Modelagem Bayesiana e Aplicações

Márcia D'Elia Branco

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
http:www.ime.usp.br/ m̃branco

Introdução à inferência bayesiana - Aula 2

Proposição 1 : Considere $y_1, \ldots, y_n$ realizações, condicionalmente independentes, de uma v.a. $Y \mid \mu, \tau \sim N(\mu, 1/\tau)$. Sob a especificação *a priori* $\mu \mid \tau \sim N(m_0, (n_0\tau)^{-1})$ e $\tau \sim Gama(a_0, b_0)$, temos as seguintes distribuições *a posteriori*:

1. $\mu \mid \tau, y \sim N(m_1, (n_1\tau)^{-1})$;
2. $\tau \mid y \sim Gama(a_1, b_1)$;
3. $\mu \mid y \sim t(m_1, \frac{b_1}{n_0 a_1}, \nu)$.

Em que

$n_1 = n_0 + n$, $m_1 = \epsilon m_0 + (1-\epsilon)\bar{y}$ com $\epsilon = \frac{n_0}{n_0+n}$

$a_1 = \frac{2a_0+n}{2}$, $b_1 = b_0 + \frac{(n-1)s_y^2}{2} + \frac{nn_0}{2n_1}(m_0 - \bar{y})^2$ e $\nu = 2a_1$.

$\bar{y}$ e s_y^2 são as usuais médias e variâncias amostrais.

Modelo Normal com *a priori* pouco informativa

Para reduzir o efeito da distribuição *a priori* podemos escolher valores pequenos para n_0 e b_0. Isso implica no aumento das variâncias *a priori* de μ e τ.

No entanto, note que o valor de b_0 também influe no valor da média de τ pois, $E[\tau] = \frac{a_0}{b_0}$ e $Var[\tau] = \frac{a_0}{b_0^2}$

Uma estratégia comum é fixar $E[\tau] = 1$ o que implica em fazer $a_0 = b_0$. Com essas especificações obtemos

$n_1 \approx n, m_1 \approx \bar{y}, a_1 \approx \frac{n}{2}, b_1 \approx \frac{(n-1)s_y^2}{2}$ e $\nu \approx n$

Resultando em

$$\mu \mid \tau, y \sim N(\bar{y}, \frac{\sigma^2}{n}) \;\text{ e }\; \frac{(n-1)s_y^2}{\sigma^2} \mid y \sim \chi_n^2$$

Proposição 2 : Sob as mesmas suposições da Proposição 1, considere agora uma nova sequência de v.a. $YN_1, YN_2, \ldots, YN_m$ condicionalmente independentes e com mesma distribuição $N(\mu, \frac{1}{\tau})$. Além disso, suponha independência (condicional) das variáveis anteriores. Considere $\bar{YN} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} YN_i$ então

1. $\bar{YN} \mid y, \tau \sim N(m_1, \frac{1}{\tau}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n_1}))$
2. $\bar{YN} \mid y \sim t(m_1, \frac{b_1}{a_1}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n_1}), 2a_1)$

Modelo Normal - Exercício

Simular uma amostra de tamanho n=100 de uma $N(10, 9)$. Considere agora que (μ, σ^2) é desconhecido e assuma a seguinte distribuição *a priori conjugada* : $\mu \mid \tau \sim N(0, 100)$ e $\tau \sim Gamma(1, 1)$. [$\tau = \frac{1}{\sigma^2}$]

1) Obtenha as distribuições *a posteriori* de μ e τ e a preditiva associada a uma nova observação, assumindo independência condicional e mesma distribuição.

2) Obtenha uma amostra simulada de tamanho $M = 1000$ da distribuição *a posteriori* conjunta, considerando o seguinte algorítmo:
Para $j = 1, \dots, M$.
(i) simular τ^j de $f(\tau \mid y)$ e
(ii) simular μ^j de $f(\mu \mid \tau^j, y)$.

Modelo Normal - Exercício

3) Para cada um dos parâmetros, faça uma figura com os histogramas dos valores simulados e sobreponha a verdadeira função densidade de probabilidade. Obtenha os intervalos de probabilidade 0.9, caudas iguais, exatos e aproximados.

4) Desenhe o gráfico de contornos da distribuição *a posteriori* conjunta e sobreponha a ele os valores simulados.

5) Suponha que você não conheça a forma exata da distribuição preditiva. Proponha uma maneira de simular valores dessa distribuição usando os valores simulados em (2). Implemente esse algorítmo e simule $M = 1000$ valores dessa distribuição. Compare graficamente os valores simulados com a verdadeira função densidade. Obtenha os intervalos de probabilidade 0.9 exato e aproximado.