MAT 1513 – LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA
1º SEMESTRE DE 2020
PROFA. DANIELA

SEMANA 16/03 A 20/03

AULA 1 - FUNÇÕES

Dados dois conjuntos X e Y, uma função de X em Y é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$.

É importante observar que para receber o nome de **função**, essa tal associação deve associar, a cada $x \in X$, um único elemento $y = f(x) \in Y$, isto é, não pode haver nenhum tipo de ambiguidade. No **Exemplo 1** (abaixo), darei um exemplo de uma associação que não é uma função.

Notação: $f : X \to Y$.

Nomenclaturas:

- X : domínio de f
- Y : contra-domínio de f
- $f(x)$: imagem (ou valor) de x pela função f

Obs.: mais adiante falarei sobre a **imagem de uma função** f

Exemplo 1

1.1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

1.2) Se $M_2(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes $2\text{x}2$ com entradas reais, então podemos definir a função determinante:

$det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $det(M) = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$, para toda matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$.

1.3) Função identidade

Seja X um conjunto qualquer. A função identidade é definida da seguinte forma:

$f: X \to X$ dada por $f(x)=x$, para todo $x \in X$.

1.4) Função constante

Sejam X e Y conjuntos quaisquer, e seja $c \in Y$. A função constante é definida da seguinte forma:

$f: X \to Y$ dada por $f(x)=c$, para todo $x \in X$.

1.5) Uma associação/regra que não é uma função

Seja T o conjunto de todos os triângulos do plano, e consideremos a regra que associa a cada número real positivo $a>0$ um triângulo $t \in T$ tal que sua respectiva área é a . Temos uma associação (ou regra) entre objetos matemáticos. No entanto, essa regra **não pode receber o nome de função**, pois dado um número real positivo $a>0$, existem muitos triângulos que possuem área a . Ou seja, a regra não associa, a cada $a>0$ um **único** triângulo $t \in T$, há aqui uma ambiguidade, uma dúvida sobre qual $t \in T$ devemos associar a a .

Importante!

Uma função consta de 3 ingredientes:

- domínio
- contra-domínio
- regra de formação ou lei de correspondência

Consequentemente, duas funções serão **iguais** se, e somente se, os três ingredientes de cada uma delas coincidirem.

Exemplo 2

2.1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.2) Se $Y=\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, $g: \mathbb{R} \to Y$ dada por $f(x)=x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3) Se $Y=\{x\in\mathbb{R}:x\geqslant 0\}$, $h:Y\to Y$ dada por $f(x)=x^2$, para todo $x\in Y$.

- As funções f e g do Exemplo 2 são diferentes, pois não possuem mesmo contra-domínio.
- As funções g e h do Exemplo 2 são diferentes, pois não possuem mesmo domínio.
- Explique por que as funções f e h do Exemplo 2 são diferentes.

INJETIVIDADE, SOBREJETIVIDADE
BIJEÇÃO

Dizemos que uma função $f:X\to Y$ é **injetiva/injetora** quando elementos diferentes em X são transformados em elementos diferentes em Y . Ou seja, uma função f é injetora quando:

$$x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x') \quad .$$

Ou equivalentemente, por meio da *contrapositiva* da implicação acima:

$$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x \quad .$$

No Exemplo 1.1, a função f é injetora pois se $x+1=x'+1$ então é claro que $x=x'$.

Para pensar... No Exemplo 1.2, você acha que a função det é injetora? Se ela é injetora, então deve acontecer que se duas matrizes possuem o mesmo determinante, então elas são iguais. Isso é verdade?

Irei comentar sobre as funções do Exemplo 2 mais adiante.

Seja $f:X\to Y$ uma função, e A um subconjunto de X ($A\subset X$). A **imagem de** A **pela função** f é o subconjunto $f(A)\subset Y$ definido por: $f(A)=\{f(x):x\in A\}$.

Dizemos que uma função $f:X\to Y$ é **sobrejetiva/sobrejetora** quando, para qualquer elemento $y\in Y$ pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x\in X$ tal que $f(x)=y$.

Sendo assim, uma função $f:X\to Y$ é sobrejetora se, e somente se, $f(A)=Y$.

→ Voltando às funções do Exemplo 2

→ A função f do Exemplo 2.1 **não é injetora**, pois para $x=2$ e $x'=-2$, temos que $f(x)=f(x')=4$. Ela também **não é sobrejetora**, pois existem muitos elementos $y\in\mathbb{R}$ que não são $f(x)$, para nenhum $x\in\mathbb{R}$. Basta que y seja um número negativo. Ele não pode ser quadrado de nenhum número real.

→ A função g do Exemplo 2.1 **não é injetora**, pelo mesmo motivo que a função f não é. No entanto, g **é sobrejetora.** Note que contradomínio de g é o conjunto $Y=\{x\in\mathbb{R}:x\geqslant 0\}$, de todos os números reais maiores ou iguais a 0. Nesse caso, dado qualquer $y\in Y$, se tomarmos $x=\sqrt{y}$, então $f(x)=y$. O elemento x pôde ser tomado pois y é positivo, e portanto podemos tomar sua raiz quadrada.

→ Já a função h do Exemplo 2.3 **é injetora** e **é sobrejetora**. Isto se dá por que mudamos o domínio de h para ser o conjunto Y. Ela é injetora pois se $h(x)=h(x')$ então $x^2=(x')^2$. Logo $x^2=(x')^2$. Aplicando raiz quadrada nessa última igualdade, e lembrando que **raiz quadrada de um número ao quadrado é o módulo desse número**, temos que $|x|=|x|'$. Mas como x e x' pertencem a $Y=\{x\in\mathbb{R}:x\geqslant 0\}$, segue que $x=x'$ Ela é sobrejetora pelo mesmo motivo que a função g é sobrejetora.

Das observações acima, vimos que:

- f não é injetora nem sobrejetora.
- g não é injetora mas é sobrejetora.
- h é injetora **e** sobrejetora.

Mais um motivo que justifica que nenhuma delas é a mesma função que a outra.

Funções que são injetoras **e** sobrejetoras recebem um nome especial.

Dizemos que uma função $f:X\to Y$ é **bijetiva/bijetora** se f é injetora e sobrejetora. Também dizemos que f é uma bijeção, ou ainda, uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Falaremos mais de funções bijetoras quando falarmos do conceito de **função inversa**, que será abordado na próxima aula.

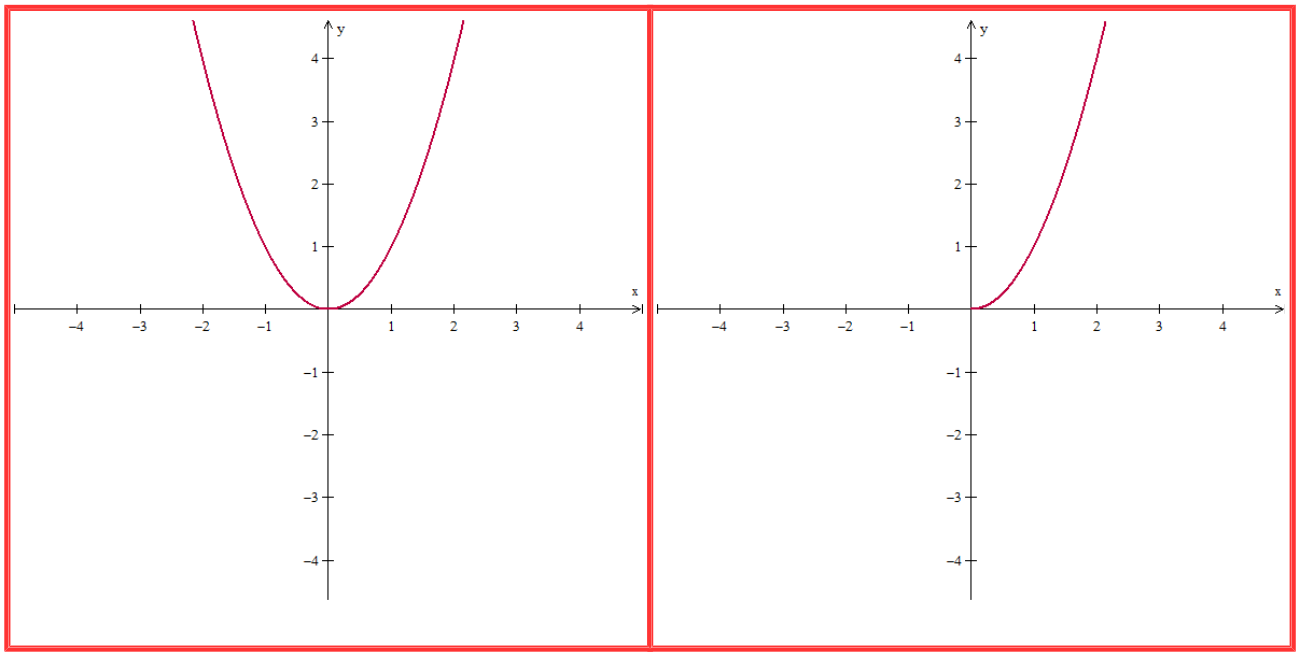
Terminarei a aula falando do conceito de **gráfico de uma função**. Dada uma função $f:X\to Y$, definimos o **gráfico de** f como sendo o seguinte conjunto:

$$\{(x,f(x))\in X\times Y:x\in X\}.$$

Note que o gráfico de uma função $f: X \rightarrow Y$ é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$.

→ Voltando às funções do Exemplo 2

Nas figuras abaixo, temos 2 gráficos. Cada um deles pode ser associado ao gráfico de uma das funções f , g ou h do Exemplo 2. Qual é o gráfico de cada uma delas?



Exercício!

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função, e sejam: A um subconjunto de X e B um subconjunto de Y . Decida se é V ou F

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Note que esse exercício é sobre igualdade entre conjuntos. Lembre-se sobre como demonstrar que dois conjuntos são iguais.

Se for V, justifique, mostre, demonstre.

Se for F, dê um exemplo no qual a igualdade não acontece. Há alguma inclusão que seja verdadeira? Há alguma condição sobre f que torne a igualdade verdadeira?