

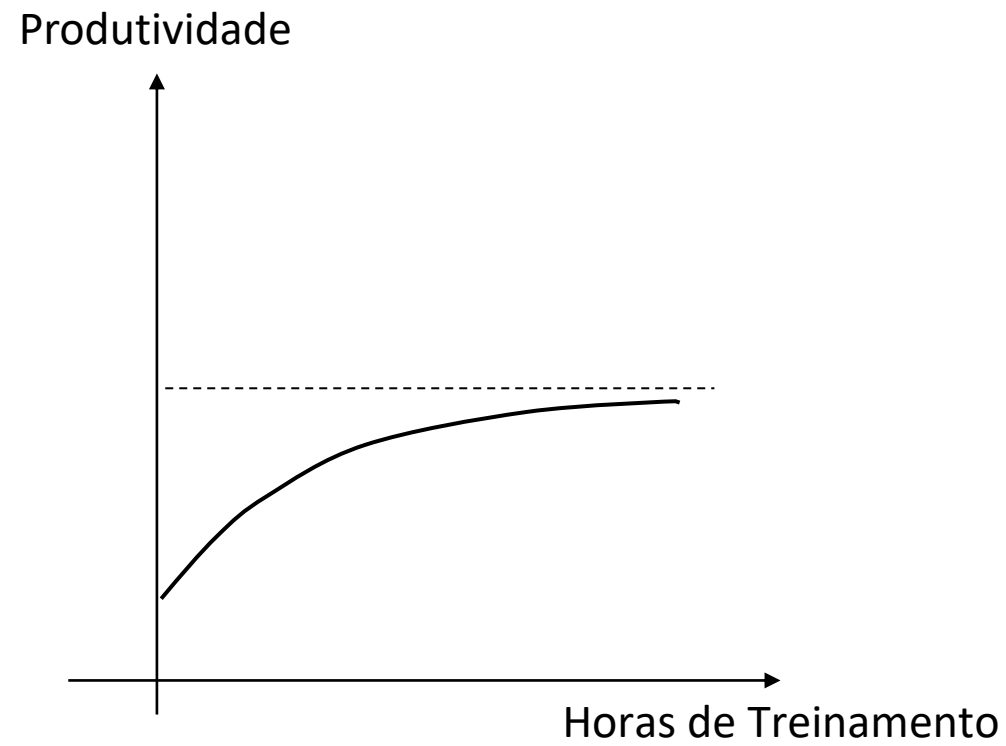
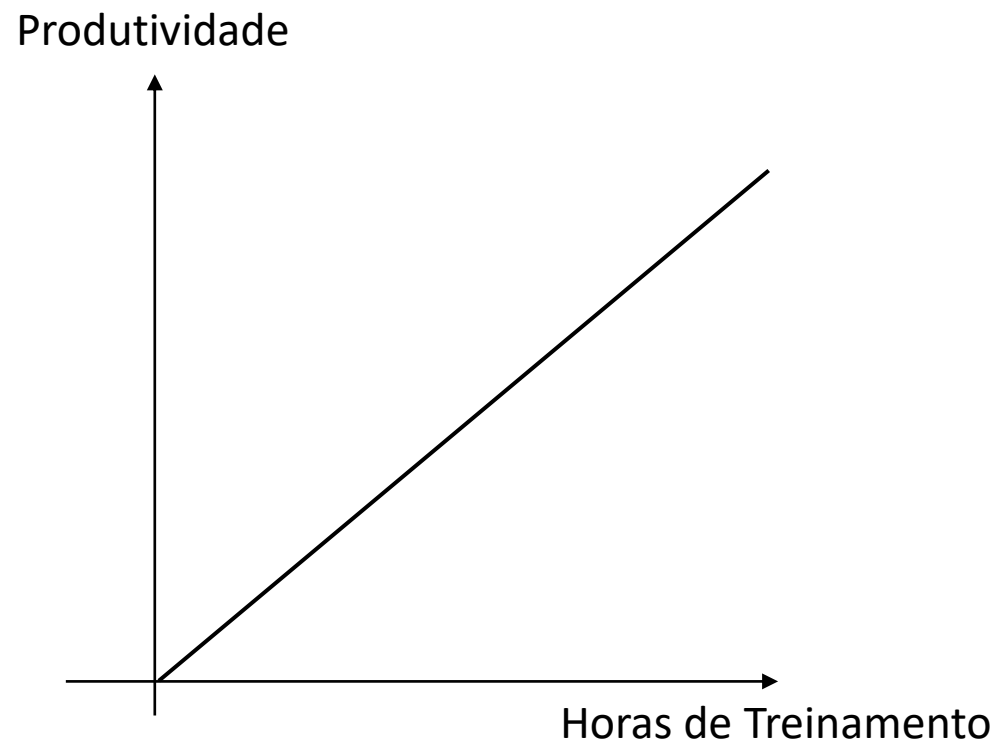
Apresentação

Prólogo

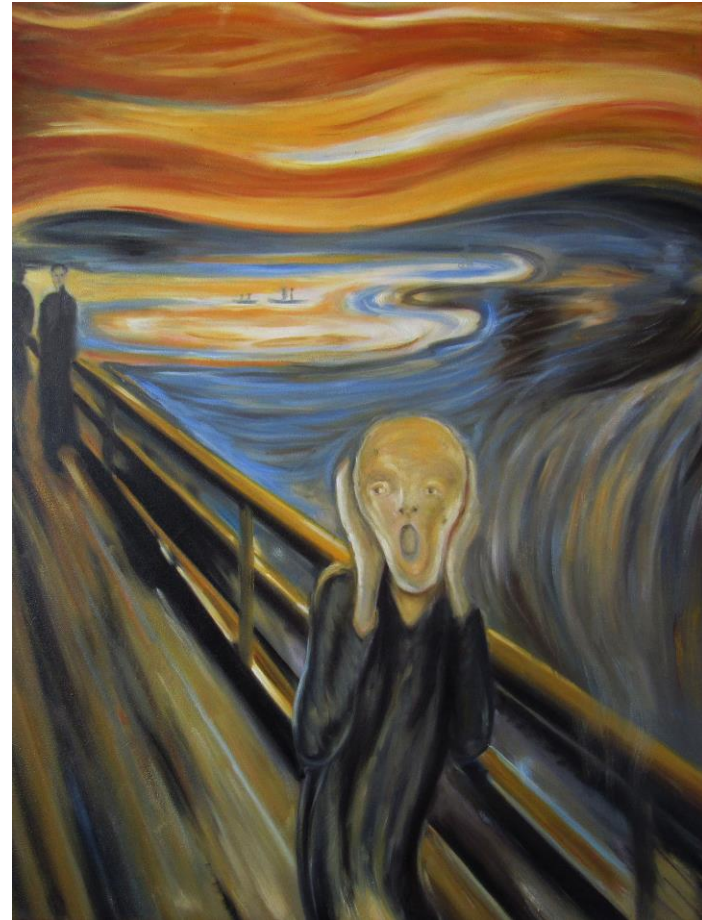
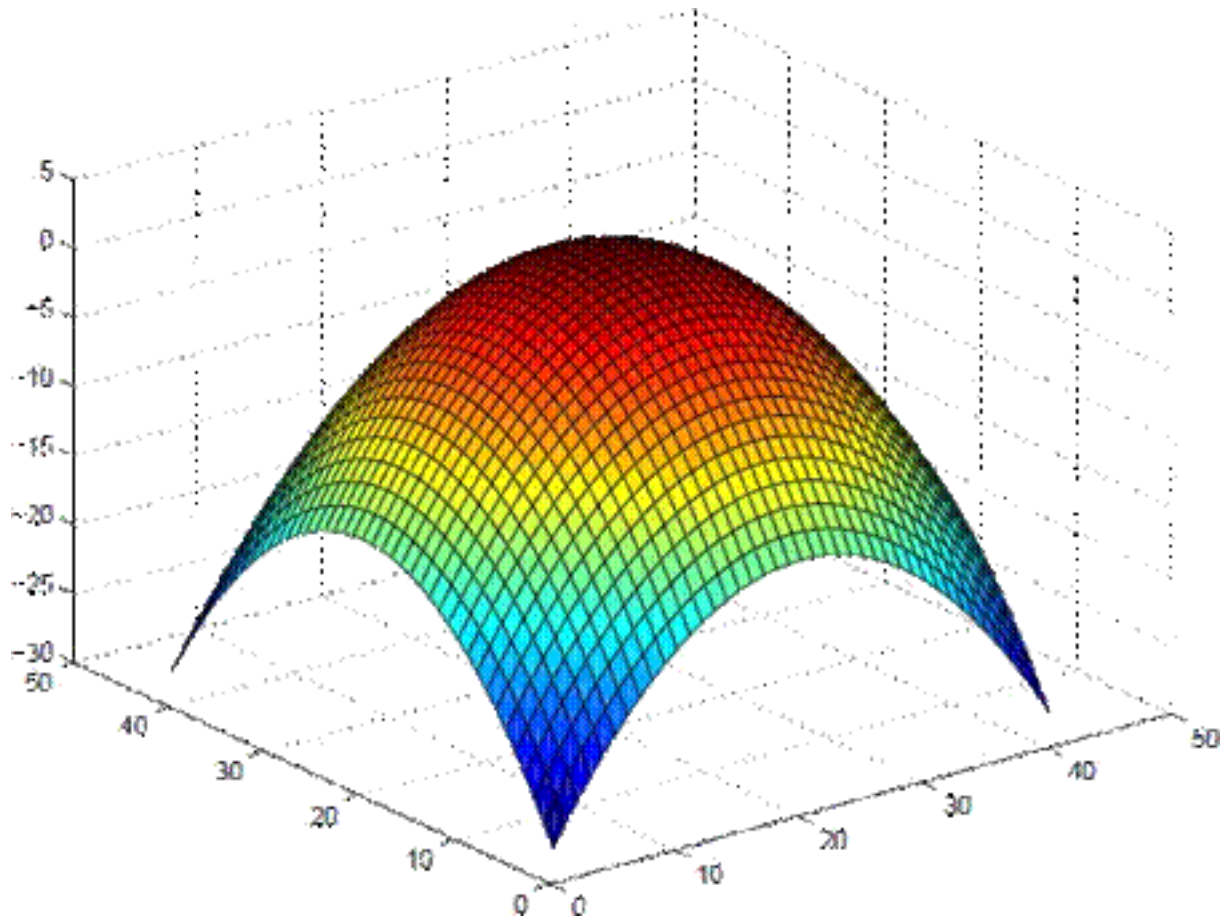
- ***CAUSALIDADE***
- Como aumentar a produtividade de uma empresa?
 - Seleção
 - Automação
 - Treinamento
 - Terceirização
 - Etc



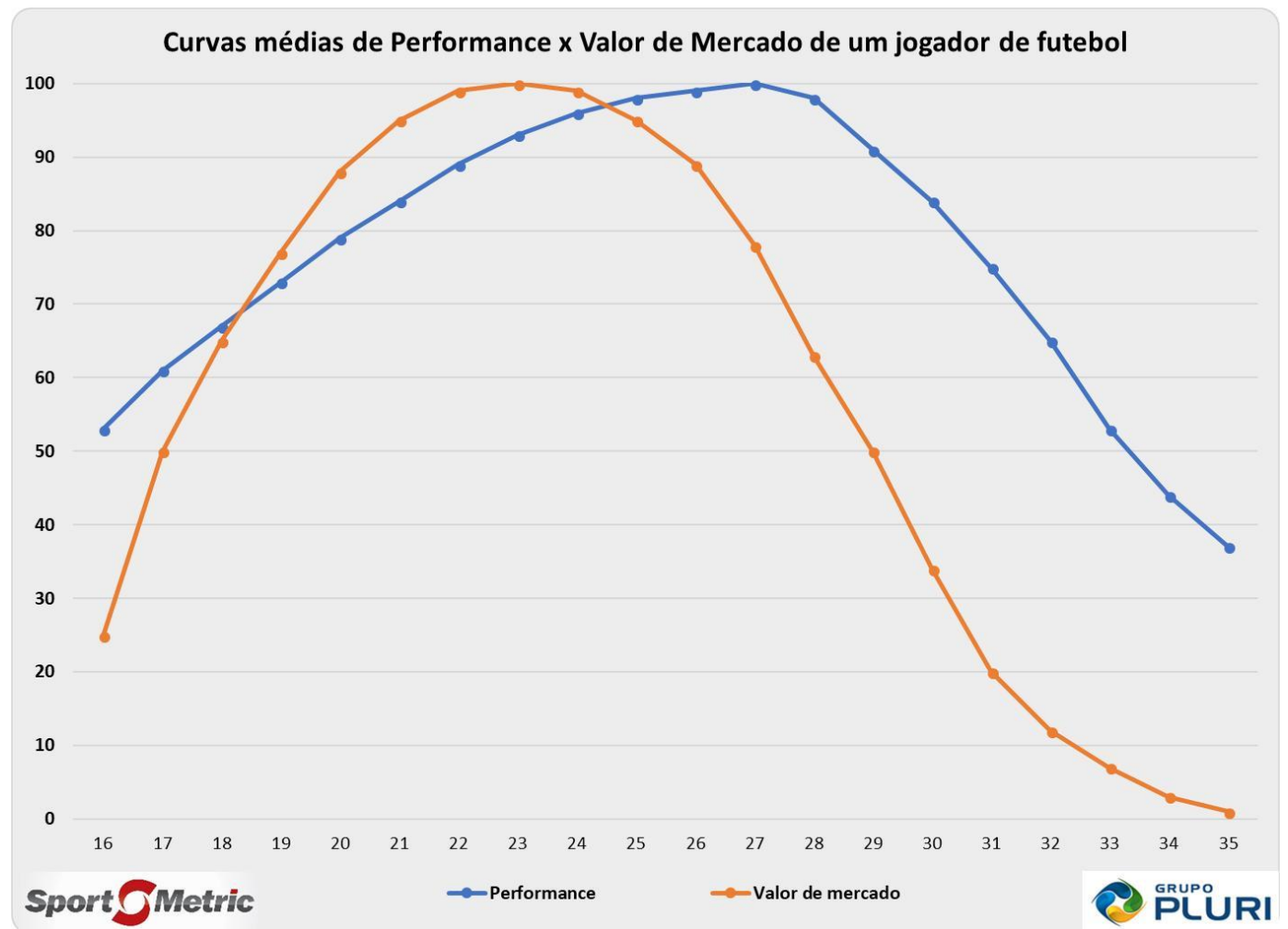
Prólogo



Prólogo



Coisa de acadêmico...



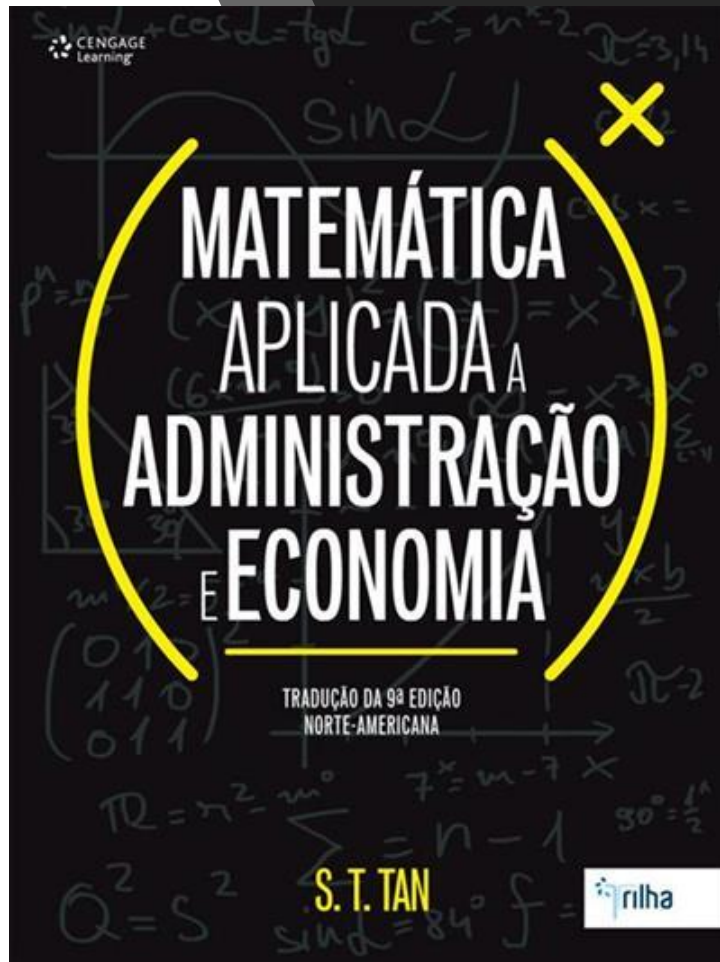
RCC-0218

- Cálculo a uma variável
- O que veremos nesse curso?
 - **FUNÇÕES**
 - Limites
 - Taxas de variação
 - Análise gráfica de funções
 - Cálculo de áreas determinadas por gráficos de funções

RCC-0218

- O que precisamos ter sob domínio?
 - Conjuntos numéricos e suas relações
 - Álgebra de polinômios
 - Equações e inequações
 - Potenciação/Radiação/Fatoração
 - Exponenciais e logaritmos

RCC-0218



- Aulas expositivas e exercícios em sala (muitos)
- Livro:
 - TAN, S. T. **Matemática aplicada à administração e economia** (tradução da 9ª edição norte-americana). São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- Ferramentas sugeridas para auxiliar nos estudos
 - Kahn Academy
 - Me Salva
 - Matematica Rio
 - Prof. Ferreto
 - Etc

RCC-0218

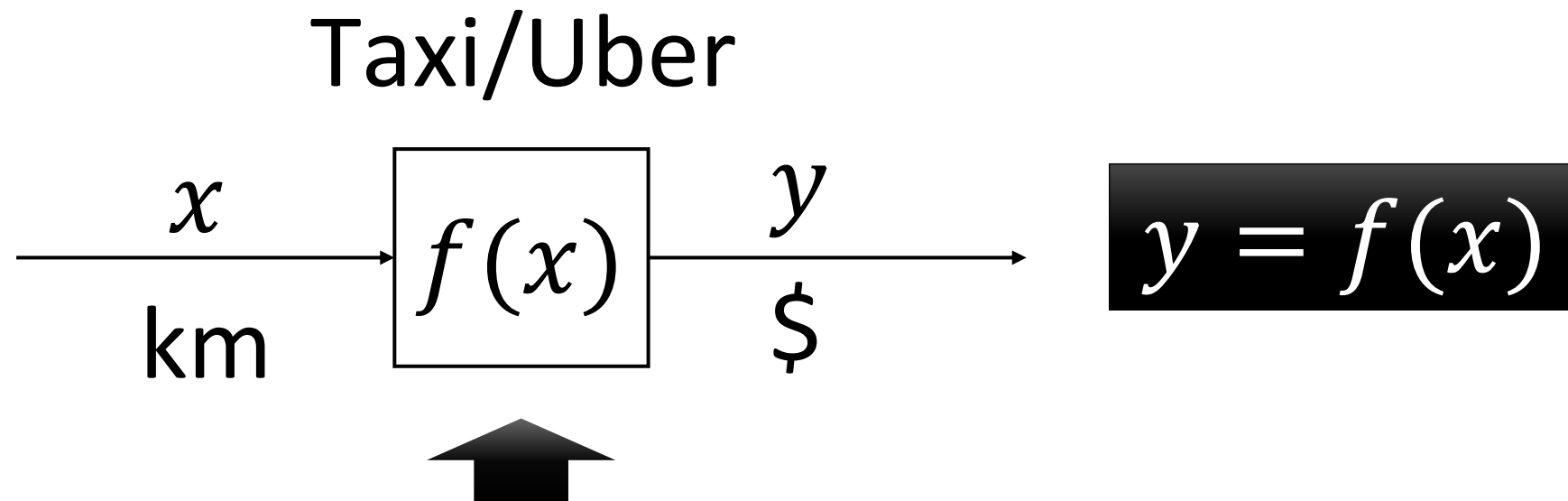
- Monitoria com Matheus Pinheiro
- Durante março
 - Sala 7 B1
 - 17:00 às 18:00



RCC-0218

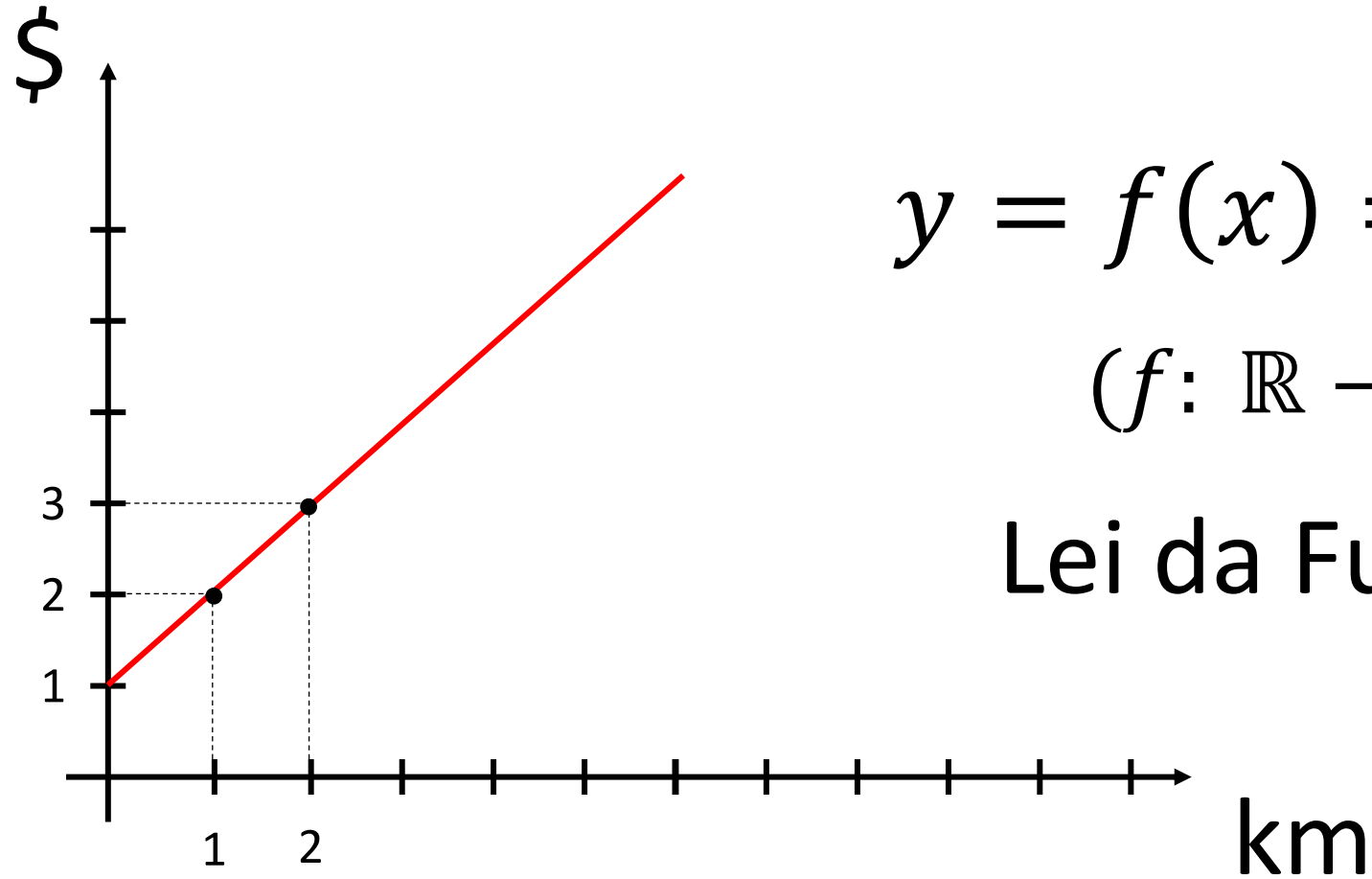
- Datas das provas:
 - P1 – 05/05 (40%)
 - P2 – 02/07 (60%)
- Reaval
 - Julho - sem data definida
 - Presença $\geq 70\%$
 - Média do semestre ≥ 3

Conceitos Iniciais



Lei ou regra que transforma
ordenadamente uma coisa em
outra

Conceitos Iniciais



$$y = f(x) = x + 1$$

$$(f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$

Lei da Função

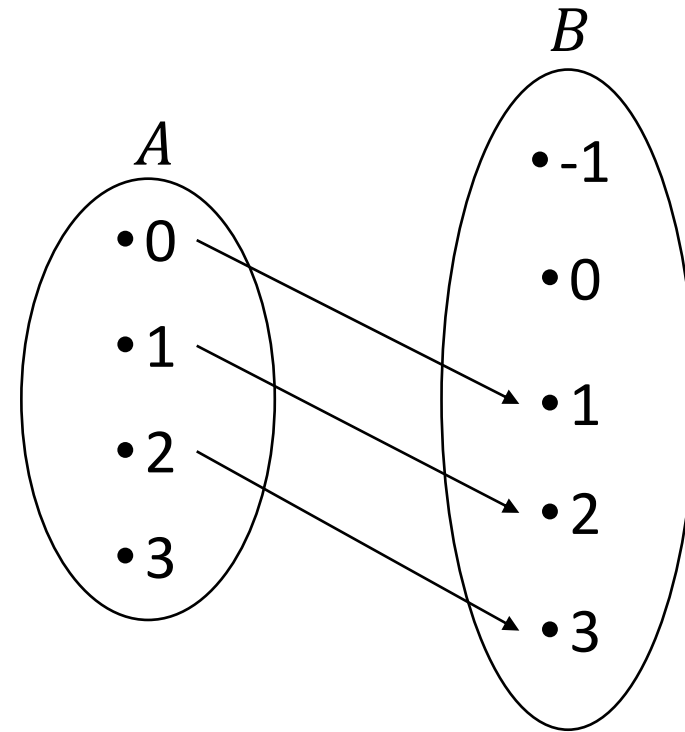
Relações entre Conjuntos

- Dados dois conjuntos...

$$A = \{0,1,2,3\}$$

$$B = \{-1,0,1,2,3\}$$

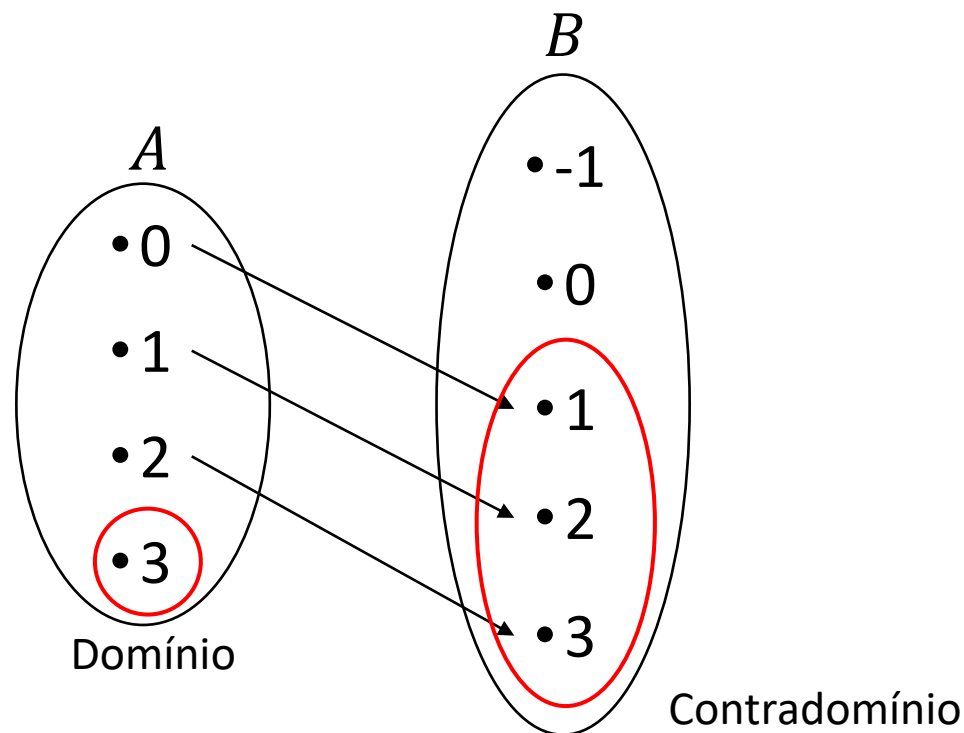
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$



- Associe cada elemento de A ao seu sucessor imediato em B
- Formalmente: $R = \{(x, y) \in A \times B | y = x + 1\}$

Conceitos Iniciais

- **Funções são um tipo particular de relação:**
 - Regra que associa **cada** elemento do conjunto A a um **único** elemento do conjunto B
 - Temos uma função em $A \times B$?
- O conjunto "origem" é o **Domínio**
- O conjunto "destino" é o **Contradomínio**
- Os elementos do Contradomínio com equivalentes no Domínio formam o conjunto **Imagem**
- **No caso, um dos elementos do domínio não tem imagem...**



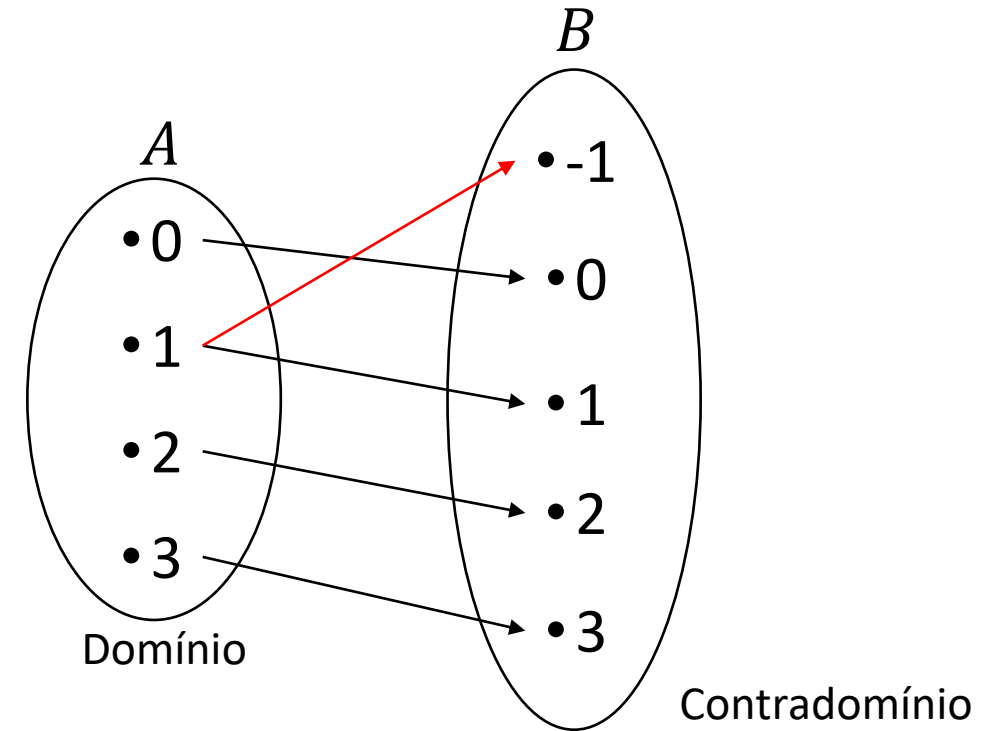
FUNÇÃO!?!?

Funções: Conceitos Iniciais

- Usando o mesmo conjunto...

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$$

- Cada elemento do Domínio só pode ter uma única Imagem
- Só poder sair uma única flecha de cada elemento do Domínio!!!!
- Logo, a **relação** proposta não é uma função
- Em suma... Nem toda relação entre conjuntos é uma função!!!!!!



Funções: Conceitos Iniciais

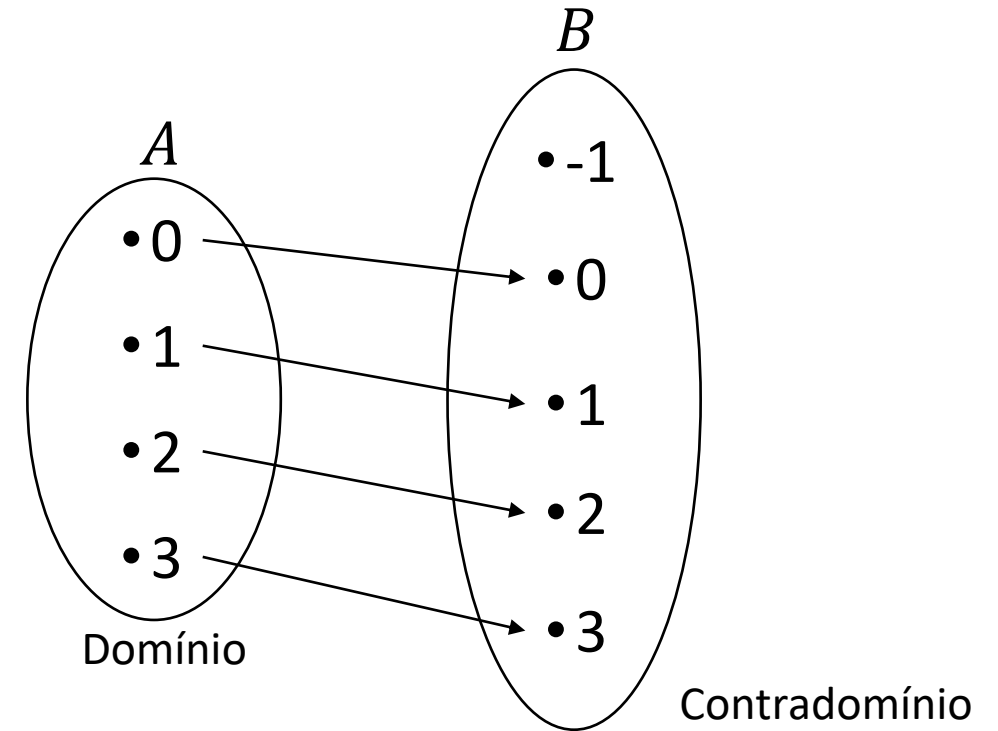
- Usando o mesmo conjunto...

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$$

$$D = A$$

$$CD = B$$

$$Im = \{0, 1, 2, 3\}$$



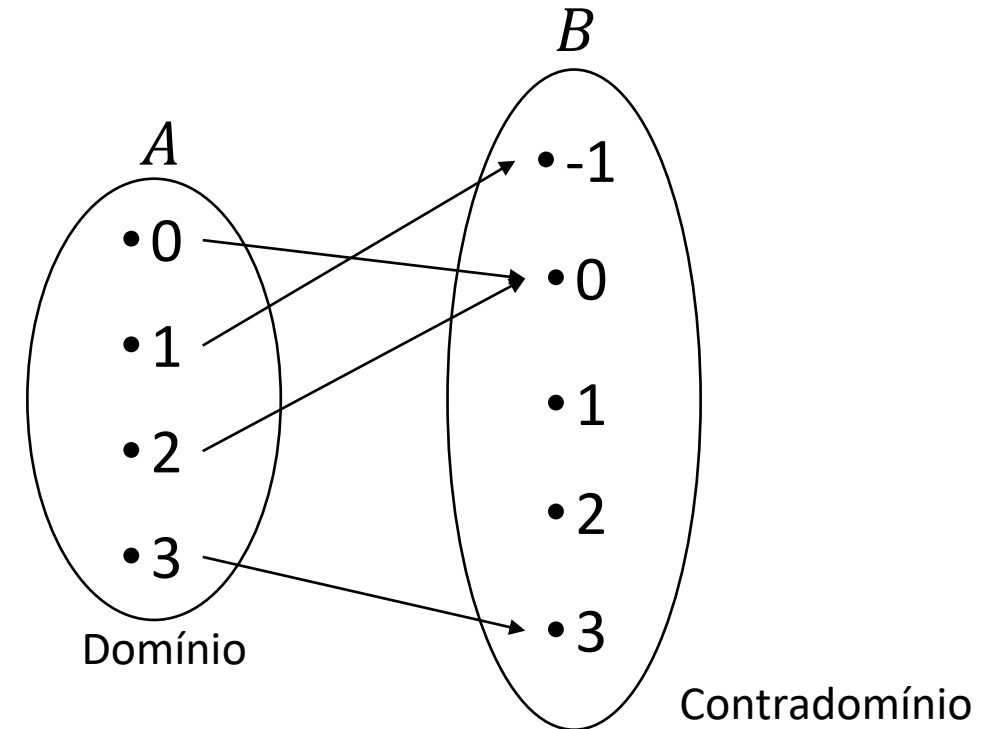
Temos uma função aqui!!!

Funções: Conceitos Iniciais

- Usando o mesmo conjunto...

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 - 2x\}$$

x	$y = x^2 - 2x$
0	0
1	-1
2	0
3	3



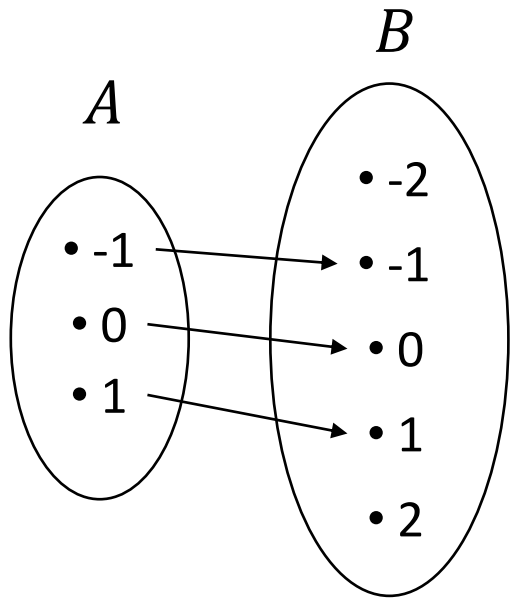
Aqui também!!!

Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

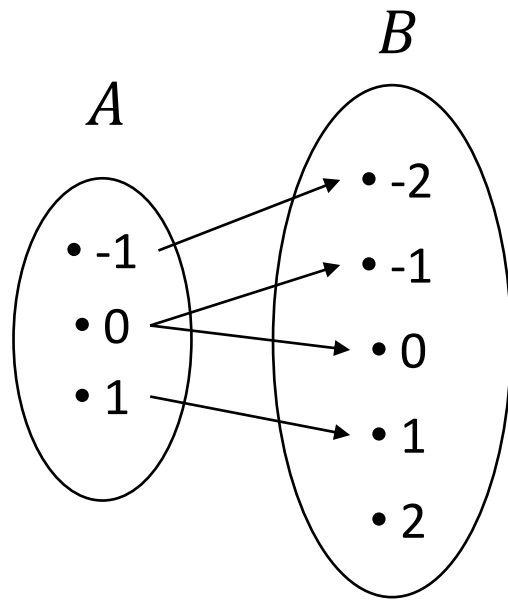
- Em resumo...
- Se x e y estão relacionados pela função $y = f(x)$...
 - Conjunto de todas as entradas **permitidas** (x) é chamado “domínio de $f(x)$ ”
 - O conjunto de todas as saídas (y) que **resultam** quando x varia sobre o domínio é denominado “imagem de $f(x)$ ”
 - A imagem é um subconjunto do Contra-Domínio

Funções

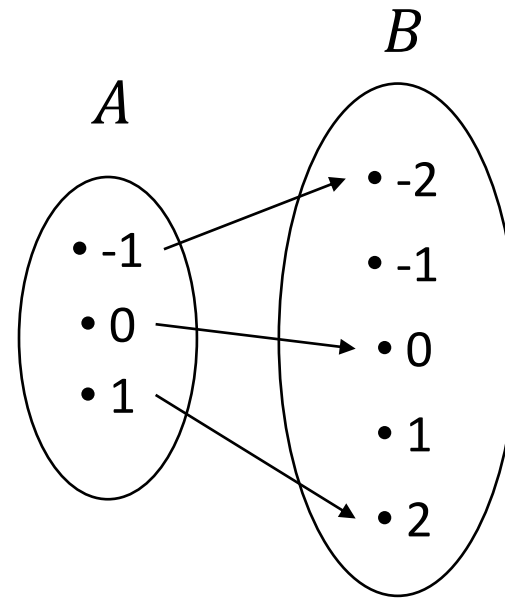
- Indique a lei de formação das funções abaixo, se é que são funções...



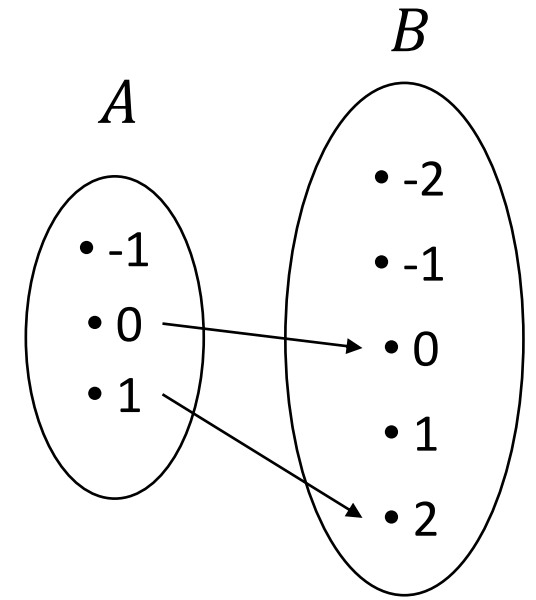
$$f(x) = x$$



Não é função



$$f(x) = 2x$$



Não é função

Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

- A própria fórmula pode impor restrições ao domínio
 - Por exemplo, se $y = \frac{1}{x}$... $x = 0$ não é uma entrada válida
- **Também aspectos físicos ou geométricos podem impor restrições sobre as entradas permissíveis de uma função**
 - Se y é o volume de um cubo perfeito, tem-se a função $y = x^3$
 - Os comprimentos devem ser números não negativos ($x \geq 0$)
- Não havendo restrições, subentende-se que o domínio da função é todo o conjunto \mathbb{R}
 - Ex.: funções polinomiais do tipo $y = x^2$, $y = x^3$, e assim por diante

Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

- Encontre o domínio natural de

- $f(x) = x^3$

- $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

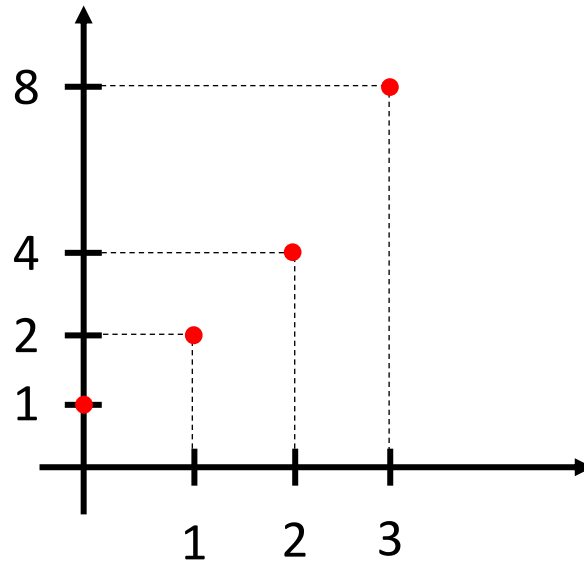
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}}$



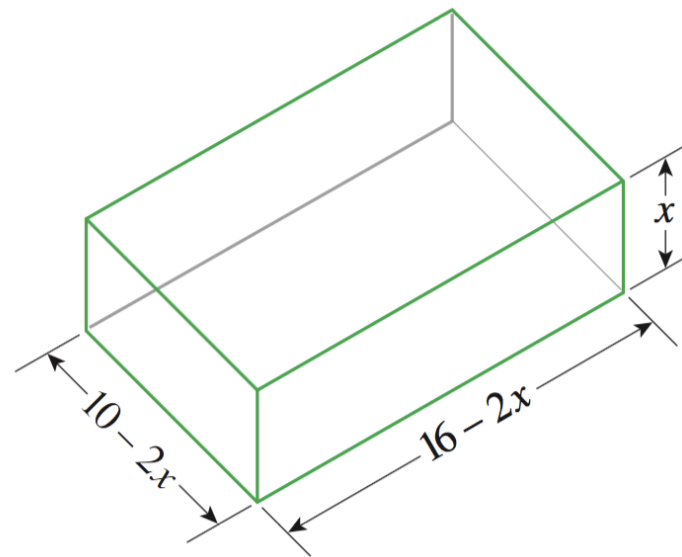
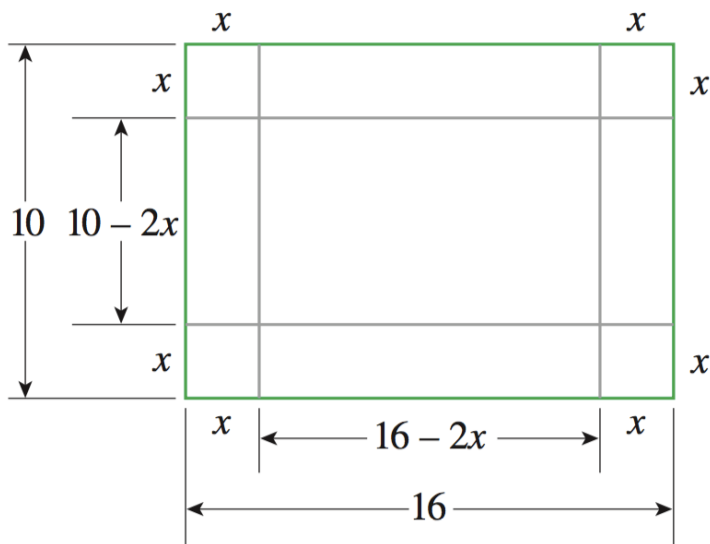
Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

- Encontre a imagem de
 - $f(x) = 3x + 2$
 - $f(x) = x^2$
- Determine o domínio, imagem e a lei da função...



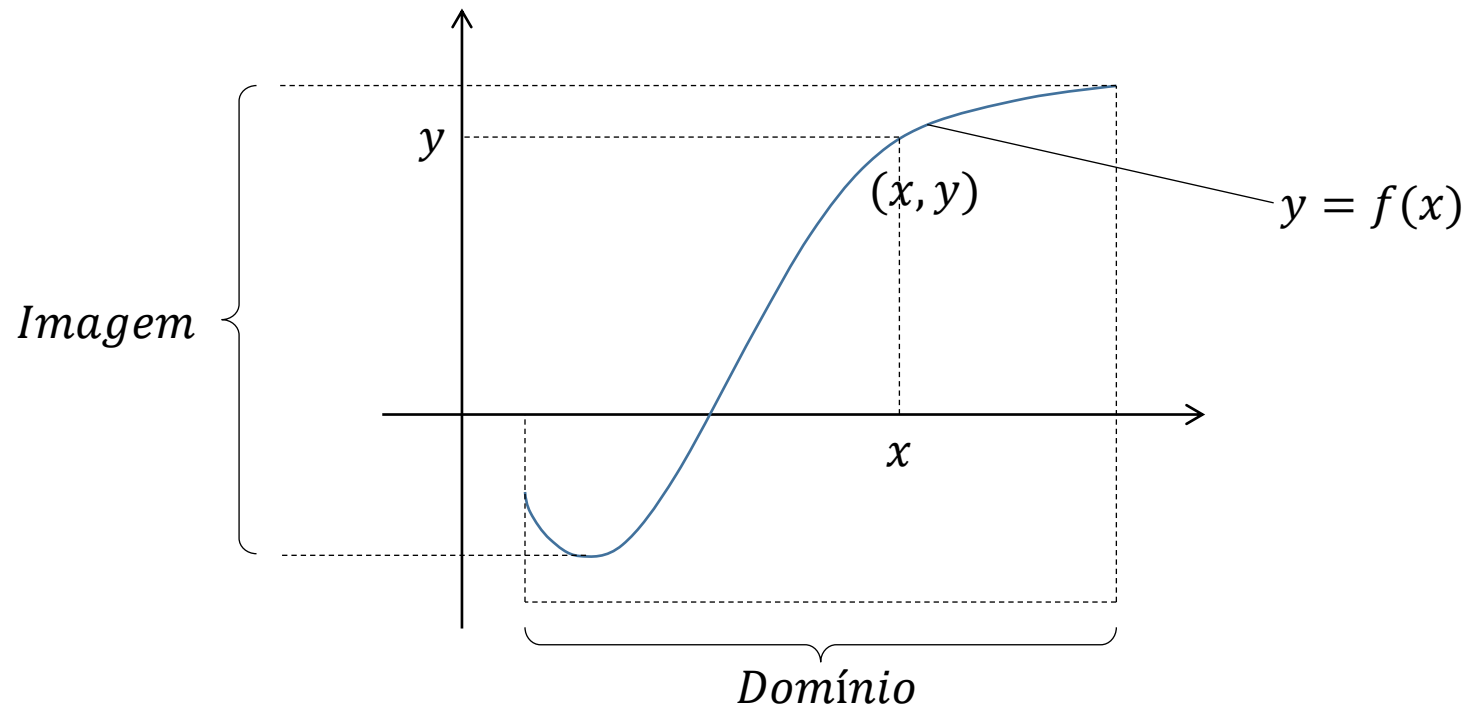
Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

- Desejamos construir uma caixa com uma folha retangular de 16×10 recortando quadrados de x por x das extremidades desta folha.
 - Desenvolva a expressão que representa o volume da caixa
 - Qual é o domínio desta função?



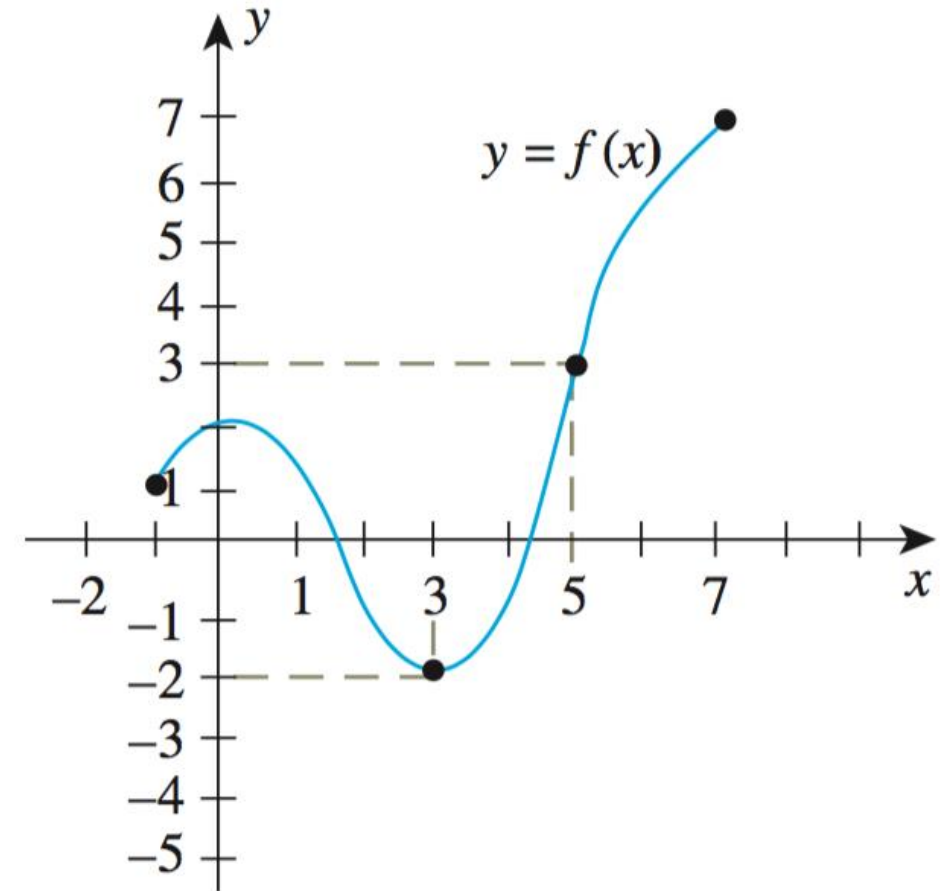
Gráficos de Funções

- Conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tal que x está no domínio da função e $y = f(x)$



Gráficos de Funções

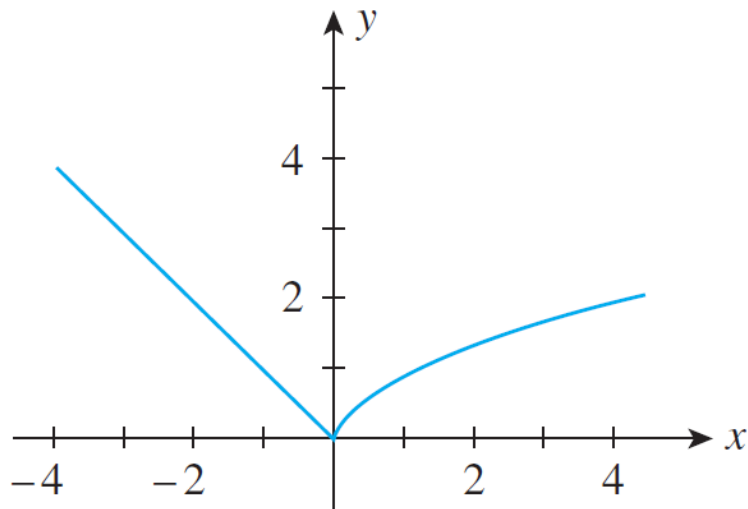
- Determine $f(3)$ e $f(5)$
- Determine domínio e imagem
- Agora esboce o gráfico da função determinada por $f(x) = x^2 + 1$.
- Indique o conjunto imagem



Gráficos de Funções

- Agora, esboce o gráfico da função

- $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$



Funções Definidas por Partes

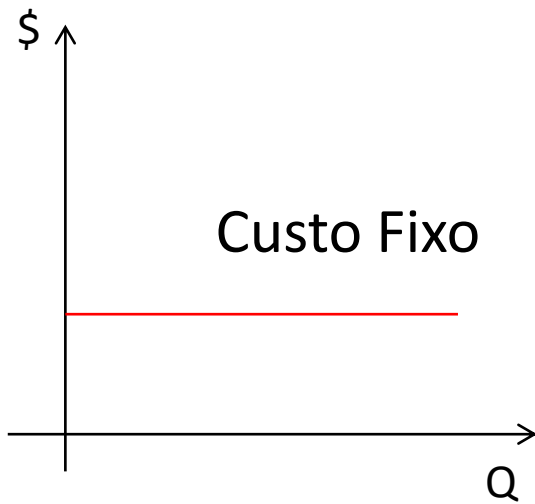
- Salário fixo mais comissão: um vendedor recebe salário fixo de \$1.000 se vender até 50 unidades
- Acima de 50 unidades, ele recebe os mesmos \$1.000 acrescidos de uma comissão de \$3,00/unidade
- Formule a função e esboce seu gráfico

Álgebra de Funções

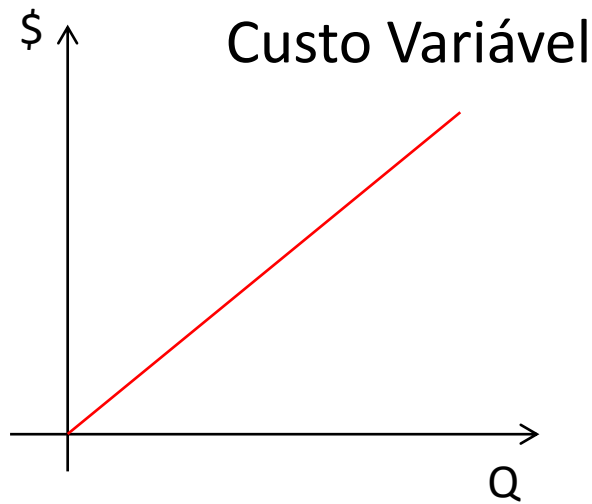
- Funções são, muitas vezes, a composição de funções mais simples
- $f(x) = x^2 + 1$ pode ser entendida como soma de duas funções
- Podemos ter...
 - $(f + g)(x)$
 - $(f - g)(x)$
 - $(f \cdot g)(x)$
 - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ (com $g(x) \neq 0$)

Álgebra de Funções

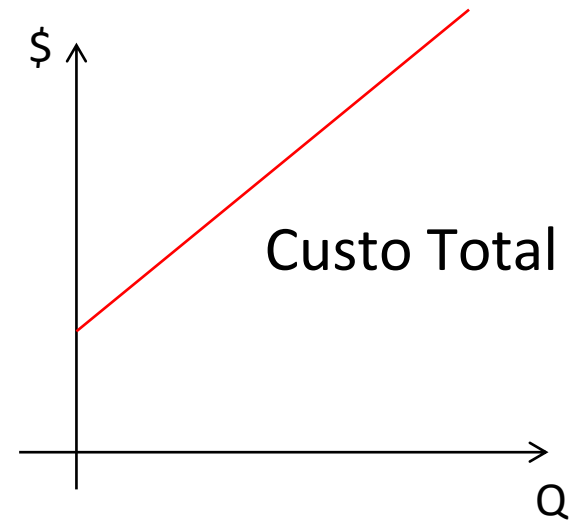
- Exemplo clássico
 - Custos fixos e variáveis



$$f(x) = CF$$



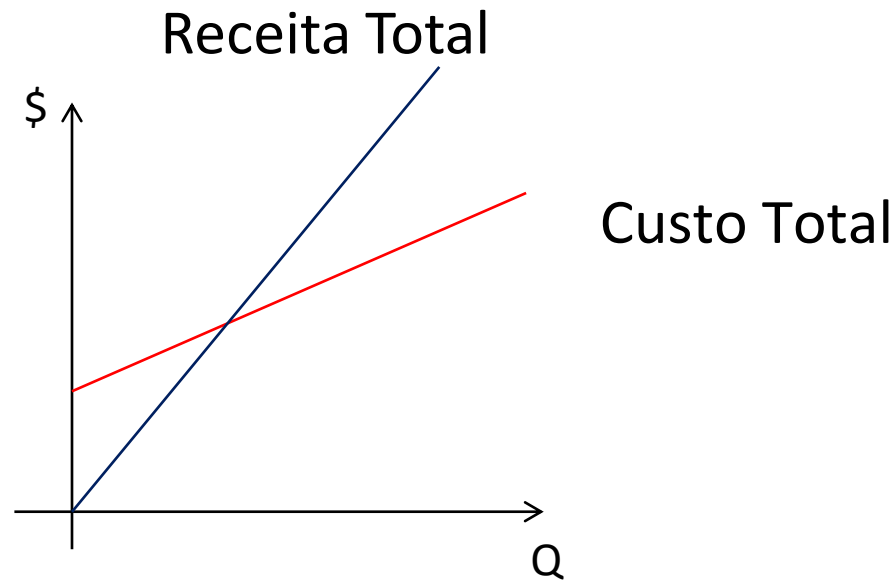
$$g(x) = CV_u \times Q$$



$$(f + g)(x) = CF + (CV_{un} \times Q)$$

Álgebra de Funções

- Exemplo clássico
 - Podemos ter ainda...



$$(f - g)(x) = L(x)$$

Álgebra de Funções

- Exemplo aplicado

- $CF = 10.000/mês$

- $CV = -0,0001x^2 + 10x$ ($0 \leq x \leq 40.000$)

- Determine a função custo total

- Suponha que a função receita dada por $R(x) = -0,0005x^2 + 20x$ ($0 \leq x \leq 40.000$)

- Determine a função lucro

- Apure o lucro para uma produção de 10.000 unidades/mês

- Apure o lucro para uma produção de 50.000 unidades/mês

Composição de Funções

- Alguns problemas reais:
 - Apurar a quantidade de CO_2 em um determinado período do dia, dada a quantidade de carros em circulação
 - *$\text{CO}_2(\# \text{ carros } (\text{horário}))$*
 - A quantidade de pessoas empregadas, dado o número de lançamentos imobiliários no estado efetuados por causa do MCMV
 - *Desemprego($\# \text{ lançamentos } (\$ \text{ destinado ao MCMV})$)*
 - Um modelo que relacionasse esforço, produtividade e resultado financeiro
 - *Resultado($\text{produtividade}(\text{esforço})$)*

Composição de Funções

- Sejam duas funções...

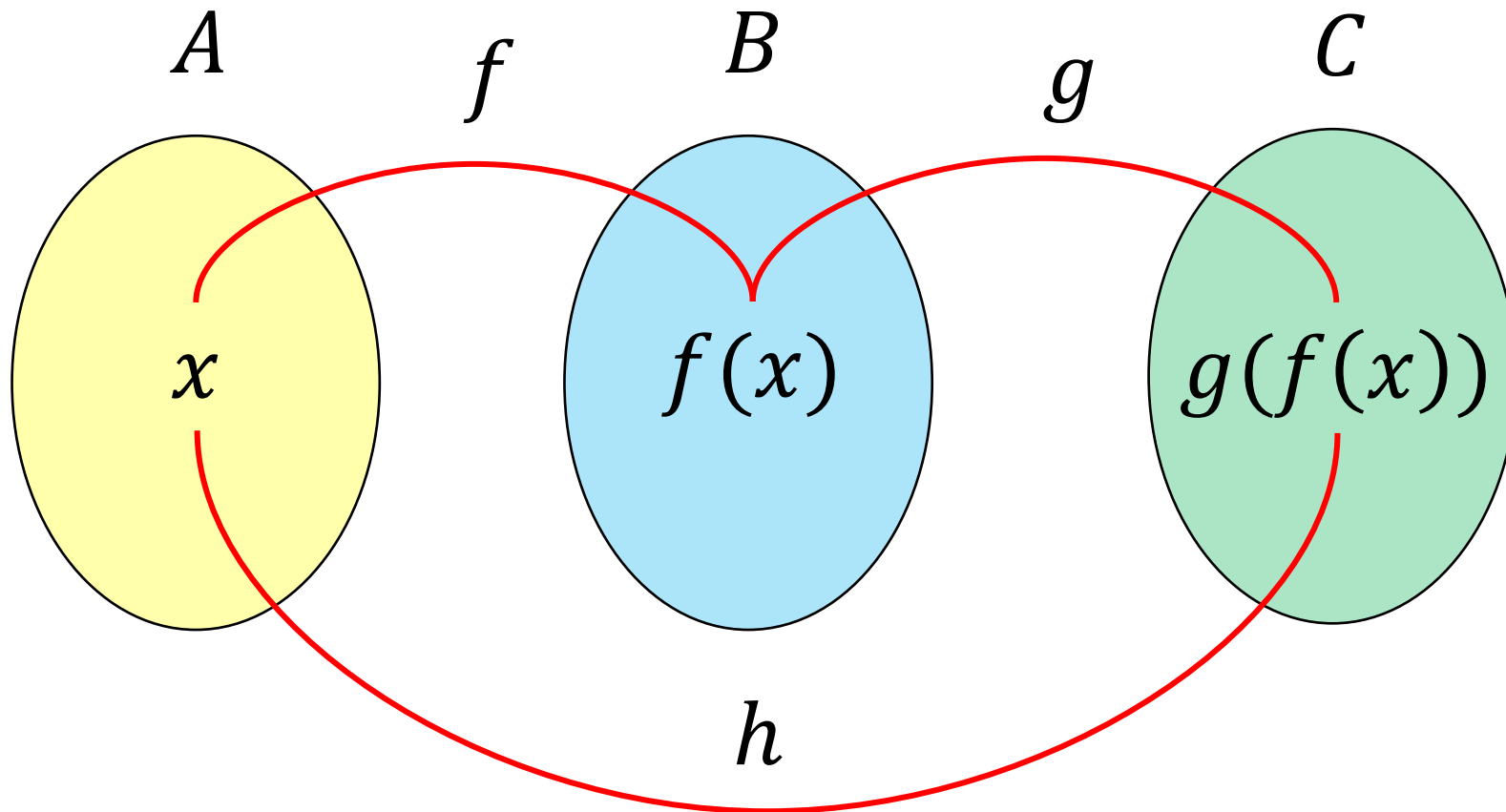
$$\bullet \quad f: A \rightarrow \mathbf{B} \text{ e } f: \mathbf{B} \rightarrow C$$

Contradomínio

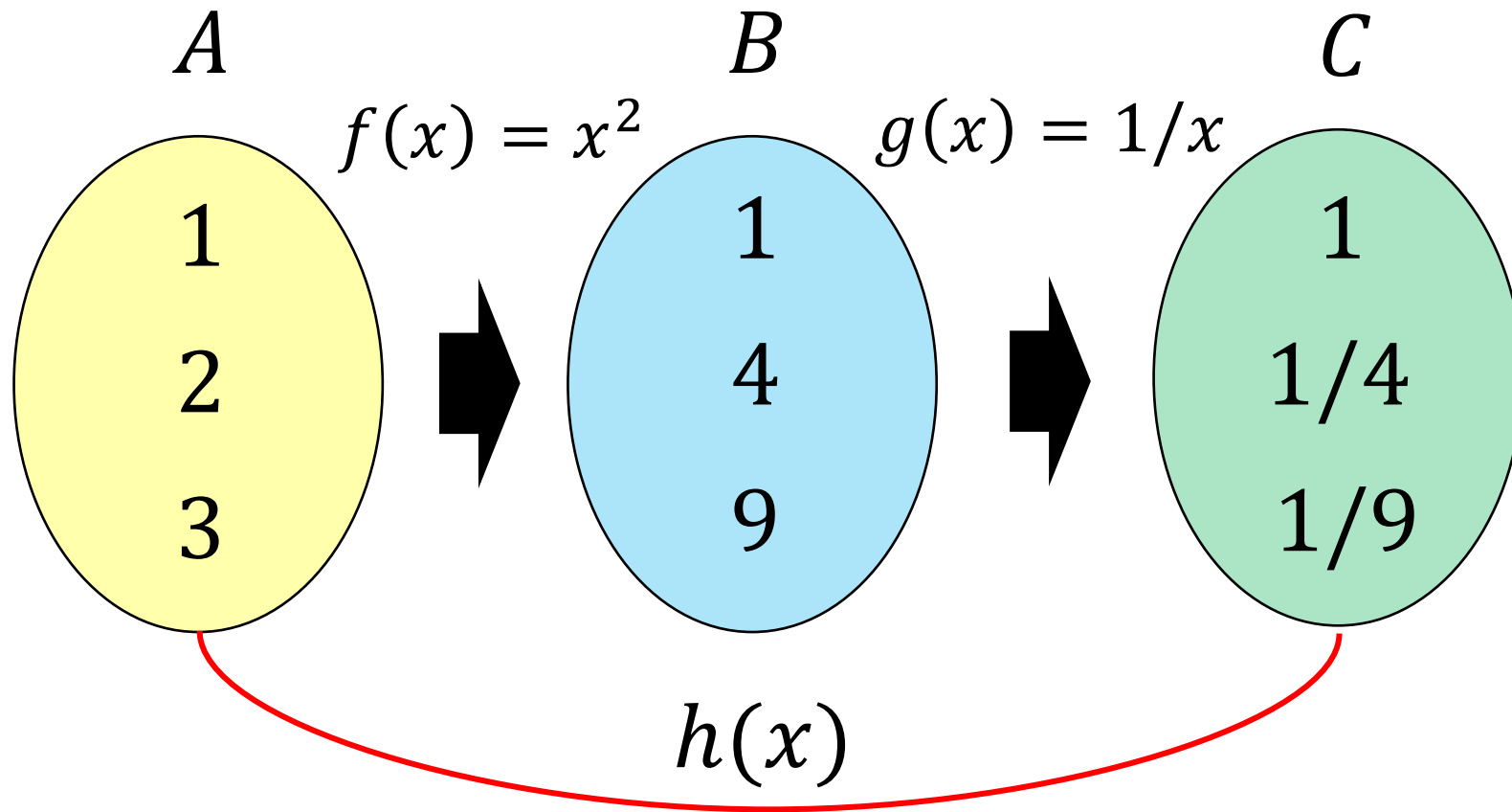
Domínio

- A função composta de g e f é a função $h: A \rightarrow C$ em que a imagem de cada $x \in A$ é obtida da seguinte forma
 - A função f é aplicada em x para obter $f(x)$
 - A função g é aplicada em $f(x)$ para obter $g(f(x))$
- Assim , $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x), \forall x \in A$

Composição de Funções



Composição de Funções



Importante: a ordem importa!!!!

$$h(x) = g(f(x)) \neq f(g(x))$$

Composição de Funções

- Ache gof e fog para
 - $f(x) = x^2 + x + 1; g(x) = x^2$
 - $f(x) = 2\sqrt{x} + 3; g(x) = x^2 + 1$
- Sabendo que $h = gof$, encontre as funções f e g
 - $h(x) = (2x^3 + x^2 + 1)^5$
 - $h(x) = \frac{1}{(3x^2 + 2)^{3/2}}$

Composição de Funções

- Um cuidado...

- $f(x) = x^2 - 1$

x	$f(x) = x^2 - 1$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Se $g(x) = \sqrt{x}$, verifique a imagem de $g(f(x))$...

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Nem tudo que está definido no domínio da função componente o está para a função composta

Composição de Funções

- Exemplo aplicado

- Taxa de ocupação de um Hotel: $r(t) = \frac{10}{81}t^3 - \frac{10}{3}t^2 + \frac{200}{9}t + 55$ ($0 \leq t \leq 12$)

- t medido em meses ($t = 0$ equivale ao início de janeiro)

- r é o percentual de ocupação

- Faturamento (em \$mil): $R(r) = -\frac{3}{5000}r^3 + \frac{9}{50}r^2$ ($0 \leq r \leq 100$)

- Determine a taxa de ocupação do hotel no início de janeiro? E no fim de junho?

- Qual o faturamento do hotel nos mesmos períodos?

Composição de Funções

- Exercício
 - Um estudo de impacto ambiental em uma cidade indica que a quantidade de CO presente no ar decorrente da poluição de automóveis é de $0,01q^{2/3}$ PPM para q mil automóveis em circulação
 - Um estudo distinto estima que daqui a t anos o numero de veículos nessa cidade será de $0,2t^2 + 4t + 64$
 - Encontre uma expressão para a concentração de CO no ar por causa da emissão por automóveis daqui a t anos
 - Qual será o nível de concentração daqui a 5 anos?

Composição de Funções

- Exercício
- A receita de uma agência de viagens é de $f(x)$ reais, onde x é o montante de reais investido em publicidade
- O total gasto com publicidade no tempo t é de $g(t)$ reais
- O que $f \circ g$ representa?

Funções Polinomiais

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + ax + a_0$ ($a_n \neq 0$)
 - Com n inteiro e não negativo
 - E a_0, a_1, \dots, a_n são constantes chamadas de coeficientes
- Por exemplo
 - $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + \frac{3}{x} + 8$ (função *polinomial de grau 5*)
 - Assim como $g(x) = 3x + 4$ é uma função polinomial de grau 1 (ou função linear ou função afim)

Funções Polinomiais – Casos Especiais

- Função de 1º grau

$$f(x) = ax + b$$

Coeficiente Angular
(constante em funções afins)

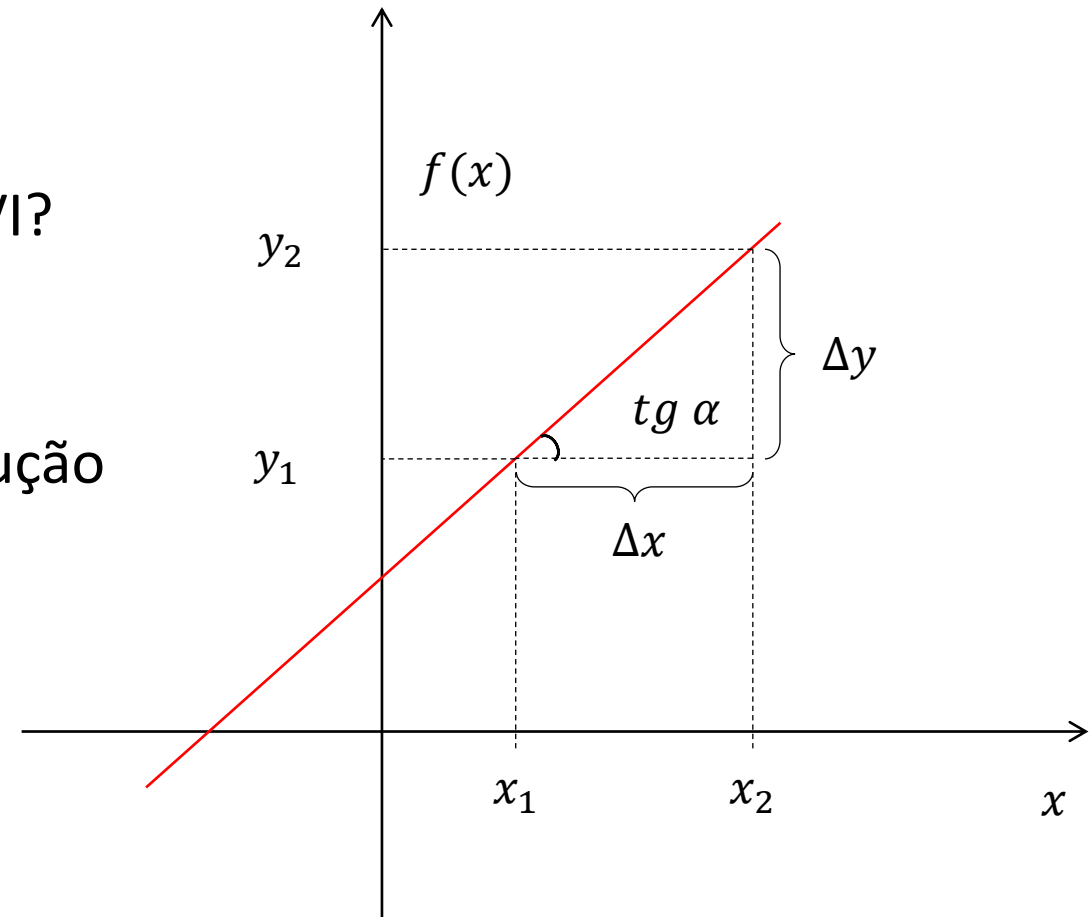
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b \in \mathbb{R}$

- Pode-se determinar $f(x) = ax + b$ conhecendo dois de seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$

Funções Polinomiais – Casos Especiais

- Função de 1º grau
 - Qual a variação da VD ante a variação da VI?
 - Distância em função do tempo
 - Custo total em função do volume de produção
 - Etc...

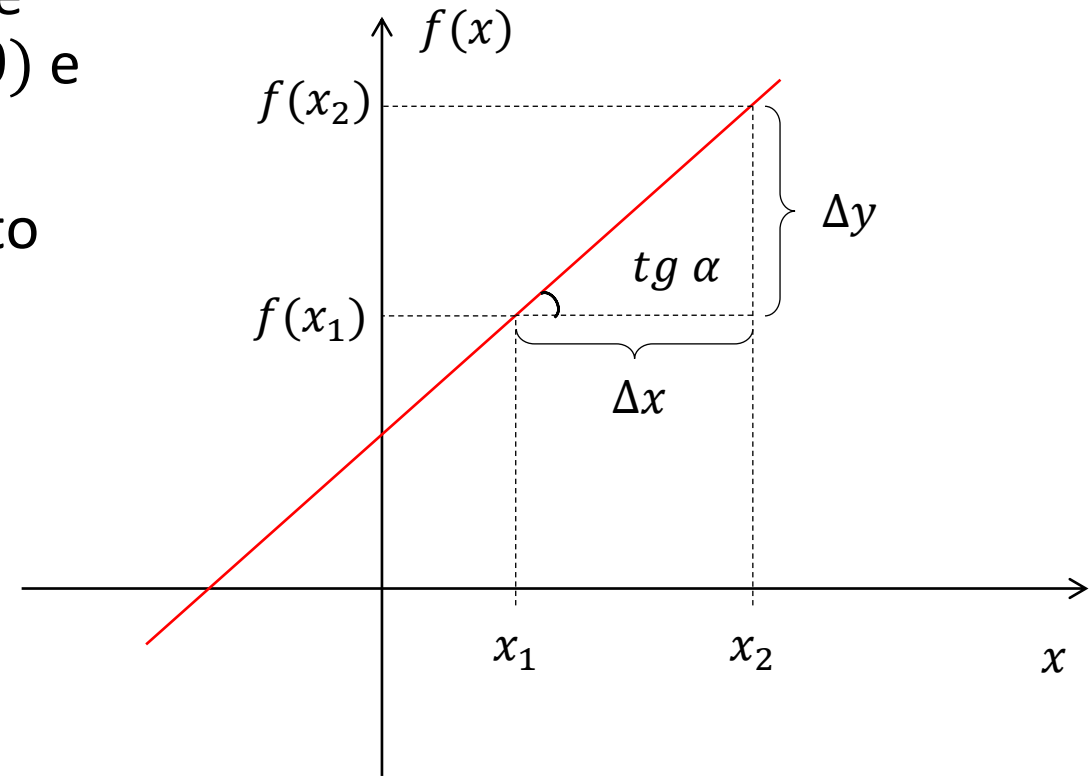
$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Exemplos

- Sendo L_1 a reta que passa pelos pontos $(-2,9)$ e $(1,3)$ e L_2 a reta que passa pelos pontos $(-4,10)$ e $(3,-4)$, determine se ambas são paralelas
- Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1,3)$ e tem inclinação $m = 2$

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Algumas Aplicações – funções de 1º grau

- Depreciação linear – consumo da vida útil de um ativo
 - Ex. O valor de uma máquina decresce linearmente com o tempo. Sabe-se que hoje ela vale \$ 10.000 e daqui a cinco anos valerá \$ 1.000
 - Qual o valor da máquina daqui a t anos?
 - Qual o tempo necessário para a depreciação total?
 - Esboce o gráfico da função depreciação?

Algumas Aplicações – funções de 1º grau

- Ponto de Equilíbrio
 - $RT = CT$
- Exemplo: o custo fixo mensal de fabricação de um produto é \$ 5.000 e o custo variável por unidade é \$ 10. O produto é vendido por \$ 15
 - Qual é o ponto de equilíbrio?
 - Esboce o gráfico indicando o ponto de equilíbrio

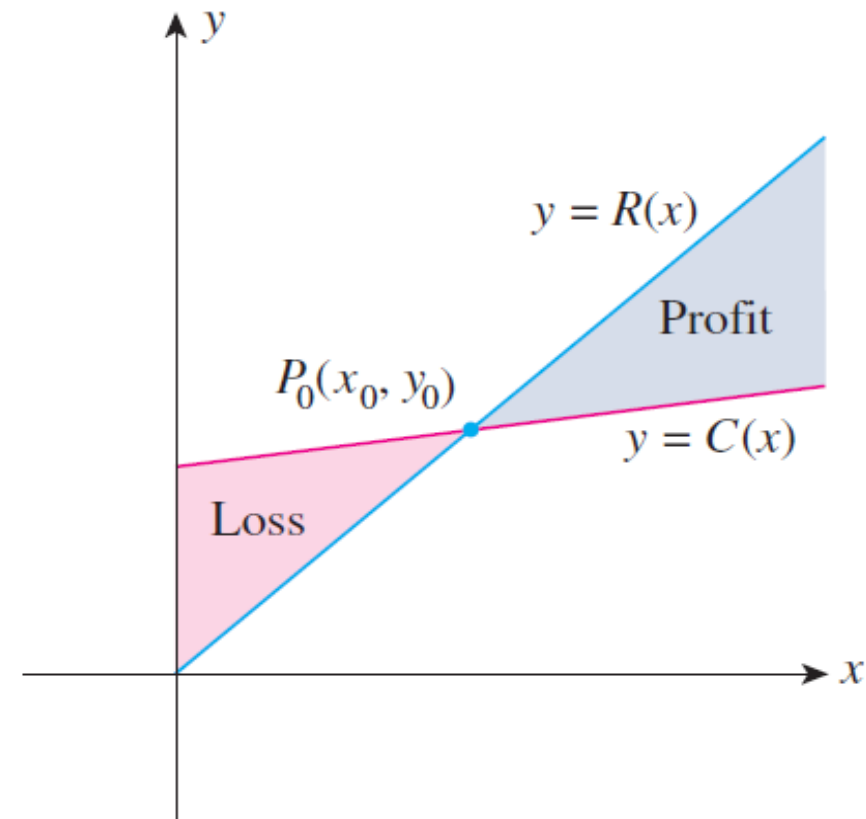
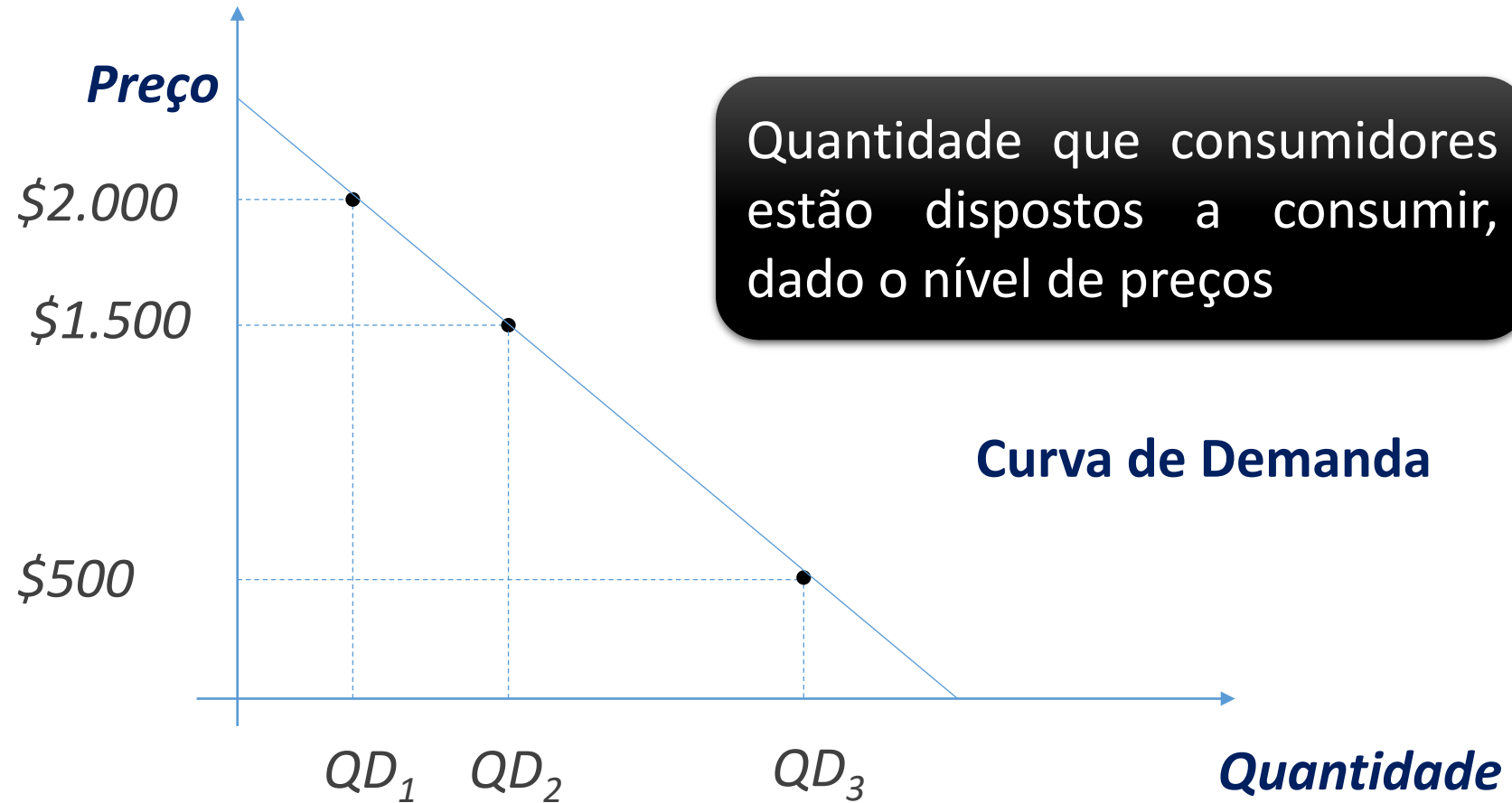


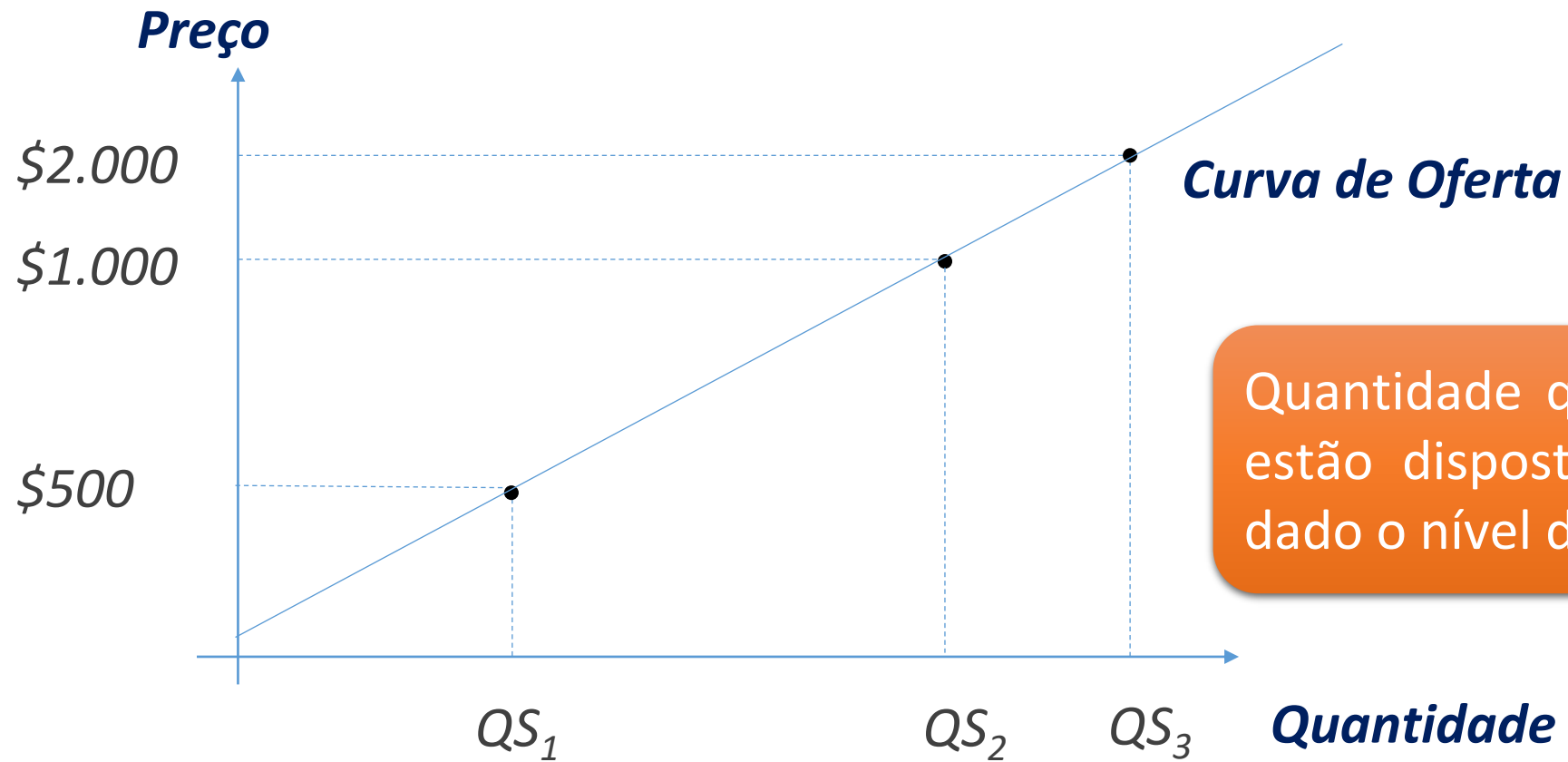
FIGURE 41

P_0 is the break-even point.

Curva de Demanda

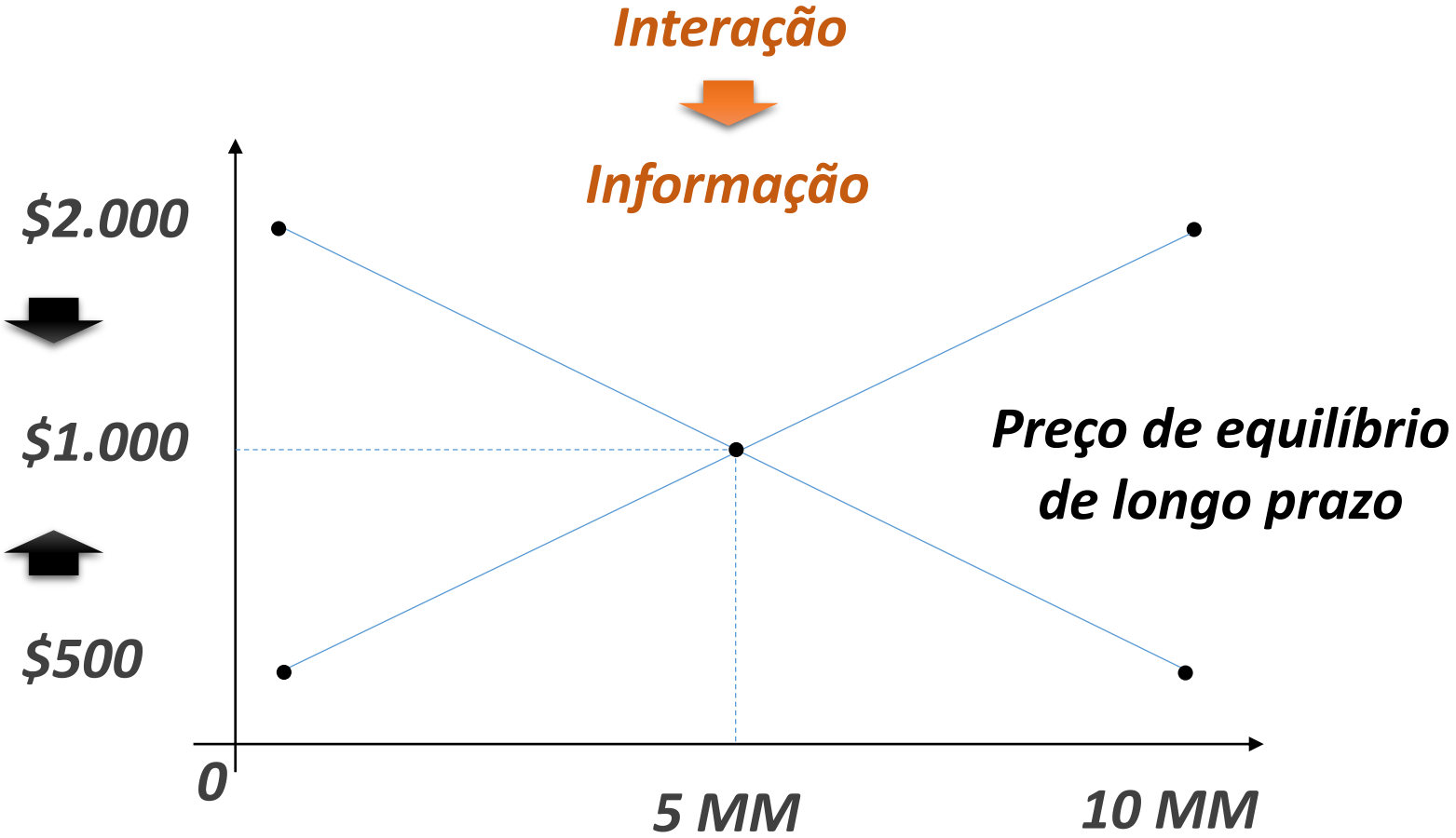


Curva de Oferta



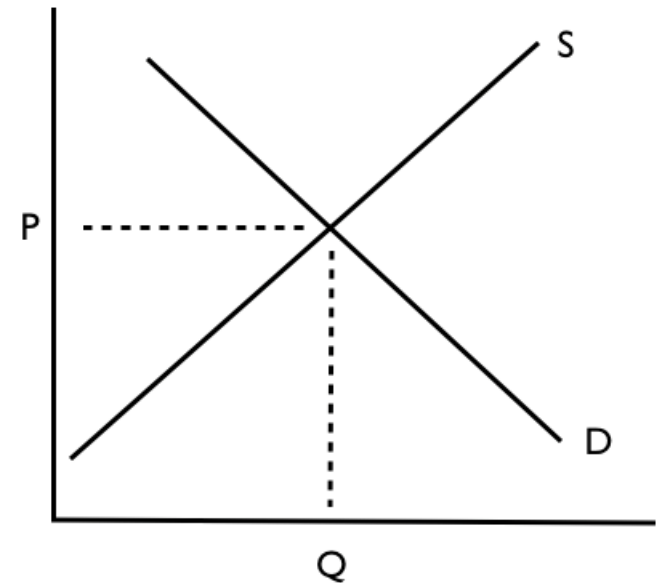
Quantidade que produtores estão dispostos a produzir, dado o nível de preços

Juntando tudo...



Por enquanto... funções de 1º grau

- Equilíbrio entre oferta e demanda
 - Demanda: quantidade consumida pelo mercado
 - Oferta: quantidade oferecida pelos produtores
- Vamos tratar o preço como uma função da quantidade
 - $p = d(q)$
 - $p = s(q)$

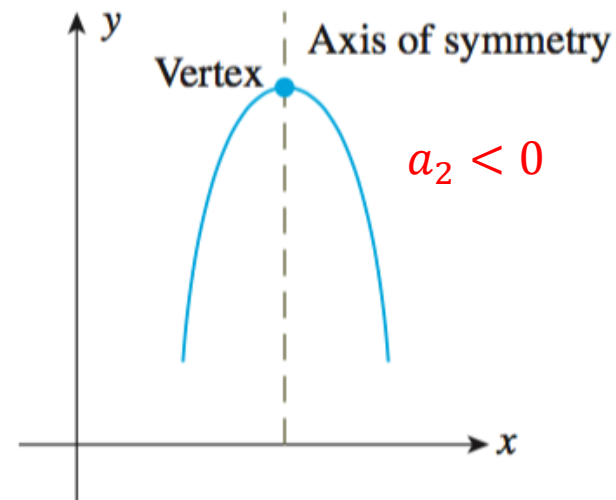
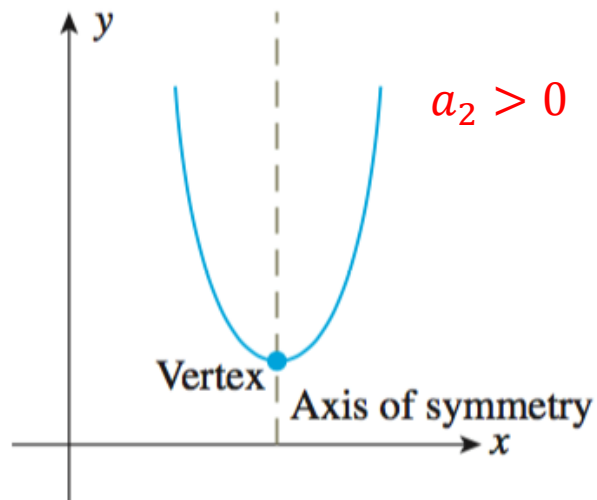


Algumas Aplicações – funções de 1º grau

- Exemplo: o volume demandado de sorvete varia com o preço na forma $p = d(q) = 10 - 0,002q$
- Suponha a função de oferta seja de 1º grau...
 - Se o preço for \$ 2,10, a quantidade ofertada será 350 unidades por semana
 - Se o preço for \$ 2,40, a quantidade ofertada será 1.400 unidades por semana
 - Ache a função oferta...
- Agora ache o *break even point* e esboce o gráfico indicando-o...

Funções Polinomiais – Casos Especiais

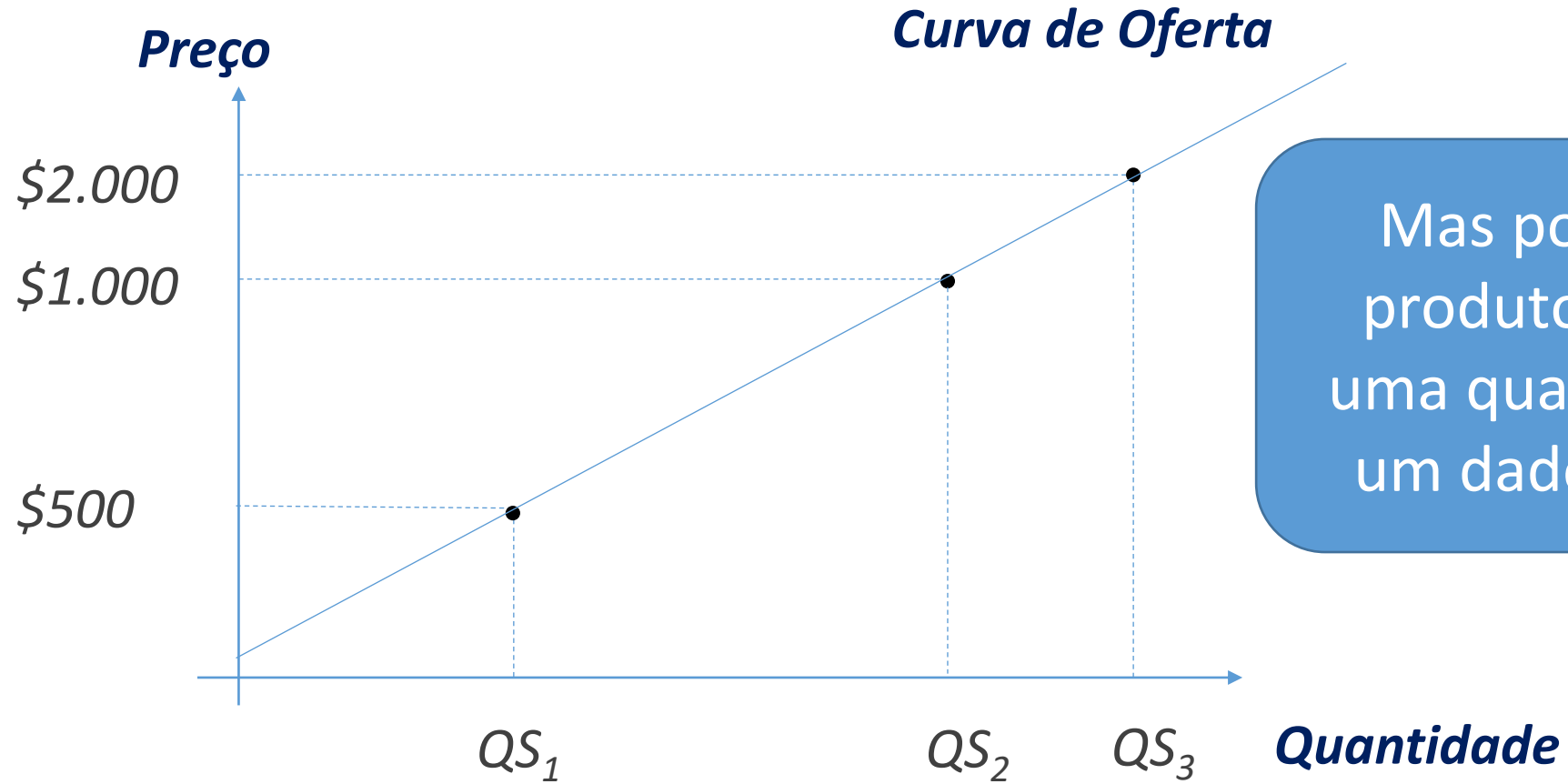
- Funções quadráticas são do tipo $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ($a_2 \neq 0$)
- Com $a_2 \in \mathbb{R}^*$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}$



Algumas Aplicações – funções de 2º grau

- O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20t - t^2$, sendo que $0 \leq t \leq 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por $C(N) = 50 + 30N$.
 - Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora
 - Em que instante t de um dia de produção o custo será de \$2.300 (em \$1000)

Lembram?

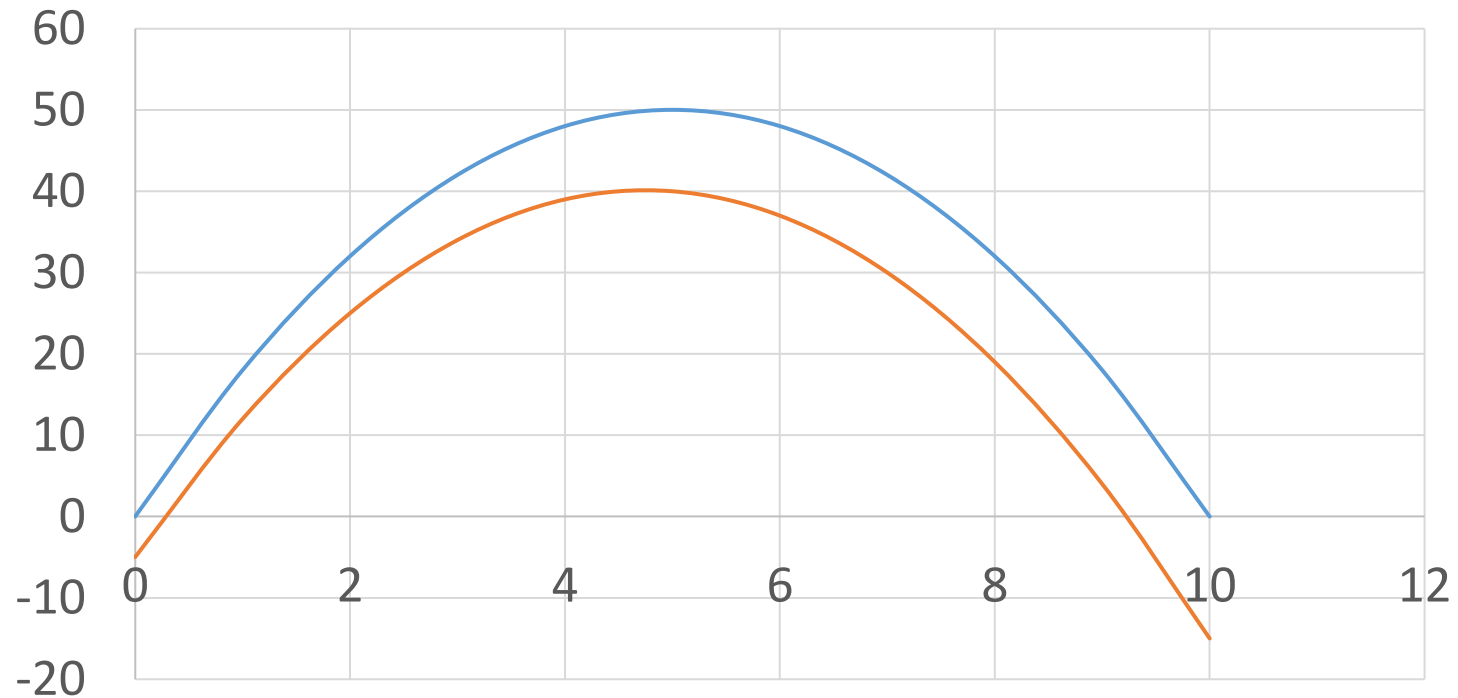


Mas por que o produtor oferta uma quantidade a um dado preço?

Algumas Aplicações – funções de 2º grau

- Vimos a função receita quando o preço era constante
- Agora veremos como obter a função receita com o preço variável (com conseqüente alteração da demanda)
- A demanda para um produto é $p = d(q) = 20 - 2q$, enquanto sua função custo $C = 5 + q$
 - Qual a quantidade que maximiza a Receita?
 - Qual a quantidade que maximiza o Lucro?

Graficamente...



Por que as funções receita e lucro poderiam ser parábolas?

Exercício

- A função demanda para uma certa marca de fone de ouvido sem fios e com *bluetooth* é dada por

$$p = d(q) = -0,025q^2 - 0,5q + 60$$

- Já a função de oferta correspondente é...

$$p = s(q) = 0,02q^2 + 0,6q + 20$$

- p é expresso em US\$ e q é medido em milhares de unidades
- Encontre a quantidade e o preço de equilíbrio

Funções Racionais

- $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{(x^2 - 4)^2}$ (com $x \neq 4$)

- Em outras palavras

- $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (com $g(x) \neq 0$)

- Um cuidado...

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Funções Potência

Onde t é um \mathbb{R}
qualquer

$$f(x) = x^t$$

- Por exemplo

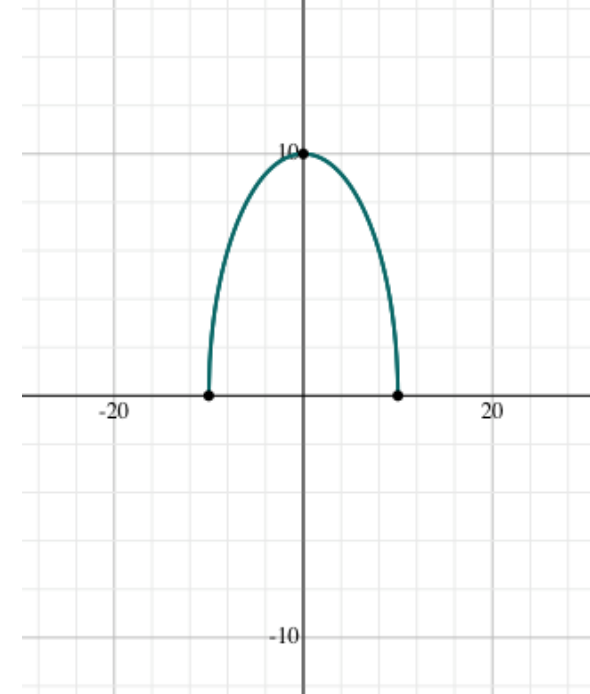
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

A análise de destas funções (bem como polinômios de grau maior ou igual a 3) é facilitada pelas ferramentas do cálculo...

Exercícios

- Função demanda

$$p = \sqrt{-ax^2 + b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$



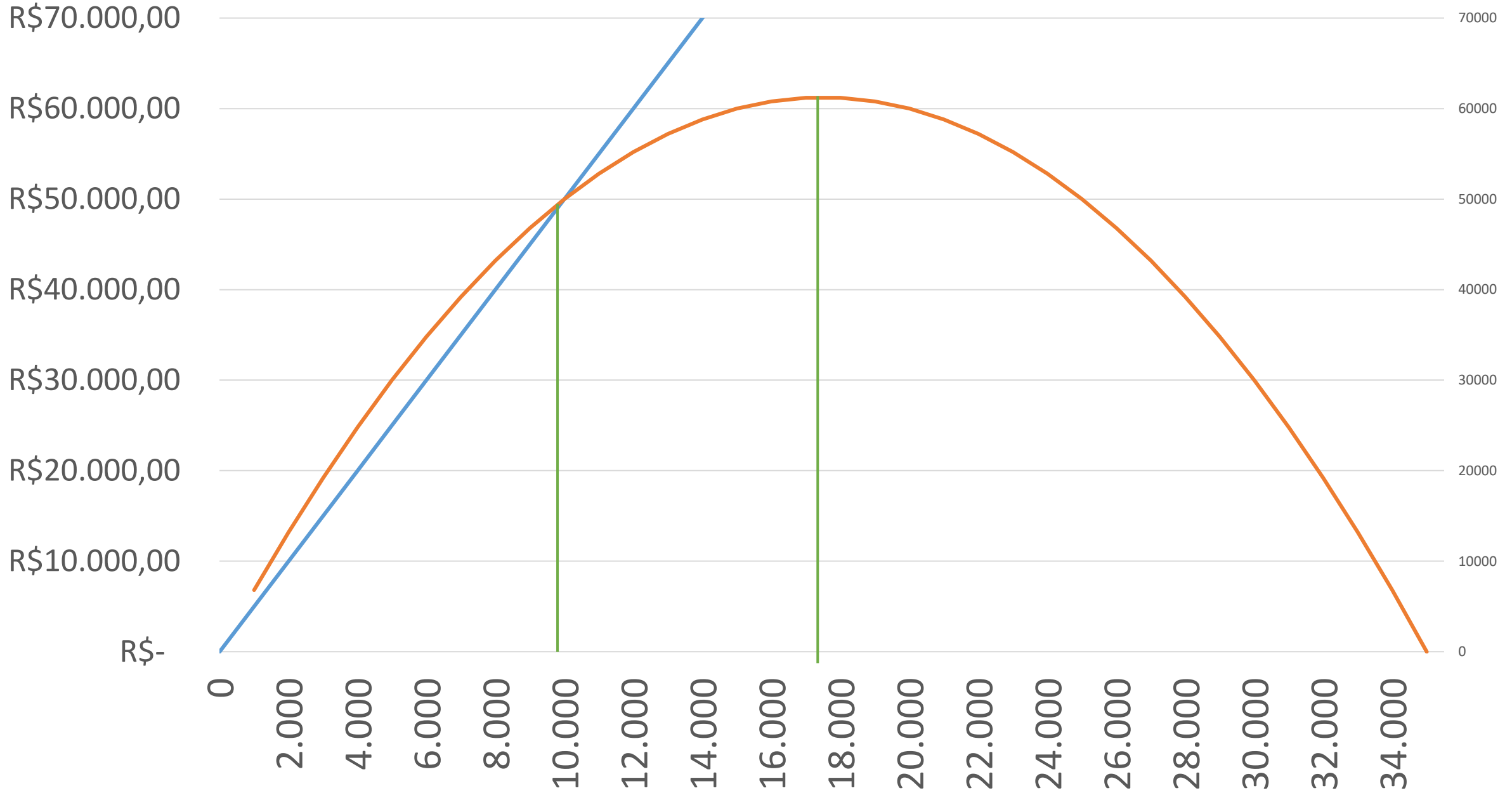
- Quando a demanda é de 6.000 unidades ($x = 6$), o preço é de \$8
- Quando a demanda é de 8.000 unidades ($x = 8$), o preço é de \$6

1. Determine a função demanda
2. Qual a demanda quando o preço é de \$7,50?

Exercícios

- Um vinhedo...
- O proprietário estima que se 10.000 garrafas forem vendidas, consegue-se praticar um preço de \$5,00/garrafa
- Se mais que 10.000 garrafas forem vendidas o preço começa a cair \$0,0002/*garrafa*
- Supondo que pelo menos 10.000 garrafas serão vendidas e considerando q como o número de garrafas vendidas acima de 10.000...
- **Encontre a função $R(q)$**
- **O faturamento para 16.000 garrafas vendidas**
- **Qual o limite de produção/vendas?**

Título do Gráfico



Exercícios

- Uma caixa retangular de base quadrada deverá ter um volume de 20m^3
- O material para construí-la tem a seguinte cotação
 - Base: $\$0,30/\text{m}^2$
 - Laterais: $\$0,10/\text{m}^2$
 - Topo: $\$0,20/\text{m}^2$
- Sendo x a medida da lateral da base, ache a função que expressa o custo de confecção da mesma

