r_{1-\tilde{q}},\tilde{r}_1}(p) &= -r_{1-\tilde{q}} p^{\tilde{q}}(t) - \tilde{r}_1 = -\tilde{r}_{1-\tilde{q}} \frac{p^{\tilde{q}}(t) - 1}{\tilde{q}} - \tilde{r}_0 \\ &= -\tilde{r}_{1-\tilde{q}} \ln_{\tilde{q}} p - \tilde{r}_0 \end{aligned} \tag{8}$$

com $\tilde{r}_{1-\tilde{q}} = \tilde{q} r_{1-\tilde{q}}$ e $\tilde{r}_0 = \tilde{r}_{1-\tilde{q}} - \tilde{r}_1$. Este é o *modelo de Richards-Schaefer* em dinâmica populacional. A função *$\tilde{q}$-logaritmo*: $\ln_{\tilde{q}}(x)$ é definida como o valor da área debaixo de $f_{\tilde{q}}(t) = 1/t^{1-\tilde{q}}$ no intervalo $t \in [1, x]$ (10), que é a função inversa da função $\tilde{q}$-exponencial:

$$\begin{aligned} \ln_{\tilde{q}}(x) &= \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\tilde{q}}} = \lim_{\tilde{q}' \to \tilde{q}} \frac{x^{\tilde{q}'} - 1}{\tilde{q}'} \\ &= \begin{cases} \frac{x^{\tilde{q}}-1}{\tilde{q}} \ , & \text{para } \tilde{q} \neq 0 \\ \ln(x) \ , & \text{para } \tilde{q} = 0 \end{cases} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Para qualquer valor de $\tilde{q}$, a área é negativa para $0 < x < 1$; nula para $x = 1$ [$\ln_{\tilde{q}}(1) = 0$] e positiva para $x > 1$. Esta função *não* é a função logaritmo na base $\tilde{q}$ [$\log_{\tilde{q}}(x)$], mas sim, a generalização da definição do logaritmo natural com um parâmetro. Para esta função, os seguintes comportamentos são observados. Para (i) $\tilde{q} < 0$, a função: (a) diverge na origem $\ln_{\tilde{q}}(0) = -\infty$; (b) converge, com $x \to \infty$: $\ln_{\tilde{q}}(\infty) = |1/\tilde{q}|$. (ii) $\tilde{q} = 0$, $\ln_0(x) = \ln(x)$ é a função logaritmo usual, com uma divergência marginal para ambos os extremos $\ln_{\tilde{q}}(0) = -\infty$ e $\ln_{\tilde{q}}(\infty) = \infty$. Esta é a divergência mais suave. (iii) $\tilde{q} > 0$, a função: (a) converge na origem [$\ln_{\tilde{q}}(0) = -1/\tilde{q}$]; (b) diverge, com $x \to \infty$ assintoticamente para $\ln_{\tilde{q}}(x) \sim x^{\tilde{q}}/\tilde{q}$. Porém, este terceiro regime pode ser subdivido com respeito a concavidade com $x \to \infty$: (1) côncavo, para $0 < \tilde{q} < 1$, esta divergência é mais suave do que no caso $\tilde{q} = 1$; (2) linear [$\ln_1(x) = x - 1$], para $\tilde{q} = 1$; (3) convexo, para $\tilde{q} > 1$. O ponto $x = 1$ é especial já que $\ln_{\tilde{q}}(1) = 0$.

A solução do modelo de Richards-Schaefer é dada por:

$$p(\tau) = \frac{e_{\tilde{q}}(\epsilon)}{e_{\tilde{q}}\{\ln_{\tilde{q}}[e_{\tilde{q}}(\epsilon)/p_0] e^{-[1+\tilde{q}\epsilon]\tau}\}} \ , \tag{10}$$

com $\tau = \tilde{r}_{1-\tilde{q}} t$ e $\epsilon = -\tilde{r}_0/\tilde{r}_{1-\tilde{q}}$.

O regime estacionário é dado por: $p^* = p(\infty) = e_{\tilde{q}}(\epsilon)$ e indica a sobrevivência da espécie somente se $\tilde{q}\epsilon > -1$, caso contrário, a espécie é extinta. Deste modo, têm-se um valor crítico $\epsilon^{(c)} = -1/\tilde{q}$ que separa as duas fases ecológicas. O modelo de Richards é obtido fazendo $\tilde{r}_0 = \epsilon = 0$. Para os casos particulares temos os seguintes modelos: (i) $\tilde{q} = 0$, o *modelo de Gompertz* e (ii) $\tilde{q} = 1$, o *modelo de Verhulst*. Estes modelos serão detalhados a seguir.

a. Modelo Microscópico. É importante ressaltar que o parâmetro $\tilde{q}$ possui uma interpretação microscópica (12; 13; 14). Considere que a proliferação das células é regulada pelos mecanismos antagonistas de replicação e interações inibitórias. As interações de longo alcance dependem da distância r entre duas células como uma lei de potência r^{γ} . Além disso, considere que as células crescem uma estrutura fractal, caracterizada por D_f. A partir de tais suposições, Mombach (12; 13) obtiveram o modelo de Richards-Schaefer e assim pode-se atribuir um significado físico ao parâmetro $\tilde{q} = 1 - \gamma/D_f$ (14).

b. Modelo de Verhulst. Em dinâmica populacional, o modelo exponencial (de Malthus) somente é aplicável no começo do crescimento da população. À medida que a população de tamanho $N(t)$, o instante t, cresce a uma taxa de crescimento intrínseco r_1, os recursos se escassam e a população tende a ter um tamanho fixo $K = N(\infty)$. A constante K é chamada *capacidade de carregamento* do meio. Para levar em consideração o fato do meio ter recursos finitos, a equação de Malthus fica escrita como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_1 N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K}\right] \ , \tag{11}$$

que é a chamada *equação de Verhulst*. Observe que este modelo é não linear, pois depende de $f^2(t)$ e que a solução estável $df(t)/dt = 0$ implica em $f(\infty) = K$. Para relacionar com o que já foi apresentado, considere $p(t) = N(t)/K$, tem-se então a *equação logística*: $d \ln p/dt = k(1-p) = -k \ln_1(p)$, sendo $\ln_1(x) = x - 1$. A solução desta equação é: $p(t) = 1/(1 + (p_0^{-1} - 1)e^{-r_1 t})$, sendo $p_0 = N_0/N_\infty$. Observe que, tomando o inverso de $p(t)$ e subtraindo a unidade, temos: $[p^{-1}(t) - 1]/(p_0^{-1} - 1) = e^{-r_1 t}$ e os dados colapsam em uma exponencial padrão.

c. Modelo de Gompertz. Considerando $\tilde{r}_0 = 0$ na Eq. 8 e então fazendo $\tilde{q} = 0$, temos o *modelo de Gompertz*:

$$\frac{d \ln p}{dt} = -\tilde{r}_1 \ln p \ ,$$

que é usado pelas companias de seguros para calcular o preço do seguro de vida. A solução é dada por:

$$p(t) = p_0^{e^{-\tilde{r}_1 t}} \ .$$

Tomando o logaritmo de ambos lados temos: $\ln(p(t)/p_0) = e^{-\tilde{r}_1 t}$, e nas variáveis $y = \ln(p/p_0)$ e $x = \tilde{r}_i t$, obtemos a equação exponencial padrão $y = e^{-x}$.

2. Coeficientes Variáveis

Considere a dependência temporal em ambas as taxas de crescimento intrínseca e extrínseca, de modo que a inserção e retirada de indivíduos na população é dada pela equação:

$$\frac{d\ln[p(t)]}{dt} = -\kappa(t)\ln_{\tilde{q}}[p(t)] + \tilde{\epsilon}(t), \tag{12}$$

cuja solução é:

$$p(t) = \left\{ \frac{1}{\tilde{I}(t)} \left[1 + \int_0^t dt' \tilde{I}(t')\kappa(t') \right] \right\}^{-1/\tilde{q}}, \tag{13}$$

em que:

$$\tilde{I}(t) = p_0^{\tilde{q}} e^{\left[\int_0^t dt' \kappa(t') + \tilde{q}\int_0^t dt' \tilde{\epsilon}(t')\right]} \tag{14}$$

com $I(0) = p_0^{\tilde{q}}$.

Considere agora um crescimento intrínseco constante $\kappa(t) = \kappa$, que nos chamamos de *modelo de Richards-Shaefer com crescimento extrínseco dependente do tempo*:

$$\frac{d\ln p(\tau)}{d\tau} = -\ln_{\tilde{q}} p(\tau) + \epsilon(\tau) \ , \tag{15}$$

onde $\tau = \kappa t$. Esta equação pode ser resolvida e sua soluções é convenientemente escrita em termos funções logaritmo e exponencial generalizadas:

$$p(\tau) \ = \ \frac{e_{\tilde{q}}\left[\epsilon(\tau)\right]}{e_{\tilde{q}}\left\{\ln_{\tilde{q}}\left\{\frac{e_{\tilde{q}}[\epsilon(0)]}{p_0}\right\}\frac{e_{\tilde{q}}[\epsilon(\tau)]}{e_{\tilde{q}}[\epsilon(0)]}e^{-[1+\tilde{q}\overline{\epsilon}(\tau)]\tau}\right\}} \tag{16}$$

em que

$$\overline{\epsilon}(\tau) \ = \ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau d\tau' \epsilon(\tau') \tag{17}$$

é o valor médio de $\epsilon(\tau)$ até o tempo τ. Note que esta é uma solução de um modelo bem geral (Richards) com um termo de crescimento extrínseco dependente do tempo. Para uma taxa de crescimento extrínseco constante $\epsilon(t) = \epsilon$ na Eq.(16), reobtemos a solução do modelo de Richards-Schaefer. A solução estacionária ($\tau \to \infty$) da Eq. (16) é: $p^* = p(\infty) = e_{\tilde{q}}(\overline{\epsilon})$ em que $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon(\infty)}$ é valor médio de $\overline{\epsilon(\tau)}$. A extinção da população ocorre para $\tilde{q}\overline{\epsilon} < -1$. Esta solução permite obter a análise de estabilidade de modelos de dinâmica de duas espécies interagindo (15).

Usando a mesma abordagem, podemos escrever a solução estacionária da população como $p^* \sim (\overline{\epsilon} - \overline{\epsilon}_c)^{1/\tilde{q}}$, where $\overline{\epsilon}_c = -1/\tilde{q}$ em que $\overline{\epsilon}_c = -1/\tilde{q}$. Podemos também calcular a susceptibilidade $\chi = \partial p^*/\partial\overline{\epsilon} \sim (\overline{\epsilon} - \overline{\epsilon}_c)^{1/\tilde{q}-1}$. Dessa forma, independente da complexidade, das taxas de crescimento intrínseca e extrínseca, o sistema apresenta o mesmo comportamento crítico.

Se $\epsilon(t)$ for uma variável aleatória, tem-se a equação de crescimento aditiva estocástica. Nesse caso, se o valor médio for nulo $\overline{\epsilon(\tau)} = 0$ e $\overline{\epsilon(\tau_1)\epsilon(\tau_2)} = \sigma^2\delta(\tau_2 - \tau_1)$ (processo Gaussiano), a função densidade de probabilidade de $v = \ln p$ satisfaz a equaçãop de Fokker-Planck: $\partial_\tau P(v) = \partial_v[P(v)\ln_{\tilde{q}}(v)] + (\sigma^2/2)\partial_v^2[P(v)]$ (16; 17; 18). Ruído correlacionado e tipo Lévy também são usados (19; 20; 21)..

G. Conclusões

Colapso de dados, funções de escala, transições de fase e expoentes críticos, são conceitos amplamente utilizados em diferentes áreas de pesquisa. Mostra-se aqui a aplicação desses conceitos em modelos de crescimento populacional. Através do colapso de dados é possível estabelecer escala e extrair expoentes associados à transições de fase em equilíbrio ou fora de equilíbrio. Usando a função de escala, uma vasta gama de modelos podem ser escritos como um modelo linear simples. Incluindo uma taxa de crescimento extrínseca nos modelos, surge uma transição bem determinada entre sobrevivência e extinção da população. A taxa de crescimento extrínseca pode ser vista como uma aproximação de campo médio na interação com outras espécies. Por essa razão acredita-se que colapso de dados ocorra para modelos considerando múltiplas espécies. Ao considerar modelos estocásticos através de coeficientes com dependência temporal, conjecturamos que o colapso de dados persiste em tais modelos.

Em termos de aplicações, verifica-se a importância de extrair grandezas relevantes a partir de expoentes críticos fornecidos pelos modelos. No caso de modelos de crescimento e tratamento de tumores, constata-se que não só a intensidade do tratamento é relevante, mas também o momento em que a taxa de crescimento do tumor é máxima.

Já na área econômica, usando o trocadilho substituem-se células por cédulas, sendo que agora podemos ter valores negativos para a variável dependente. Nesse caso poder-se-ia construir um modelo que levasse em conta fatores microeconômicos e a partir de métodos da física extrair fatores relevantes que levam o desenvolvimento de uma economia ou o sucesso de um investimento.

II. MODELOS DISCRETOS

Vamos agora considerar a discretização de alguns modelos que apresentamos no contínuo.

A. Exponencial: Malthus

Vamos iniciar considerando a Eq. **??**: $dx(t)/dt = rx(t)$, que usando diferenças finitas, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} &= rx(t) \\ x(t+\Delta t) &= (1+r\Delta t)x(t) \\ &= \kappa x(t)\ , \end{aligned} \tag{18}$$

assim consideramos o passar do tempo discretamente, ou seja, perdemos a noção do que se passa no intervalo Δt. Assim podemos escrever $x_i = x(i\Delta t)$, onde $i = 0, 1, 2, \ldots$. A grandeza $r\Delta t = R$ é chamado de rendimento, que ocorre a cada intervalo de Δt, por exemplo, na caderneta de poupança Δt é um mês. O montante no instante n depende do montante no instante precedente:

$$x_n = \kappa x_{n-1} \tag{19}$$

onde x_0 é o montante inicial e $\kappa = 1 + R$. Neste caso podemos relacionar o montante em qualquer instante com o montante inicial:

$$x_n = \kappa^n x_i = (1+R)^n x_0\ , \tag{20}$$

onde o termo $(1 + R)^n$ leva em consideração a composição dos juros. Observe que se o rendimento for pequeno $R \ll 1$, então $(1 + R)^n = 1 + nR + \ldots$, ou seja, podemos simplesmente adicionar os juros.

Considere agora que o rendimento do mês seja pago em duas vezes, de quinze em quinze dias assim: $x_n = (1 + R/2)^2 x_{n-1}$, ou de semana em semana $x_n = (1 + R/4)^4 x_{n-1}$, ou diariamente $x_n = (1 + R/30)^{30} x_{n-1}$, observe que neste casos os valores $x_n = (1 + \delta t R)^{1/\delta t}$são diferentes e aumentam a medida que o intervalo de tempo $\delta t = 1/N$ diminiu. Este foi um problema que preocupou por muito tempo os "matemáticos", pois se $\delta t \to 0$, eles temiam que $x_n \to \infty$. Na realidade temos aqui um limite fundamental $x_n = e^R x_{n-1}$, ou seja $x(t) = e^{Rn} x_0$, que é a Eq. **??** solução da Eq. **??**.

1. Composição de Juros com Aportes ou Retiradas

Considere agora que no início de cada intervalo de tempo um aporte ou retirada sejam feitos, assim: $x_1 = x_0\kappa_1 + h_1$, no segundo $x_2 = x_1\kappa_2 + h_2 = [x_0\kappa_1 + h_1]\kappa_2 + h_2$ e assim por diante. No final do n-ésimo intervalo o capital é:

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^{n} \kappa_i + \sum_{j=1}^{n} h_j \prod_{i=j+1}^{n-1} \kappa_i\ . \tag{21}$$

Considerando os rendimentos e aportes/retiradas constantes $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots = \kappa_n = \bar\kappa$ e $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = \bar h$:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0\bar\kappa^n + \bar h \frac{1-\bar\kappa^n}{1-\bar\kappa} \\ &= \left(x_0 - \frac{\bar h}{1-\bar\kappa}\right)\bar\kappa^n + \frac{\bar h}{1-\bar\kappa}\ . \end{aligned} \tag{22}$$

B. Mapa Logístico: Verhulst

Considere a Eq. 11 $dy(t)/dt = ry(t)[1 - f(t)/K]$, com d$t = h$: $[y_{n+1} - y_n]/h = ry_n(1 - y_n/K)$, de modo que:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1+rh)y_n - \frac{rhy_n^2}{K}\,\frac{1+rh}{1+rh} \\ &= \underbrace{(1+rh)}_{\rho}\, y_n \left[1 - \frac{y_n}{\underbrace{(1+rh)K/(rh)}_{k}}\right] \\ \underbrace{\frac{y_{n+1}}{k}}_{x_{n+1}} &= \rho\, \underbrace{\frac{y_n}{k}}_{x_n} \left[1 - \frac{y_n}{k}\right] \\ x_{n+1} &= \underbrace{\rho}_{4a}\, x_n(1-x_n) \end{aligned}$$

Termina-se este capítulo com uma fórmula de recorrência muito simples, mas que apresenta um comportamento muito rico. Esta fórmula será tratada em mais detalhes nas próximas aulas, quando estudaremos sistemas dinâmicos e rotas para o caos.

REFERÊNCIAS

[1] James Dickson Murray. *Mathematical biology I: an introduction*. Springer, New York, 2002.

[2] J Laherrère and D Sornette. Stretched exponential distributions in nature and economy: "fat tails" with characteristic scales. *Eur. Phys. J. B*, 2:525–539, May 1998.

[3] M N Berberan-Santos, E N Bodunov, and B Valeur. Mathematical functions for the analysis of luminescence decays with underlying distributions 1. kohlrausch decay function (stretched exponential). *Chem. Phys.*, 315:171–182, Jul 2005.

[4] M Cardona, R V Chamberlin, and W Marx. The history of the stretched exponential function. *Ann. Physik*, 16(12):842–845, Dec 2007.

[5] M N Berberan-Santos, E N Bodunov, and B Valeur. History of the Kohlrausch (stretched exponential) function: focus on uncited pioneering work in luminescence. arxiv:0804.1814, 2008.

[6] Robert K Niven. q -exponential structure of arbitrary-order reaction kinetics. *Chemical Engineering Science*, 61:3785–3790, Mar 2006.

[7] Heinz von Foerster, Patricia M. Mora, and Lawrence W. Amiot. Doomsday: Friday, 13 november, a.d. 2026. *Science*, 132:1291–1295, 1960.

[8] A. R. Plastino C. Tsallis, R. S. Mendes. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica*

A: Statistical Mechanics and its Applications, 261:534–554, 1998.

[9] Constantino Tsallis. What are the numbers experiments provide? *Química Nova*, 17(6):468–471, 1994.

[10] Tiago José Arruda, Rodrigo Silva González, César Augusto Sangaletti Terçariol, and Alexandre Souto Martinez. Arithmetical and geometrical means of generalized logarithmic and exponential functions: generalized sum and product operators. *Phys. Lett. A*, 372:2578–2582, 2008.

[11] Alexandre Souto Martinez, Rodrigo Silva González, and César Augusto Sangaletti Terçariol. Generalized probability functions. *Advances in Mathematical Physics*, 2009:206176, Jan 2009.

[12] J. C. M. Mombach, Nei Lemke, B. E. J. Bodmann, and Marco Aurélio Pires Idiart. A mean-field theory of cellular growth. *Eur. Phys. Lett.*, 60(3):489, Oct 2002.

[13] J C M Mombach, Nei Lemke, B E J Bodmann, and Marco Aurélio Pires Idiart. A mean-field theory of cellular growth. *Eur. Phys. Lett.*, 59(6):923–928, Aug 2002.

[14] A. S. Martinez, R. S. González, and C. A. S. Terçariol. Continuous growth models in terms of generalized logarithm and exponential functions. *Physica A*, 387:5679–ï¿5687, 2008.

[15] Brenno Caetano Troca Cabella, Fabiano Ribeiro, and Alexandre Souto Martinez. Full analytical solution and complete phase diagram analysis of the verhulst-like two-species population dynamics model. *arXiv:1010.3361v2 [q-bio.PE]*, 2011.

[16] Elliot W. Montroll. Social dynamics and the quantifying of social forces. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 75:4633–4637, 1978.

[17] R. Zygadlo. Verhulst-type kinetics driven by white shot noise: Exact solution by direct averaging. *Phys. Rev. E*, 47:106–117, 1993.

[18] R. Zygadlo. Relaxation and stationary properties of a nonlinear system driven by white shot noise: An exactly solvable model. *Phys. Rev. E*, 47:4067–4075, 1993.

[19] R Mannella, C J Lambert, N G Stocks, and P V E McClintock. Relaxation of nonlinear systems driven by colored noise: An exact result. *Phys. Rev. A*, 41:3016–3020, 1990.

[20] Bao-Quan Ai, Xian-Ju Wang, Guo-Tao Liu, and Liang-Gang Liu. Correlated noise in a logistic growth model. *Phys. Rev. E*, 67:022903, 2003.

[21] A. A Dubkov and B Spagnolo. Verhulst model with levy white noise excitation. *Eur. Phys. J. B*, 65:361–367, 2008.