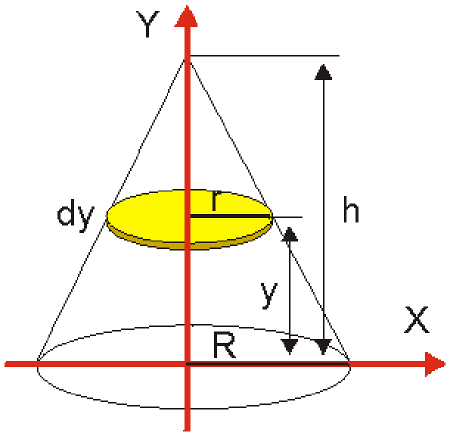
Cálculo do Centro de Massa de um cone homogêneo

Outra forma: Vamos determinar a posição do CM de um sólido de material homogêneo com a forma de um cone de revolução de altura h e raio da base R, mostrado na figura.



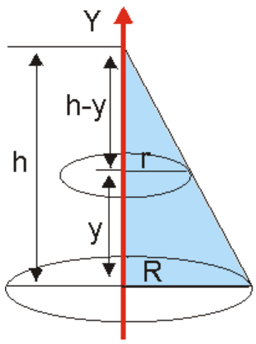
Como o sólido possui um eixo de simetria, o seu CM estará sobre o eixo, logo, é necessário apenas calcular a ordenada do CM, cujo valor é:

$$y_{CM} = \frac{\int y\, dm}{\int\, dm}$$

Inicialmente vamos calcular o raio r da faixa em função de y.

Vamos considerar os triângulos retângulos semelhantes de base r e R mostrados na figura abaixo, retirada da figura anterior.

Como os triângulos são semelhantes os seus catetos são proporcionais:



$$\frac{r}{R} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow r = R\,\left[\frac{h-y}{h}\right]$$

E o quadrado do raio é: $r^2 = R^2\,\left[\frac{h-y}{h}\right]^2 =$

$$R^2\,\left[\frac{h-y}{h}\right]^2 = R^2\,\left[\frac{h^2-2hy+y^2}{h^2}\right] = R^2\,\left[1-\frac{2y}{h}+\frac{y^2}{h^2}\right]$$

Para calcular a ordenada do CM do cone, devemos saber, baseados na geometria, que o volume V do cone é:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

O diferencial de volume é uma pequena faixa, que pode ser aproximada a um cilindro de raio da base r, altura dy, assim: $dV = \pi r^2 dy$

A ordenada do CM será calculada, então:

$$y_{CM} = \frac{\int y\, dm}{\int\, dm} = \frac{\int y\, \pi r^2 dy}{V} = \frac{\int y\, \pi R^2\,\left[1-\frac{2y}{h}+\frac{y^2}{h^2}\right]\, dy}{V}$$

$$y_{CM} = \frac{\pi R^2 \int_0^h y \quad \left[1 - \frac{2y}{h} + \frac{y^2}{h^2}\right] \quad dy}{V}$$

$$= \frac{\pi R^2 \int_0^h y\, dy - \int_0^h \frac{2y^2}{h}\ dy + \int_0^b \frac{y^3}{h^2}\ dy}{V}$$

$$y_{CM} = \frac{\pi R^2}{V}\ \left[\frac{y^2}{2} - \ \frac{2y^3}{3h} + \frac{y^4}{4h^2}\right] \Big|_0^h = \frac{\pi R^2}{\frac{\pi R^2 h}{3}}\ \left[\frac{h^2}{2} - \ \frac{2h^3}{3h} + \frac{h^4}{4h^2}\right]$$

$$y_{CM} = \frac{\pi R^2}{\frac{\pi R^2 h}{3}} \left[\frac{h^2}{2} - \ \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right] = \ \frac{\pi R^2 h^2\ \frac{6-8+3}{12}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = h\, \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{h}{4}$$