

# ELECTRE III

SEP 5836 Técnicas de Suporte à Decisão Aplicadas à  
Gestão de Desempenho de Cadeias de Suprimento

# ELECTRE

- Elimination et Choix Traduisant la Réalité – Elimination and Choice Expressing the Reality
- Método de sobreclassificação, baseado na construção de matrizes de comparação par-a-par;
- Família de métodos com diferentes características.

# Família ELECTRE

- APLICAÇÃO EM FUNÇÃO DO RESULTADO DESEJADO:
  - ESCOLHA: ELECTRE I, ELECTRE IV, ELECTRE IS;
  - ORDENAÇÃO: ELECTRE II, III e IV;
  - CATEGORIZAÇÃO: ELECTRE TRI

# ELECTRE III

# ELECTRE III

- Utilizado para a **ordenação** (*ranking*) das alternativas;
- ELECTRE III foi criado para **melhorar ELECTRE II** (FIGUEIRA, GRECO E EHRGOTT, 2016);
- Utiliza **pseudo-critérios para definir limiares de preferência e indiferença** (ALMEIDA, 2013; FIGUEIRA, GRECO E EHRGOTT, 2016);

# ELECTRE III –procedimento básico

- Cálculo das matrizes de concordâncias parciais;
- Cálculo da matriz de concordância global;
- Cálculo das matrizes discordâncias;
- Cálculo da matriz de credibilidade;
- Definição das relações P/R/I/P-
- Ordenação de preferências crescente e decrescente;
- Ordenação final.

# ELECTRE III –terminologia

- $g_i(a)$ : desempenho da alternativa  $a$  no critério  $i$ ;
- $g_i(b)$ : desempenho da alternativa  $b$  no critério  $i$ ;

# Cálculo da Concordância

O índice de concordância  $C(a, b)$  pode ser obtido por meio da equação abaixo:(ALMEIDA, 2013):

$$C(a, b) = \sum_{i=1}^n w_i c_i(a, b)$$

Onde:

$$\sum_i w_i = 1$$

$$c_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } g_i(a) + q_i \geq g_i(b) \\ 0, & \text{se } g_i(a) + p_i \leq g_i(b) \\ \frac{p_i + g_i(a) - g_i(b)}{p_i - q_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$q_i$  é o grau de indiferença, e  $p_i$  é o grau de preferência;

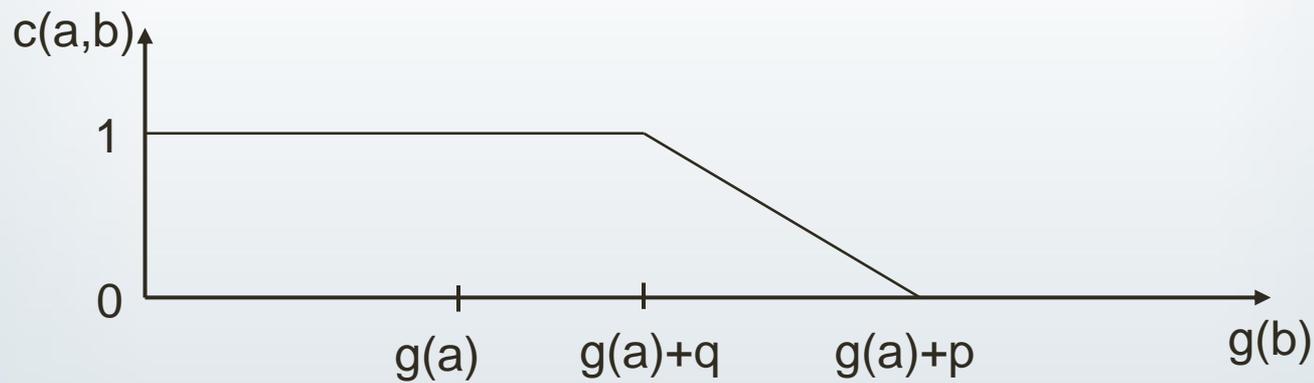
$g_i(a)$ : desempenho da alternativa  $a$  no critério  $i$ ;

$g_i(b)$ : desempenho da alternativa  $b$  no critério  $i$ ;

# Cálculo da Concordância

$$c_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } g_i(a) + q_i \geq g_i(b) \\ 0, & \text{se } g_i(a) + p_i \leq g_i(b) \\ \frac{p_i + g_i(a) - g_i(b)}{p_i - q_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$q_i$  é o grau de indiferença, e  $p_i$  é o grau de preferência.



# Cálculo de concordância – exemplo

**Problema:** Seleção de fornecedor de software

Alternativas	Critérios		
	Esforço de implementação (c1)	Interface gráfica (c2)	Suporte técnico (c3)
A1	6	8	5
A2	7	5	6
A3	4	6	5
Pesos	3	4	3

Limiaries p, q e veto			
	c1	c2	c3
p	1	1	1
q	0,5	0,8	0,5
v	2	2	2

# Concordância parcial - exemplo

$$c_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } g_i(a) + q_i \geq g_i(b) \\ 0, & \text{se } g_i(a) + p_i \leq g_i(b) \\ \frac{p_i + g_i(a) - g_i(b)}{p_i - q_i}, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Limiaries p, q e veto			
	c1	c2	c3
p	1	1	1
q	0,5	0,8	0,5
v	2	2	2

Alternativas	Critérios		
	Esforço de implementação (c1)	Interface gráfica (c2)	Suporte técnico (c3)
A1	6	8	5
A2	7	5	6
A3	4	6	5
Pesos	3	4	3

$$c1(3,1) = \begin{cases} 1, & \text{se } (4 + 0,5) \geq 6 \\ 0, & \text{se } (4 + 1) \leq 6 \\ \frac{1+4-6}{1-0,5}, & \text{cc} \end{cases}$$

$$c3(3,1) = \begin{cases} 1, & \text{se } (5 + 0,5) \geq 5 \\ 0, & \text{se } (5 + 1) \leq 5 \\ \frac{1+5-5}{1-0,5}, & \text{cc} \end{cases}$$

$$c2(3,1) = \begin{cases} 1, & \text{se } (6 + 0,8) \geq 8 \\ 0, & \text{se } (6 + 3) \leq 8 \\ \frac{3+6-8}{3-0,8} = 0,45, & \text{cc} \end{cases}$$

## Índices de Concordância Parcial

<b>c1</b>	a1	a2	a3
a1	1	0	1
a2	1	1	1
a3	0	0	1

<b>c2</b>	a1	A2	a3
a1	1	1	1
a2	0	1	0
a3	1	1	1

<b>c3</b>	a1	a2	a3
a1	1	0	1
a2	1	1	1
a3	1	0	1

# Concordância global - exemplo

$$C(a, b) = \sum_{i=1}^n p_i c_i(a, b)$$

Onde  $\sum_i p_i = 1$

	Esforço de implementação (c1)	Interface gráfica (c2)	Suporte técnico (c3)
Peso	3	4	3
Peso norm.	0,3	0,4	0,3

## Índices de Concordância Parcial

<b>c2</b>	a1	a2	A3
a1	1	1	1
a2	0	1	0
a3	1	1	1

<b>c1</b>	a1	a2	a3
a1	1	0	1
a2	1	1	1
a3	0	0	1

<b>c3</b>	a1	a2	a3
a1	1	0	1
a2	1	1	1
a3	1	0	1

## Índices de Concordância Global

### Matriz de concordância global

	A1	A2	A3
A1	1	0,40	1,00
A2	0,60	1	0,60
A3	0,70	0,40	1

Detalhamento de alguns índices:

$$C(1,2) = (0 \times 0,3) + (1 \times 0,4) + (0 \times 0,3) = 0,4$$

$$C(1,3) = (1 \times 0,3) + (1 \times 0,4) + (1 \times 0,3) = 1$$

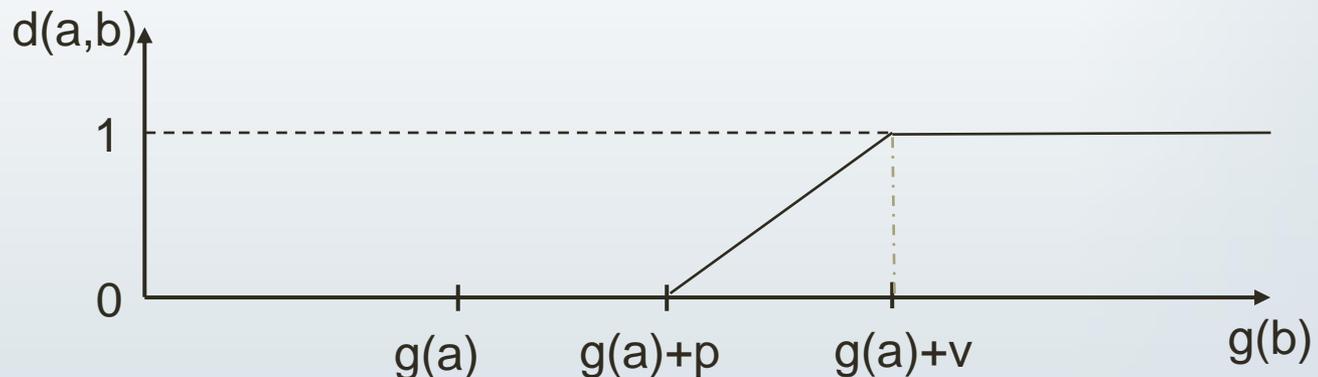
$$C(3,1) = (0 \times 0,3) + (1 \times 0,4) + (1 \times 0,3) = 0,7$$

# Cálculo da discordância

- O **índice discordância**  $D(a, b)$  pode ser obtido por meio da equação abaixo:(ALMEIDA, 2013):

$$d_i(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } g_i(a) + p_i \geq g_i(b) \\ 1, & \text{se } g_i(a) + v_i \leq g_i(b) \\ \frac{g_i(b) - g_i(a) - p_i}{v_i - p_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde  $p_i$  é o grau de preferência, e  $v_i$  é o limiar de veto da alternativa no critério  $i$ .



# Cálculo da discordância - exemplo

$$d_i(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } g_i(a) + p_i \geq g_i(b) \\ 1, & \text{se } g_i(a) + v_i \leq g_i(b) \\ \frac{g_i(b) - g_i(a) - p_i}{v_i - p_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Limiares p, q e veto			
	c1	c2	c3
p	1	1	1
q	0,5	0,8	0,5
v	2	2	2

Alternativas	Critérios		
	Esforço de implementação (c1)	Interface gráfica (c2)	Suporte técnico (c3)
A1	6	8	5
A2	7	5	6
A3	4	6	5
Pesos	3	4	3



## Índices de Discordância Parcial

<b>d1</b>	a1	a2	a3
a1	0	0	0
a2	0	0	0
a3	1	1	0

<b>d2</b>	a1	a2	a3
a1	0	0	0
a2	1	0	0
a3	1	0	0

<b>d3</b>	a1	a2	a3
a1	0	0	0
a2	0	0	0
a3	0	0	0

Detalhamento de alguns índices:

$$d_1(3,1) = \begin{cases} 0, & \text{se } (4 + 1) \geq 6 \\ 1, & \text{se } (4 + 2) \leq 6 \\ \frac{6 - 4 - 1}{2 - 1}, & \text{cc} \end{cases} \quad d_2(3,1) = \begin{cases} 0, & \text{se } (6 + 1) \geq 8 \\ 1, & \text{se } (6 + 2) \leq 8 \\ \frac{8 - 6 - 3}{2 - 3}, & \text{cc} \end{cases} \quad d_3(3,1) = \begin{cases} 0, & \text{se } (5 + 1) \geq 5 \\ 1, & \text{se } (5 + 2) \leq 5 \\ \frac{5 - 5 - 1}{2 - 1}, & \text{cc} \end{cases}$$

# Cálculo da credibilidade

- O grau de credibilidade  $S(a, b)$  pode ser obtido por meio da equação abaixo (ALMEIDA, 2013):

$$S(a, b) = \begin{cases} C(a, b), & \text{se } d_i \leq C(a, b), \forall_i \\ C(a, b) * \prod_{i: d_i(a,b) > C(a,b)} \frac{1 - d_i(a, b)}{1 - C(a, b)} \end{cases}$$

# Cálculo da credibilidade - exemplo

$$S(a, b) = \begin{cases} C(a, b), & \text{se } d_i \leq C(a, b), \forall_i \\ C(a, b) * \prod_{i: d_i(a,b) > C(a,b)} \frac{1 - d_i(a, b)}{1 - C(a, b)} \end{cases}$$



## Índices de Discordância Parcial

Matriz de concordância global			
	A1	A2	A3
A1	1	0,40	1,00
A2	0,60	1	0,60
A3	0,70	0,40	1

<b>d1</b>	a1	a2	a3
a1	0	0	0
a2	0	0	0
a3	1	1	0

<b>d2</b>	a1	a2	a3
a1	0	0	0
a2	1	0	0
a3	1	0	0

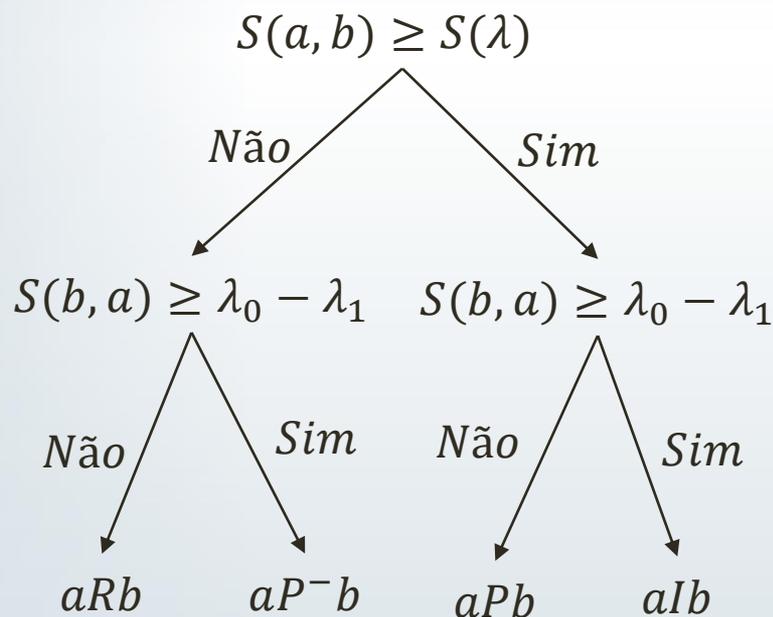
<b>d3</b>	a1	a2	a3
a1	0	0	0
a2	0	0	0
a3	0	0	0



Matriz de credibilidade			
	A1	A2	A3
A1	1	0,40	1,00
A2	0	1	0,60
A3	0	0	1

# Definição das relações P/R/I/P-

- Para a obtenção da **Matriz de Ordenação Descendente**, a partir de um **nível de corte  $s(\lambda)$**  que represente o menor valor de um **Índice de Credibilidade  $S(a,b)$**  em que se pode afirmar que  $aSb$ . Então, aplica-se a seguinte sequência de avaliação:



$$s(\lambda) = \lambda_0 - \lambda_1; \quad \lambda_0 = \max S(a, b)$$

$$\lambda_1 = 0,3 - 0,15 \cdot \lambda_0$$

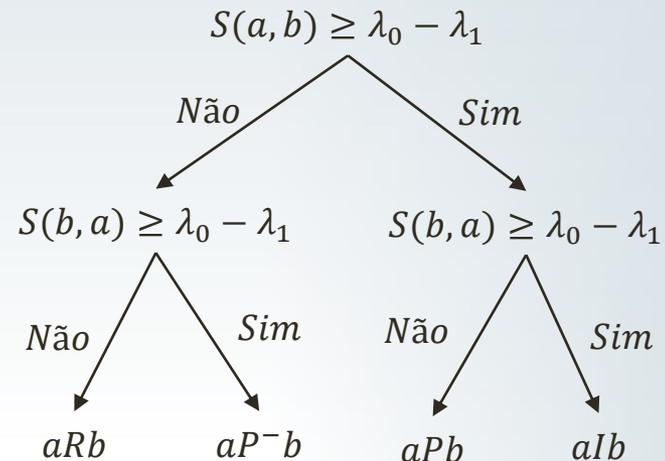
*I* – indiferente  
*R* – incomparável  
*P* – preferível  
*P<sup>-</sup>* – Não preferível

# Ordenação das alternativas

Duas possibilidades:

- Ordenação descendente – otimista;
- Ordenação ascendente – pessimista.

# Ordenação descendente (otimista)



- A pontuação final para a ordenação é avaliada por meio do índice  $Q(a)$ ;
- A ordenação é feita do **maior  $Q(a)$  para o menor**;
- $Q(a) = n^{\circ}$  de altern. que 'a' supera –  $n^{\circ}$  de altern. que superam 'a'
- Considera-se para o cálculo de  $Q(a)$ :
  - **$aSb = aPb, alb$  ou  $aRb$**
  - **Se  $aSb = bSa$ , então  $alb$**
- Em caso de empate, o nível de corte pode ser reduzido progressivamente, até se obter uma pré-ordem completa.

# Ordenação das alternativas – exemplo DE ORDENAÇÃO DESCENDENTE - OTIMISTA

Matriz de credibilidade

	A1	A2	A3
A1	1	0,40	1,00
A2	0	1	0,60
A3	0	0	1

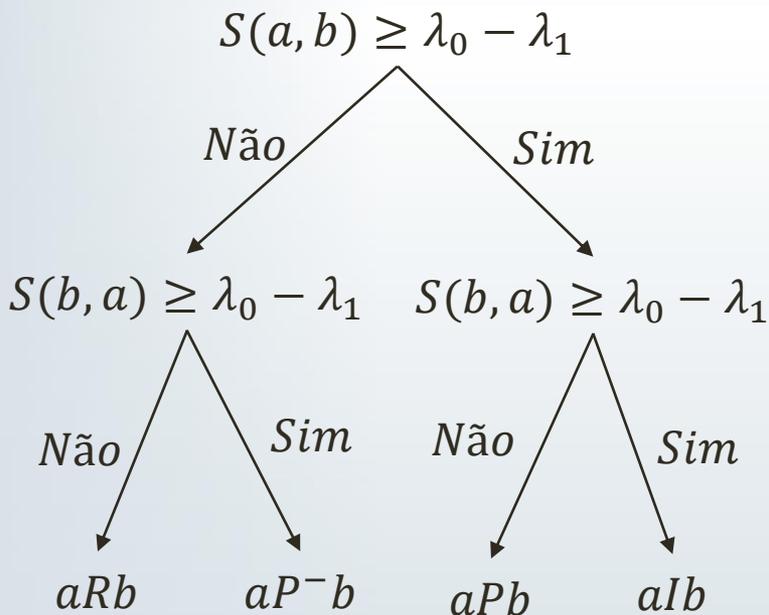
$$\lambda_0 = \max S(a, b) = 1$$

$$\lambda_1 = 0,3 - 0,15 * \lambda_0 = 0,15$$

$$s(\lambda) = \lambda_0 - \lambda_1 = 1 - 0,15 = 0,85$$

Considera-se para Q(a):

- $aSb = aPb$ ,  $alb$  ou  $aRb$
- Se  $aSb = bSa$ , então  $alb$



Matriz de Relações

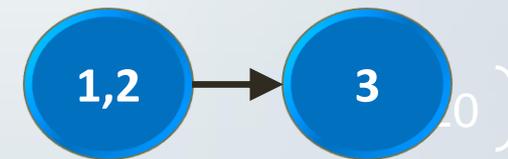
	a1	a2	a3
a1	I	R	P
a2	R	I	R
a3	P-	R	I

Classificação Otimista

	a1	a2	a3
a1	S	S	S
a2	S	S	S
a3	-	S	S

Pontuação Otimista

	+	-	Q(a)
a1	3	0	3
a2	3	0	3
a3	2	1	1



# ORDENAÇÃO DESCENDENTE – OTIMISTA COM REDUÇÃO DO NÍVEL DE CORTE

Matriz de credibilidade

	A1	A2	A3
A1	1	0,40	1,00
A2	0	1	0,60
A3	0	0	1

$$s(\lambda) = 0,5$$

Considera-se para  $Q(a)$ :

- $aSb = aPb$ ,  $alb$  ou  $aRb$
- Se  $aSb = bSa$ , então  $alb$

Matriz de Relações

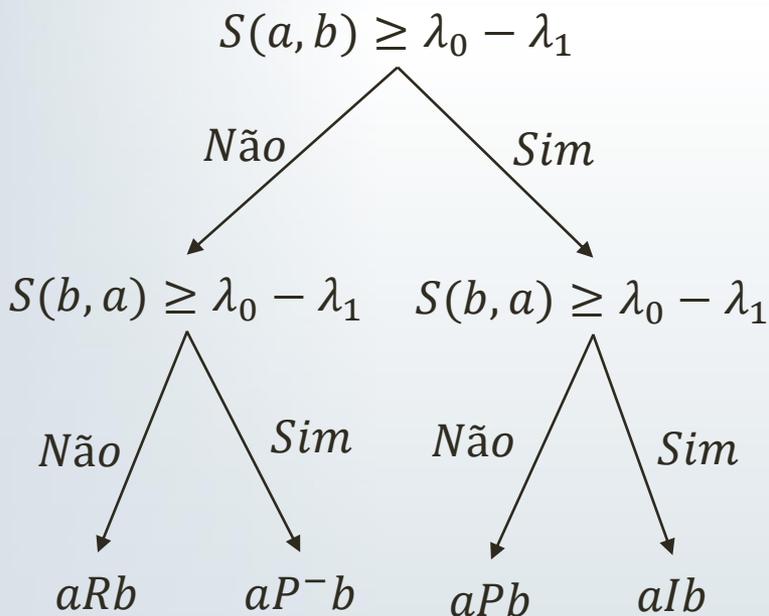
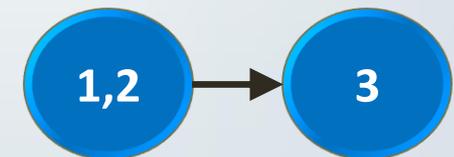
	a1	a2	a3
a1	I	R	P
a2	R	I	P
a3	P-	P-	I

Classificação Otimista

	a1	a2	a3
a1	S	S	S
a2	S	S	S
a3	-	-	S

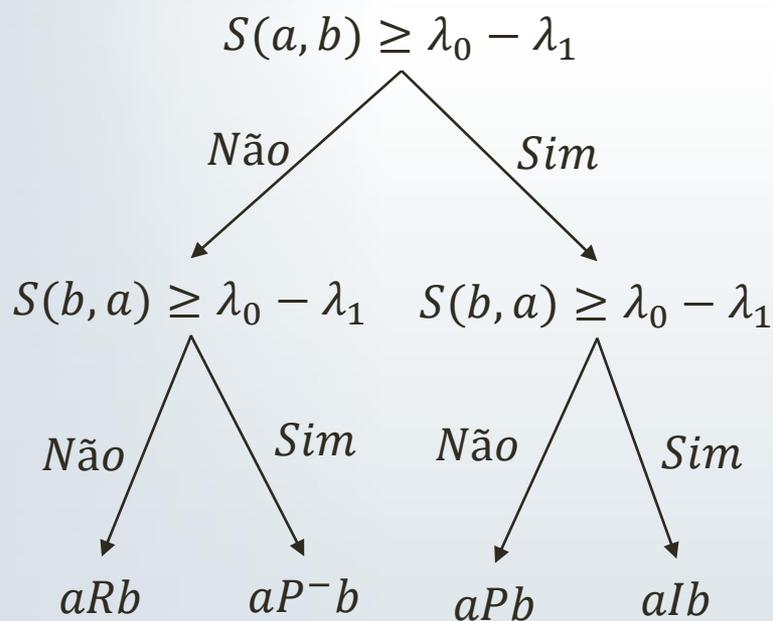
Pontuação Otimista

	+	-	$Q(a)$
a1	3	0	3
a2	3	0	3
a3	1	2	-1



# Ordenação Ascendente (Pessimista)

- Para a obtenção da **Matriz de Ordenação Ascendente**, a partir de um **nível de corte  $s(\lambda)$**  que represente o menor valor de um **Índice de Credibilidade  $S(a,b)$**  em que se pode afirmar que  $aSb$ . Então, aplica-se a seguinte sequência de avaliação:



A pontuação final para a ordenação é avaliada por meio do índice  $Q(a)$ ;

- A ordenação é feita **do menor  $Q(a)$  para o maior**;
- $Q(a) = n^{\circ}$  de altern. que 'a' supera –  $n^{\circ}$  de altern. que superam 'a'
- Considera-se para o cálculo de  $Q(a)$ :
  - **$aRb = alb$**
  - **$aSb$  somente quando  $aPb$**

Em caso de empate, o nível de corte pode ser reduzido progressivamente, até se obter uma pré-ordem completa. (e2)

# Ordenação das alternativas – exemplo de ORDENAÇÃO ASCENDENTE - PESSIMISTA

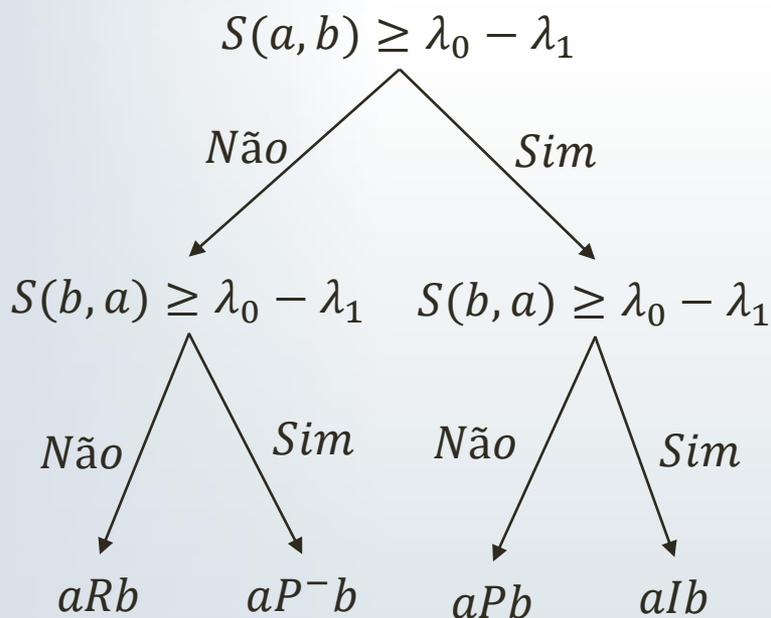
Matriz de credibilidade

	A1	A2	A3
A1	1	0,40	1,00
A2	0	1	0,60
A3	0	0	1

$$s(\lambda) = 0,5$$

Considera-se para  $Q(a)$ :

- $aRb = alb$
- $aSb$  somente quando  $aPb$



Matriz de Relações

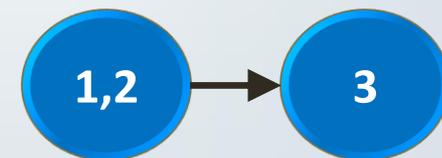
	a1	a2	a3
a1	I	R	P
a2	R	I	P
a3	P-	-P	I

Classificação Otimista

	a1	a2	a3
a1	-	-	S
a2	-	-	S
a3	-	-	-

Pontuação Pessimista

	+	-	Q(a)
a1	1	2	-1
a2	1	2	-1
a3	0	3	-3



# Ordenação Final - exemplo

**Ordenação Otimista (descendente)**



+

**Ordenação Pessimista (ascendente)**



=

**Ordenação Final**



# Ordenação Final

- A ordenação final é obtida a partir da ordem decrescente e ascendente;
- Caso as ordens não sejam iguais, para a ordenação final utiliza-se a mesma operação do ELECTRE II:

$$Posição\ final = \frac{Posição\ decrescente + Posição\ crescente}{2}$$

- Assim, a posição a identificada corresponde a ordem de preferência.

# Referências

- ALMEIDA, A.T. **Processo de decisão nas organizações: Construindo modelos de decisão multicritério**. São Paulo: Atlas, 2013.
- FIGUEIRA, J. R.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. **Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys**. New York: Springer, 2016.
- Instituto Tecnológico de Aeronáutica. **Mb-741- Métodos multicritério de apoio à decisão**. Mestrado Profissional em Produção. 01 aug. 2013, 01 dec. 2013. 32 p. Notas de Aula.
- TROJAN, F.; MORAIS, D. C. **Avaliação em grupo para manutenção de redes de distribuição de água**. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 63, 2011, Ubatuba. Resumos... Ubatuba-SP.

# Exercício

- Aplicar o método ELECTRE III ao mesmo exercício da do TOPSIS/PROMOTHEE;
- Variar os parâmetros, valores das alternativas e pesos;
- Aplicar os dois métodos (PROMETHEE e ELECTRE III) e comparar os resultados.