

MAE312 - Introdução aos Processos Estocásticos  
Prof. Fábio Machado  
Lista 1 - Entregar dia 13/03/2020

1. Suponhamos que numa eleição o candidato **A** obtenha  $a$  votos e o candidato **B** obtenha  $b$  votos com  $a > b$ . Mostre que a probabilidade de que **A** lidere a votação durante toda a contagem é dada por  $(a - b)/(a + b)$ .
2. Sejam dados  $a, b, c$  com  $a > c > 0$  e  $b > 0$ . O número de caminhos que tocam a linha  $x = a$  e, então, seguem para o ponto  $(n, c)$  sem tocar a linha  $x = -b$  é igual a  $N_{n,2a-c} - N_{n,2a+2b+c}$ . (Observe que esse número inclui os caminhos que tocam a linha  $x = -b$  antes de tocarem a linha  $x = a$ ).
3. Nos casinos americanos as roletas tem casas com os inteiros entre 1 e 36, além das casas 0 e 00. Metade das casas com os números diferentes de zero são vermelhos enquanto a outra metade são pretos. As casas 0 e 00 são verdes. Uma aposta comum neste jogo é colocar um dólar no vermelho. Se um número vermelho aparece, o apostador recebe seu dólar de volta além de outro dólar. Se um número preto ou verde aparece, ele perde o dólar.
  - (a) Suponha alguém que começa com \$ 40,00 dolares e que aposta continuamente no vermelho até que sua fortuna chegue a \$ 50,00 ou \$0,00. Encontre a probabilidade de que a fortuna chegue a \$ 50,00 dolares.
  - (b) Quanto dinheiro tem que começar o jogador, para ter o chance de 20% de ganhar \$10,00 dolares antes de ir a falência?
4. Suponhamos que numa eleição o candidato **A** obtenha 70 votos e o candidato **B** obtenha 30. Mostre que a probabilidade de que **B** lidere a votação por algum período da contagem (sabemos que no final ele irá ser derrotado) é superior a 50
5. Considere um passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}$  partindo da origem. Para  $T = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ , mostre que

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n - 1} \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

Deduzza que  $\mathbb{E}(T^\alpha) < \infty$  se e somente se  $\alpha < \frac{1}{2}$ . A fórmula de Stirling pode ser útil:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

6. Mostre que em um passeio aleatório simétrico  $S_n$  iniciando em 0, a distribuição de probabilidade do máximo  $M_n := \max\{S_j : 0 \leq j \leq n\}$  satisfaz

$$\mathbb{P}(M_n = r) = \mathbb{P}(S_n = r) + \mathbb{P}(S_n = r + 1)$$