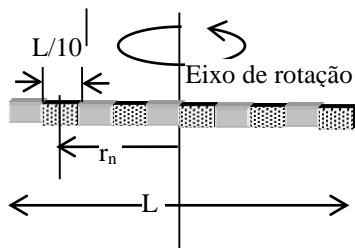


## Problema 20, lista 2.

Calcule o momento de inércia para:

- a) Uma vareta homogênea de comprimento  $L$  e massa  $M$ ; b) Um aro circular que gira em torno a um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo próprio centro; c) Um disco homogêneo em relação a o eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro; d) Um cilindro homogêneo em relação ao próprio eixo; e) Uma casca esférica delgada em relação a um diâmetro; f) Uma esfera maciça em relação a um diâmetro.



a) **Resolução na página 205 RHK 5ta ed ou 286 6ta ed.**

Supondo a vareta com um comprimento  $L$ , se a dividirmos em 10 porções, cada pedaço terá um comprimento igual  $L/10$ , e massa  $M/10$ . Se numerarmos os pedaços de esquerda a direita como 1,2, etc, cada um deles estará a uma

distância  $r_n$  do eixo de rotação.

Se considerarmos que o centro de massa do primeiro pedaço à esquerda do eixo de rotação está a uma distância  $0,5 \times L/10$

$$r_5=r_6=0,5 \cdot 0,1L=0,05L;$$

$$r_4=r_7=r_5+L/10=0,05L+0,1L=0,15L;$$

$$r_3=r_8=r_5+2L/10=0,05L+0,2L=0,25L;$$

$$r_2=r_9=r_5+3L/10=0,05L+0,3L=0,35L; \quad r_1=r_{10}=r_5+4L/10=0,05L+0,4L=0,45L.$$

Desenvolvendo a soma dos 10 pedaços:

$$I = r_1^2 \delta m_1 + r_2^2 \delta m_2 + \dots + r_{10}^2 \delta m_{10} =$$

$$(0,1M)(0,45L)^2 + (0,1M)(0,35L)^2 + (0,1M)(0,25L)^2 + (0,1M)(0,15L)^2 +$$

$$+ (0,1M)(0,05L)^2 + \dots$$

,iguais termos para o lado direito, então:  $I = 0,0825ML^2$ . Este resultado pode ser re-feito dividindo a barra em 20, 30 ou  $n$  pedaços. Como já sabemos integrar, vamos imaginar que cada pedaço corresponde a um diferencial de massa  $dm$ .

Dessa maneira:  $I = \lim_{\delta m_n \rightarrow 0} \sum r_n^2 \delta m_n = \int r^2 dm$  A integração é efetuada sobre todo o volume

do objeto mas podemos efetuar algumas simplificações.

Sabendo que a densidade,  $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V$ . Se a vareta gira em torno a um eixo

perpendicular, como nosso caso, escolhendo um elemento de volume arbitrário de massa  $dm$ , posicionado a uma distância  $x$  do eixo, a massa desse elemento é igual a massa específica (massa por unidade de volume)  $\rho$ , multiplicada pelo elemento de volume  $dV$ ,  $dm = \rho dV$ . O elemento de volume é igual a área multiplicada pela sua espessura  $dx$ :

$dV = A dx \Rightarrow dm = \rho dV = \rho A dx$ . O volume da vareta pode ser interpretado como o produto da área pelo comprimento:  $V=A \cdot L$  desta maneira a expressão anterior fica:

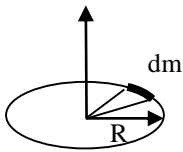
$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int x^2 \frac{M}{AL} A dx = \frac{M}{L} \int x^2 dx,$$

Como  $x = 0$  no meio da vareta, os limites de integração são de  $x = -L/2$  a  $x = +L/2$ . Desta maneira a inércia rotacional é:

$$I = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{L} \frac{L^3}{8 \cdot 3} - \left( -\frac{M}{L} \frac{L^3}{8 \cdot 3} \right) = 2 \frac{M}{L} \frac{L^3}{24} = \frac{M}{L} \frac{L^2}{12}.$$

A inércia rotacional  $I$  para a extremidade da vareta pode ser calculada pelo teorema dos eixos paralelos ou diretamente alterando os limites da integral.

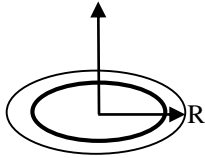
b) Um aro circular que gira em torno a um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo próprio centro.



Podemos dizer que cada elemento de massa do anel está a uma distância R do eixo de rotação, então:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M .$$

c) Um disco homogêneo em relação a o eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro.



No caso de um disco homogêneo, toda a massa está distribuída entre  $r = 0$  e  $r = R$  e não concentrada em  $r = R$  como no caso anterior. Cada elemento de massa  $dm$  é um anel infinitesimal de raio  $r$  e espessura  $dr$ .

O momento de inércia desse elemento de massa é  $r^2 dm$  e a área de cada elemento de massa é  $dA = 2\pi r dr$ , definindo a densidade por unidade de superfície  $\rho =$  (massa por unidade de superfície)  $= M/A$  a massa do elemento  $M = \rho A$ , mas  $A = \pi R^2$

assim:  $dm = \rho dA = \frac{M}{A} dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$ , substituindo na fórmula:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{M}{A} 2\pi r dr = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = 2 \frac{M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{M}{R^2} \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

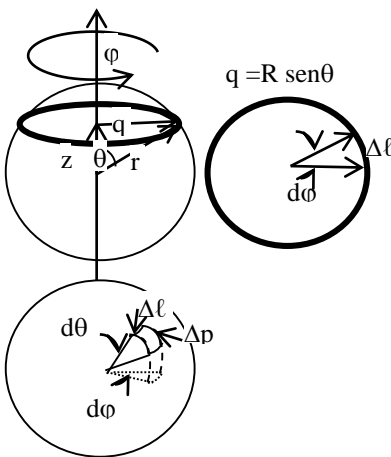
d) Um cilindro homogêneo em relação ao próprio eixo.

Imaginemos que o cilindro seja constituído por discos de massa  $dm$  e momento de

inércia  $I_{disco} = \frac{R^2}{2} dm$  deduzido no caso anterior.

O momento de inércia será a integral desse elemento:

$$I = \int \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{1}{2} R^2 \int dm = \frac{1}{2} MR^2 .$$



e) Uma casca esférica delgada em relação a um diâmetro.

Consideraremos um elemento de massa  $dm$ , que gira em relação a um eixo de rotação. Cada elemento de massa  $dm$  variará em  $\varphi$  de  $\varphi = 0$  até  $\varphi = 2\pi$ , formando um anel, e a distância  $q$  desse elemento de massa até o eixo de rotação variará de  $q = 0$  até  $q = R$ ; mas

$$q = R \sin \theta \quad (1)$$

portanto a variável de integração passa a ser  $\theta$  que varia de  $0$  a  $\pi$ .

Se densidade de massa por unidade de área é:

$$\rho = \frac{M}{A} ; \text{ sendo } A = 4\pi R^2 \text{ a massa da casca}$$

esférica será:  $M = \rho A$  e o diferencial de massa,  $dm = \rho dA$  pode ser representada pela pequena área da fig. é  $\rho dA = \rho dp \times dl$ . Pela definição de ângulo em radianos

$\theta = \frac{S}{R}$  de onde  $\Delta\theta = \frac{\text{arco}}{\text{raio}} = \frac{\Delta p}{R} \Rightarrow \Delta p = R\Delta\theta \Rightarrow dp = R d\theta$ . Por outro lado,  $\varphi = \frac{S}{R}$  como S equivale a longitude da circunferência de raio q, quando  $\varphi$  fecha o círculo,

podemos fazer de  $S = \ell$  de maneira que  $\Delta\varphi = \frac{\Delta\ell}{q} = \frac{\Delta\ell}{R \sin\theta} \Rightarrow \Delta\ell = R \sin\theta \Delta\varphi$  e

$$d\ell = R \sin\theta d\varphi. \text{ Assim, } dm = \rho dA = \rho dp \times d\ell = \rho R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Assim, como  $I = \int q^2 dm$ , substituindo pelas expressões acima e rearranjando:

$$I = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2 \sin^2\theta R^2 \sin\theta d\theta = \rho 2\pi R^4 \int_0^{\pi} \sin^2\theta d(-\cos\theta) =$$

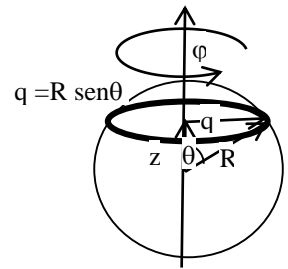
chamando  $x = \cos\theta \rightarrow dx = d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$ ;

por outro lado como  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ .

Onde podemos mudar os limites da integral para mudar o sinal da variável de integração, que faz com que os limites da integração sejam -1 e 1 pelos valores do cos  $\theta$  para os limites da última expressão.

Substituindo estas expressões na equação acima:

$$\begin{aligned} I &= \rho 2\pi R^4 \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) = \rho 2\pi R^4 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \\ &= \rho 2\pi R^4 \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \rho 2\pi R^4 \left[ 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 - \frac{(-1)}{3} \right) \right] = \\ &= \rho 2\pi R^4 \left( \frac{2}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) \right) = \rho 2\pi R^4 \frac{4}{3} = \frac{2\pi R^4 \frac{4}{3} M}{4\pi R^2} = \frac{2}{3} MR^2 \end{aligned}$$



OUTRA FORMA, integrando anéis.

$$I_{aro} = R^2 M,$$

$$I_{esf} = \int dI_{aro} = \int q^2 dm = \int R^2 \sin^2\theta dm$$

$$q = R \sin\theta$$

$$\rho = \frac{M}{A} \Rightarrow M = \rho A \text{ e } dm = \rho dA$$

A área pode ser considerada como o comprimento do anel de raio q e espessura dq, então:

$$dm = \rho 2\pi q dS$$

Pela definição de ângulo em radianos,  $\theta = \frac{\text{arco}}{\text{Raio}}$  e

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{R} \Rightarrow \Delta S = R\Delta\theta \Rightarrow dS = R d\theta.$$

Então, a inércia rotacional da esfera fica:

$$I_{esf} = R^2 \int \sin^2 \theta \rho 2\pi R \sin \theta dS = R^3 \rho 2\pi \int \sin^2 \theta R \sin \theta dS = R^3 \rho 2\pi R \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta =$$

$$= R^4 \rho 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \theta d(-\cos \theta)$$

Idem acima, a mudança de variável de integração e de limites da integral...

Se  $\cos \theta = x \rightarrow d(\cos \theta) = dx$ ; por outro lado como

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta.$$

Com a conseqüente mudança nos limites de integração já que  $-\cos \theta$  varia de -1 a 1.

Devemos então mudar o sinal do coseno e trocar os limites de integração. Substituindo estas expressões na equação acima:

$$I_{esf} = R^4 \rho 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = R^4 \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{MR^2}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{MR^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \left( -1 - \frac{(-1)}{3} \right) \right] = \frac{MR^2}{2} 2 \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} MR^2$$

f) Uma esfera maciça em relação a um diâmetro.

$$\left. \begin{aligned} \rho = M/V \rightarrow M = \rho V \quad \text{área do disco} = \pi q^2 \\ dm = \rho dV \quad \text{altura do disco} = dz \end{aligned} \right\} dV = \pi q^2 dz$$

volume total da esfera =  $\frac{4}{3} \pi R^3$

substituindo,  $dm = \rho \pi q^2 dz$

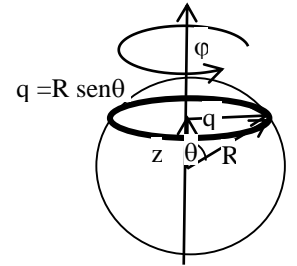
Se  $I = \int r^2 dm$  vemos que a integral envolve duas variáveis,  $q$  e  $z$ .

Fazendo  $I = \int_V dI$  onde  $dI$  é a inércia rotacional do disco, considerando um disco com uma massa  $dm$ ,  $I_{\text{disco}} =$

$$\frac{1}{2} M r^2 \Rightarrow dI = \text{inércia rotacional de um disco de raio } q = \frac{1}{2} dm q^2$$

Nos valendo da simetria dos dois hemisférios,

$$I = 2 \int_{\text{hemisfério}} dI = 2 \int_{\text{hemisfério}} \frac{1}{2} q^2 dm = \int_{\text{hemisfério}} q^2 \rho \pi q^2 dz = \rho \pi \int_{\text{hemisfério}} (q^2)^2 dz$$



Nos valendo da igualdade:  $q^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow q^2 = R^2 - z^2$ , substituindo na integral,

$$\begin{aligned} I &= \rho \pi \int_0^R (q^2)^2 dz = \frac{3M\pi}{4\pi R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3M\pi}{4\pi R^3} \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz = \\ &= \frac{3M\pi}{4\pi R^3} \left( R^4 z + \frac{z^5}{5} - \frac{2R^2 z^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{3M\pi}{4\pi R^3} \left( R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3} \right) = \frac{3M\pi}{4\pi R^3} \frac{(15R^5 + 3R^5 - 10R^5)}{15} \\ &= \frac{3M}{4R^3} \frac{8R^5}{15} = \frac{2MR^2}{5} \end{aligned}$$