

# Inferência Fuzzy

SEP 5836 Técnicas de Suporte à Decisão Aplicadas à  
Gestão de Desempenho de Cadeias de Suprimento

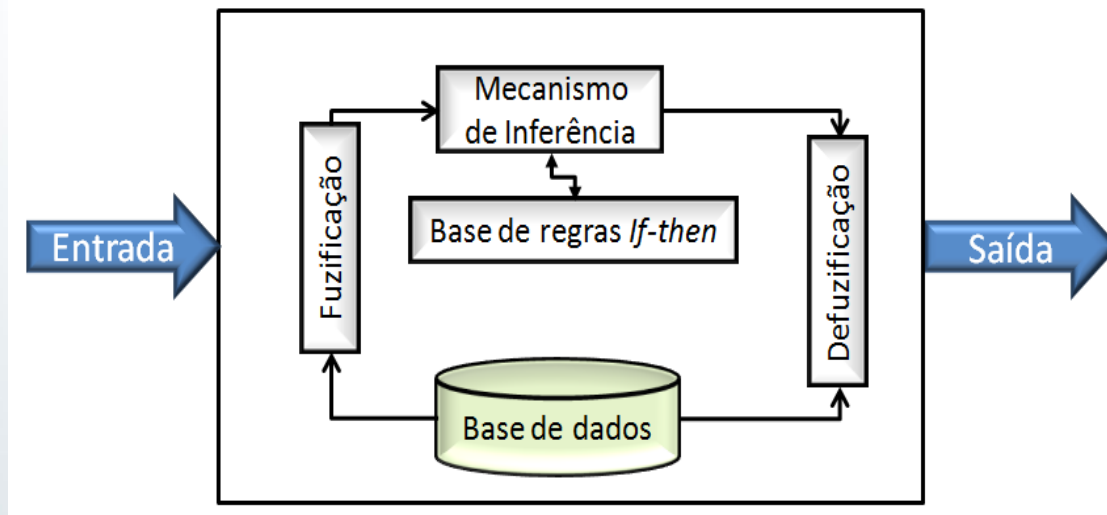
# Inferência Fuzzy

- Inferência é processo de se concluir sobre algo, deduzir a partir da observação de evidências, premissas etc:
  - A inferência pode se basear em probabilidades estatísticas;
  - Em lógica, a inferência decorre da suposição de relações entre premissas e resultados. Ex:
- Em inferência fuzzy, trabalhamos com conjuntos fuzzy.

***Se (A é verdadeiro) e (B é falso) então C é falso***

# Inferência Fuzzy

- Primeiro sistema de inferência fuzzy (FIS) foi proposto por Mandani e Assilian (1975)<sup>1</sup>
- Estrutura do sistema de inferência fuzzy:



1 - H.J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, second ed., Kluwer Academic, Boston, 1991

# Algoritmo de Inferência fuzzy

## **Início**

- <1> Apresentar um conjunto de valores de entrada *crisp* como variáveis de entrada;
- <2> Fuzificar os valores de entrada;
- <3> Verificar quais regras de inferência são ativadas pelos valores de entrada fuzificados;
- <4> Determinar a saída de cada regra de inferência ativada usando os termos linguísticos consequentes;
- <5> Combinar as contribuições individuais de todas as regras ativadas a fim de se produzir uma resposta final;
- <6> Defuzificar o conjunto *fuzzy* resultante do passo <5>;
- <7> Apresentar os valores de saída em formato *crisp*.

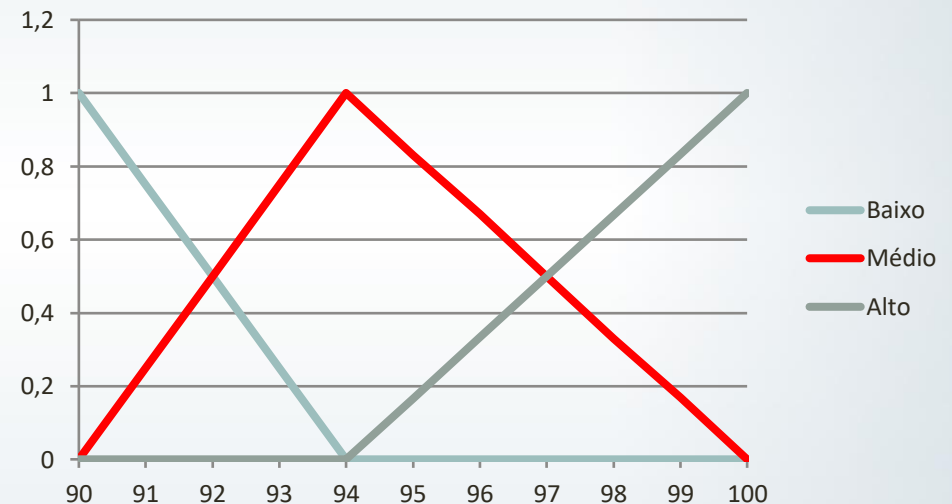
## **Fim**

# Sistema de Inferência Fuzzy para avaliação de desempenho de operação – Caso exemplo

- Considere um sistema de inferência fuzzy para avaliar o desempenho das operações (Y) com base em qualidade de conformidade (c1) e pontualidade de entrega (c2);
- Para fuzzificar os valores de entrada das variáveis, precisamos definir as variáveis linguísticas de entrada;
- No nosso exemplo, vamos definir:
  - 3 termos linguísticos para as variáveis de entrada qualidade e entrega;
- Também temos que definir os termos da variável de saída. No exemplo, vamos definir:
  - 3 termos linguísticos para a variável de saída desempenho.

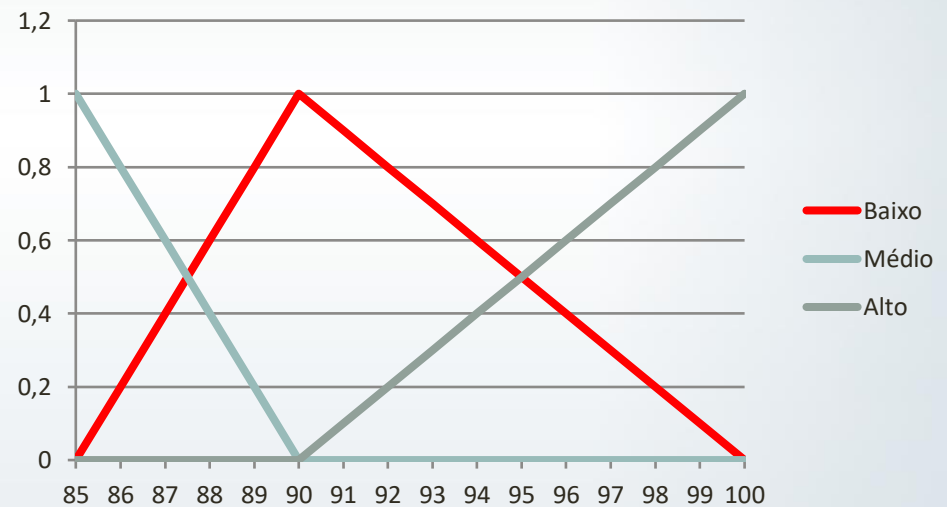
# Variável linguística de entrada - Qualidade

Qualidade	Baixo	Médio	Alto
90	1	0	0,00
91	0,75	0,25	0,00
92	0,5	0,5	0,00
93	0,25	0,75	0,00
94	0	1	0,00
95	0	0,83	0,17
96	0	0,67	0,33
97	0	0,50	0,50
98	0	0,33	0,67
99	0	0,17	0,83
100	0	0,00	1,00



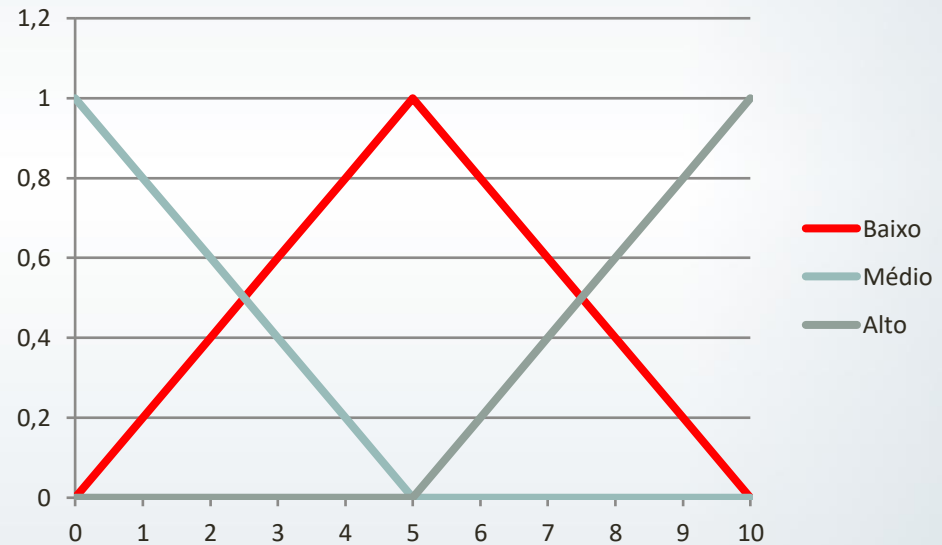
# Variável linguística de entrada - Confiabilidade

Confiabilidade	Baixo	Médio	Alto
85	1	0	0
86	0,8	0,2	0
87	0,6	0,4	0
88	0,4	0,6	0
89	0,2	0,8	0
90	0	1	0
91	0	0,9	0,1
92	0	0,8	0,2
93	0	0,7	0,3
94	0	0,6	0,4
95	0	0,5	0,5
96	0	0,4	0,6
97	0	0,3	0,7
98	0	0,2	0,8
99	0	0,1	0,9
100	0	0	1



# Variável linguística de saída - Desempenho

Desempenho	Baixo	Médio	Alto
0	1	0	0
1	0,8	0,2	0
2	0,6	0,4	0
3	0,4	0,6	0
4	0,2	0,8	0
5	0	1	0
6	0	0,8	0,2
7	0	0,6	0,4
8	0	0,4	0,6
9	0	0,2	0,8
10	0	0	1

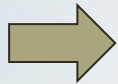




# Algoritmo de Inferência fuzzy

## Início

<1> Apresentar um conjunto de valores de entrada *crisp* às variáveis de entrada;



<2> Fuzificar os valores de entrada;

<3> Verificar quais regras de inferência são ativadas pelos valores de entrada fuzificados;

<4> Determinar a saída de cada regra de inferência ativada usando os termos linguísticos consequentes;

<5> Combinar as contribuições individuais de todas as regras ativadas a fim de se produzir uma resposta final;

<6> Defuzificar o conjunto *fuzzy* resultante do passo <5>;

<7> Apresentar os valores de saída em formato *crisp*.

## Fim

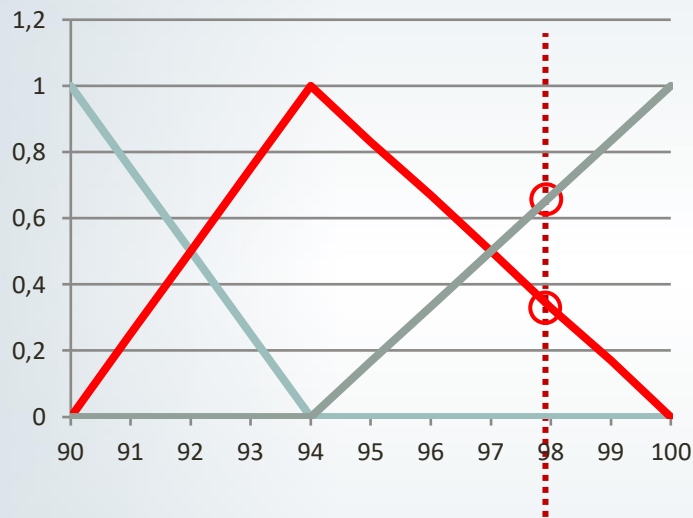
# Fuzzificação de números crisp

- Processo pelo qual valores numéricos de entrada são convertidos em correspondentes termos linguísticos com determinados graus de pertinência.

Ex: considere os níveis das variáveis de entrada:

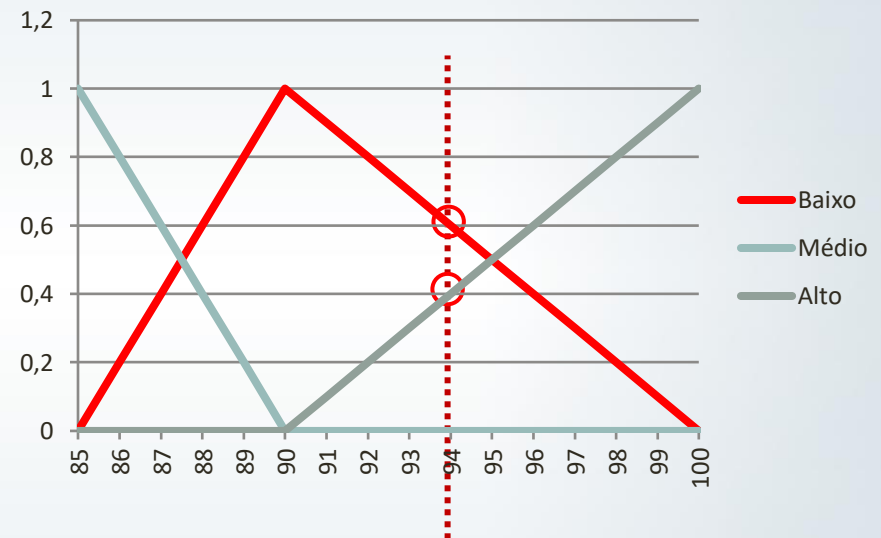
- Nível de qualidade (c1): 98,0%
- Confiabilidade de entrega (c2): 94%

# Fuzzificação dos valores de entrada



$$X_{c1} = 98,0$$

Mélio com pertinência 0,33  
Alto com pertinência 0,67



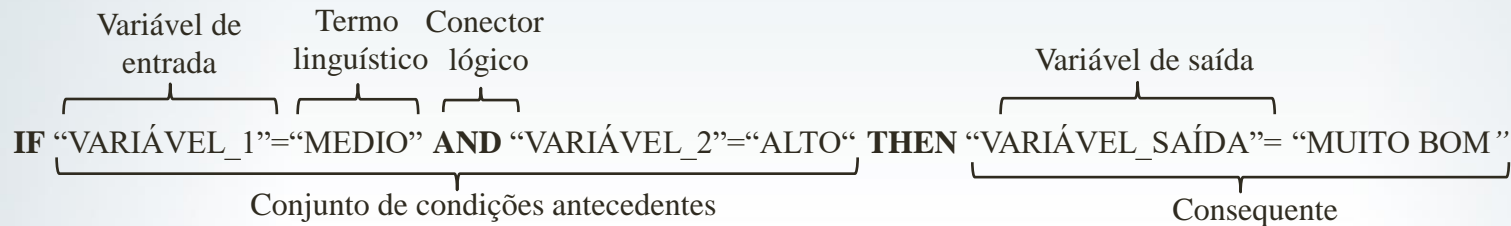
$$X_{c2} = 94,0$$

Mélio com pertinência 0,6  
Alto com pertinência 0,4

# Base de Regras

- A base de regras define o nível da resposta (consequente) em função dos níveis das variáveis de entrada, como relações lógicas de causa e efeito:
  - Ex:  
*Se (C1 é médio) e (C2 é alto) então Y é médio*
- A base de regras tem tantas regras quantas forem as possíveis combinações de termos linguísticos.
  - Ex: para duas variáveis de entrada com 3 termos cada, temos 9 regras.

# Base de Regras – Estrutura de uma regra



# Base de Regras

Regra	<i>If</i>			<i>Then</i>
	Qualidade	Operador	Confiabilidade	Desempenho
1	baixo	AND	baixo	baixo
2	baixo	AND	médio	baixo
3	baixo	AND	alto	médio
4	médio	AND	baixo	médio
5	médio	AND	médio	médio
6	médio	AND	alto	médio
7	alto	AND	baixo	médio
8	alto	AND	médio	alto
9	alto	AND	alto	alto

# Algoritmo de Inferência fuzzy

## Início

<1> Apresentar um conjunto de valores de entrada *crisp* às variáveis de entrada;

<2> Fuzificar os valores de entrada;

→ <3> Verificar quais regras de inferência são ativadas pelos valores de entrada fuzificados;

<4> Determinar a saída de cada regra de inferência ativada usando os termos linguísticos consequentes;

<5> Combinar as contribuições individuais de todas as regras ativadas a fim de se produzir uma resposta final;

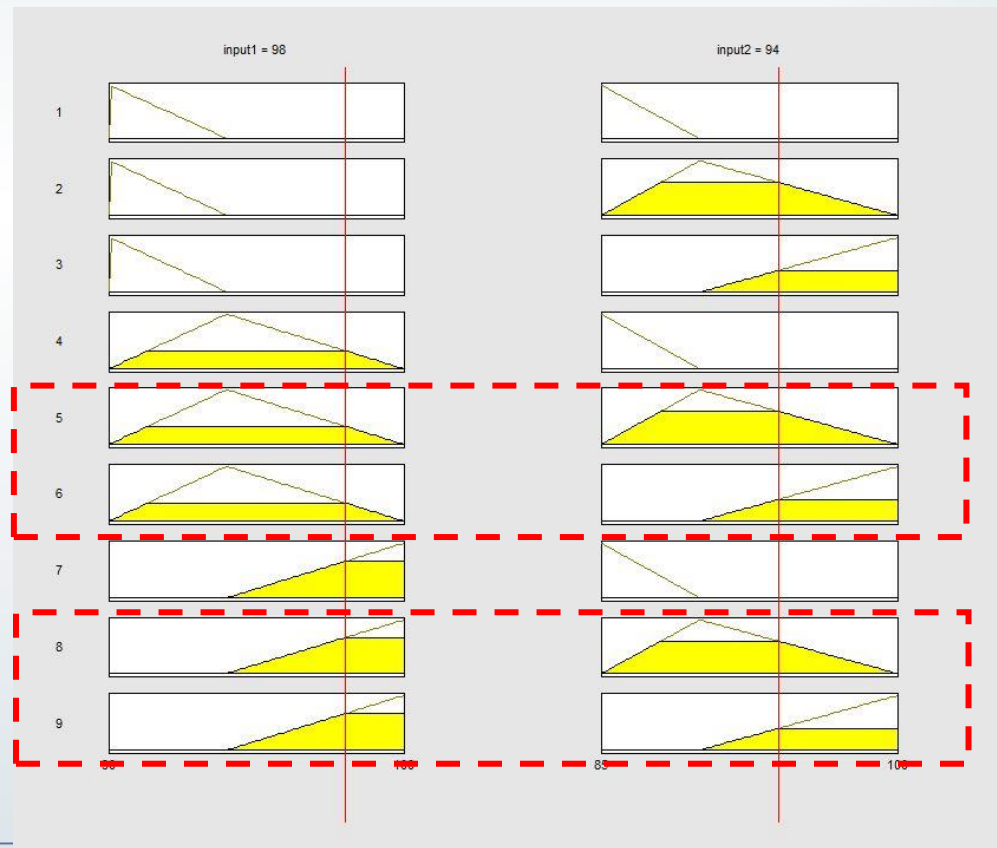
<6> Defuzificar o conjunto *fuzzy* resultante do passo <5>;

<7> Apresentar os valores de saída em formato *crisp*.

## Fim

# Ativação das regras de inferência

- Os valores das variáveis de entrada definem quais regras são ativadas;
- A regra só é ativada se todos os termos linguísticos da parte antecedente forem ativados com pertinência maior que zero.



*No exemplo, as regras 5, 6, 8 e 9 foram ativadas*



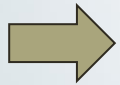
# Algoritmo de Inferência fuzzy

## Início

<1> Apresentar um conjunto de valores de entrada *crisp* às variáveis de entrada;

<2> Fuzificar os valores de entrada;

<3> Verificar quais regras de inferência são ativadas pelos valores de entrada fuzificados;



<4> Determinar a saída de cada regra de inferência ativada usando os termos linguísticos consequentes;

<5> Combinar as contribuições individuais de todas as regras ativadas a fim de se produzir uma resposta final;

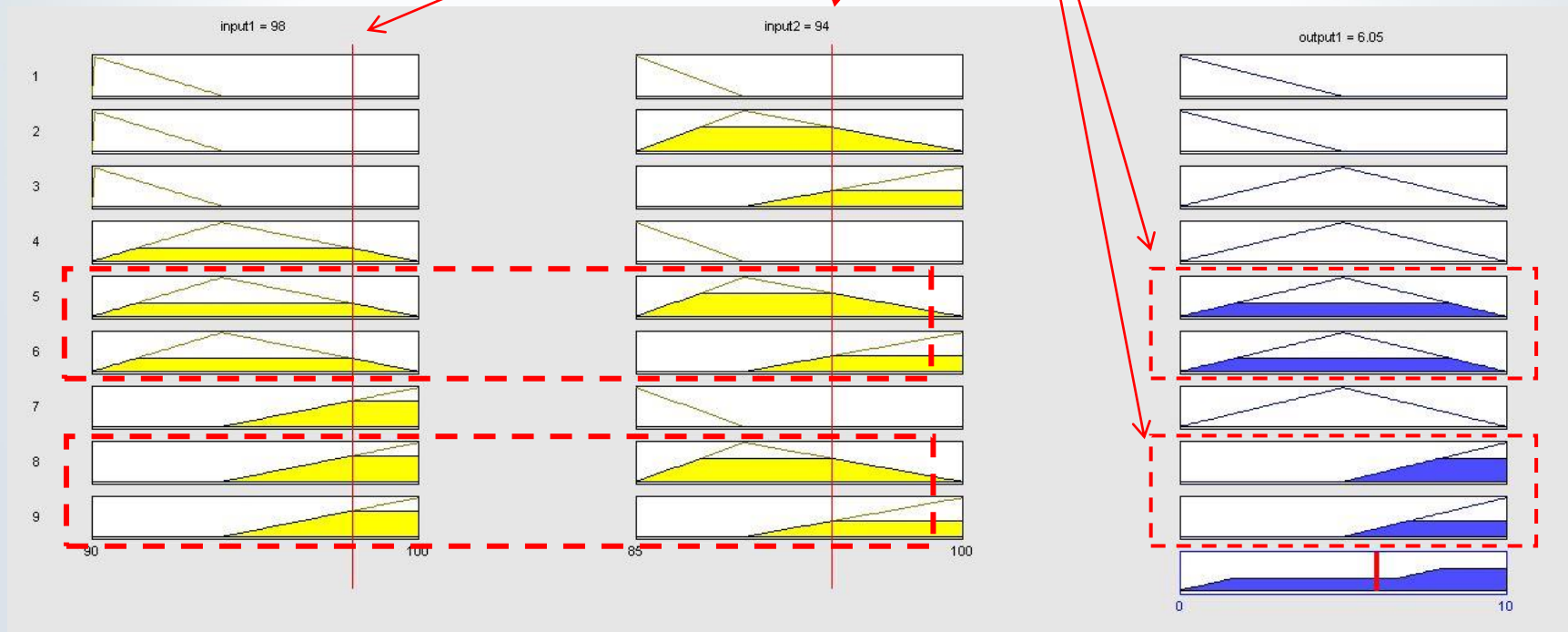
<6> Defuzificar o conjunto *fuzzy* resultante do passo <5>;

<7> Apresentar os valores de saída em formato *crisp*.

## Fim

# Mecanismo de inferência

Determinar os conjuntos fuzzy consequentes (saída) para cada regra ativada como consequência dos valores crisp das variáveis de entrada



# Mecanismo de inferência

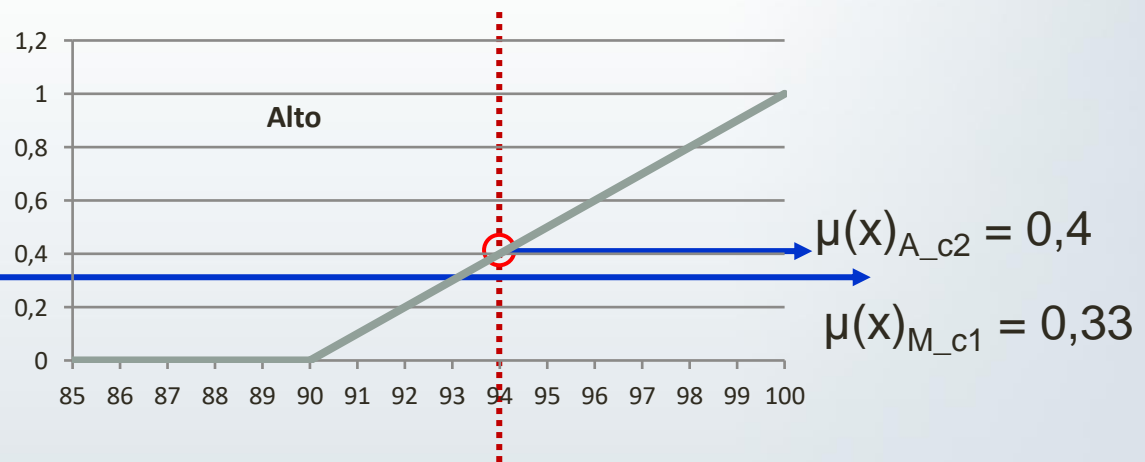
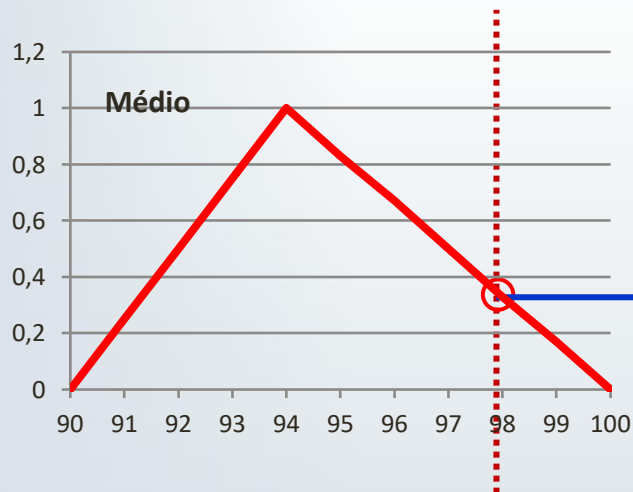
- Após a fuzzificação dos valores de entrada, inicia-se o processo de inferência, que consiste nas etapas (somente para as regras ativadas):
  - Criação das relações de implicação  $R$  entre o conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecedentes e o consequente da regra;
  - Composição (entre um conjunto singleton e a relação de implicação) para determinação dos consequentes;
  - Agregação dos consequentes de todas as regras.

# Mecanismo de inferência

- Após a fuzzificação dos valores de entrada, inicia-se o processo de inferência, que consiste nas etapas (somente para as regras ativadas):
  - Criação das relações de implicação  $R$  entre o conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecedentes e o consequente da regra;
  - Composição (entre um conjunto singleton e a relação de implicação) para determinação dos consequentes;
  - Agregação dos consequentes de todas as regras.

# Mecanismo de inferência – **Relação de implicação**

- Criação das relações de implicação R entre o conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecedentes e o conseqüente da regra;
- Conjunto fuzzy resultante da agregação:
  - $\text{MIN} (\mu(x)_{M\_c1} ; \mu(x)_{A\_c2}) \Rightarrow$  *conjunto fuzzy resultante da agregação é o termo Médio de C1*



*Para a regra 6, o conjunto fuzzy resultante da agregação é o termo Médio de C1*

# Mecanismo de inferência – Relação de implicação

- Para a regra 6, a relação de implicação será entre o termo médio de C1 e médio da variável de saída.

Regra	IF			THEN
6	médio	AND	alto	médio

- Para a regra 5, a relação de implicação será entre o termo médio de C1 e médio da variável de saída.

Regra	IF			THEN
5	médio	AND	médio	médio

# Mecanismo de inferência – Relação de implicação

- Para a regra 8, a relação de implicação será entre o termo médio de C2 e alto da variável de saída.

Regra	IF			THEN
8	alto	AND	médio	alto

- Para a regra 9, a relação de implicação será entre o termo alto de C2 e médio da variável de saída.

Regra	IF			THEN
9	alto	AND	alto	alto

# Mecanismo de inferência – Relação de implicação

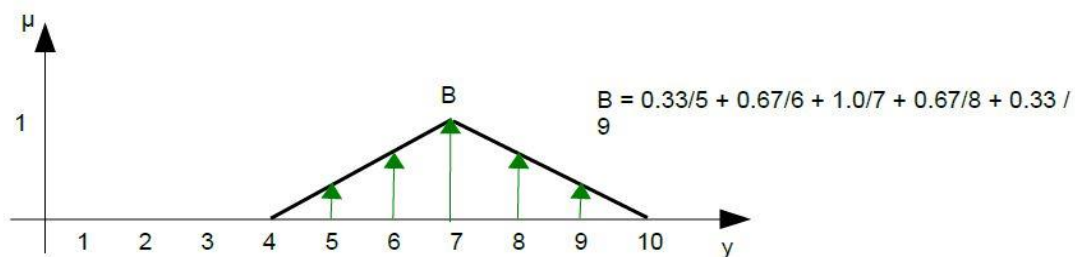
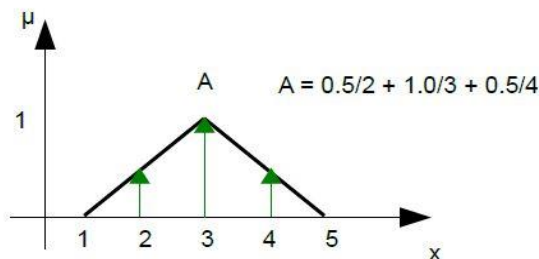
- Formada por uma matriz cujos termos correspondem à relação dos graus de pertinência de um termo antecedente com um termo conseqüente;
- Diferentes operadores podem ser usados para obtenção da relação dos graus de pertinência;
- O mais usado é o operador “MIN”, conhecido como MIN de Mamdani, dado por:

$$\mu_{R_{A \rightarrow B}}(x, y) = \text{Min}\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$$

onde  $A$  é o conjunto fuzzy antecedente e  $B$  é o conjunto fuzzy conseqüente



# Relação de implicação de Mamdani - exemplo



$$R_{A \rightarrow B}(x, y) = 0.33/(2.5) + 0.50/(2.6) + 0.50/(2.7) + 0.50/(2.8) + 0.33/(2.9) \\ + 0.33/(3.5) + 0.67/(3.6) + 1.00/(3.7) + 0.67/(3.8) + 0.33/(3.9) \\ + 0.33/(4.5) + 0.50/(4.6) + 0.50/(4.7) + 0.50/(4.8) + 0.33/(4.9)$$

Pontos de discretização

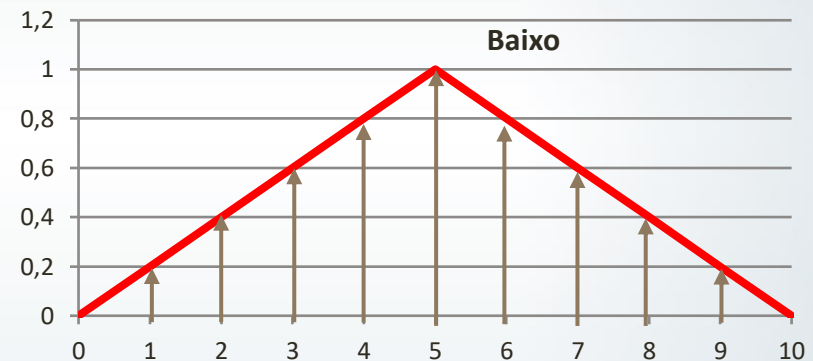
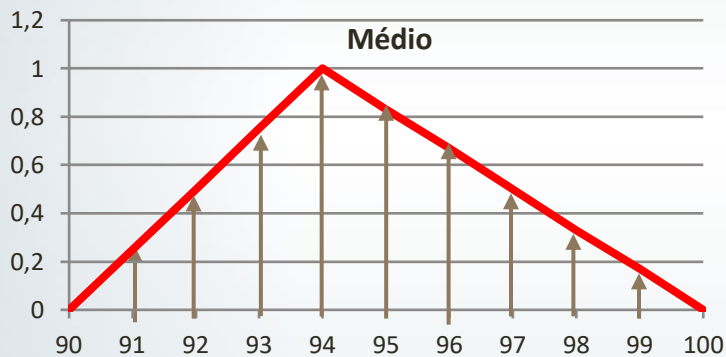
	5	6	7	8	9
2	0.33	0.50	0.50	0.50	0.33
3	0.33	0.67	1.00	0.67	0.33
4	0.33	0.50	0.50	0.50	0.33

Mínimo do grau de pertinência entre os dois conjuntos na posição 2 e 5

# Relação de implicação

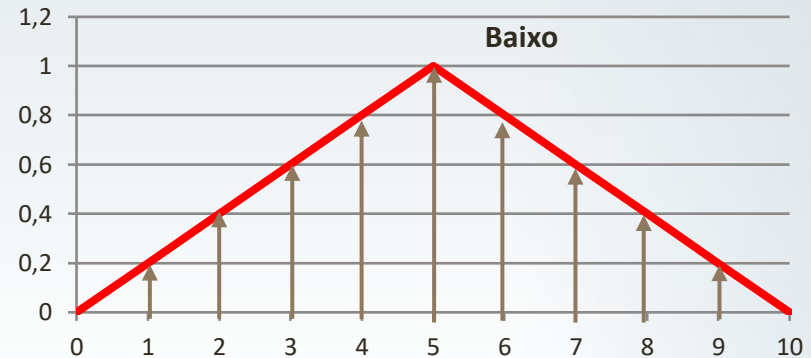
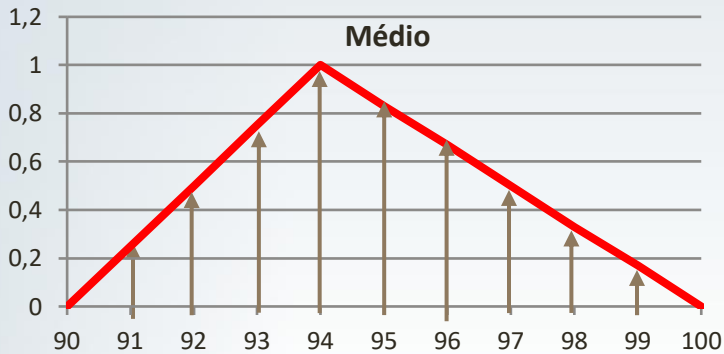
- Para a regra 6 do nosso exemplo:

Regra	IF		THEN
6	médio	AND alto	médio



$$R_{M_{C1} \rightarrow M_Y}(x, y) = 0,2 / (91, 1) + 0,25 / (91, 2) + \dots + 0,2 / (91, 9) + 0,2 / (92, 1) + \dots + 0,17 / (99, 9)$$

# Relação de implicação - Regra 6



$$R_{M_{c1} \rightarrow M_Y}(x, y) = 0,2 / (91, 1) + 0,25 / (91, 2) + \dots + 0,2 / (91, 9) + 0,2 / (92, 1) + \dots + 0,17 / (99, 9)$$

$$R_{M_{c1} \rightarrow M_Y}(x, y) = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,80 & 1,00 & 0,80 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,80 & 0,83 & 0,80 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,67 & 0,67 & 0,67 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,20 \\ 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 \end{bmatrix}$$

# Atividade

- Calcular as relações de implicação para as regras 5, 6, 8 e 9.

# Mecanismo de inferência

- Após a fuzzificação dos valores de entrada, inicia-se o processo de inferência, que consiste nas etapas (somente para as regras ativadas):
  - Criação das relações de implicação  $R$  entre o conjunto fuzzy resultante da agregação dos antecedentes e o consequente da regra;
  - **Composição (entre um conjunto singleton e a relação de implicação) para determinação dos consequentes;**
  - Agregação dos consequentes de todas as regras.

# Mecanismo de inferência – Composição para determinação dos consequentes

- Composição entre um singleton e a Relação de implicação;
- Definição de singleton: é um caso particular de conjunto fuzzy cujo suporte é um único ponto  $x \in X$ , Com pertinência  $\mu(x) = 1,0$
- Para determinação do consequente de cada regra, faz-se a composição entre um singleton com suporte no valor  $x$  correspondente ao valor crisp da variável de entrada com menor grau de pertinência e a relação de implicação.

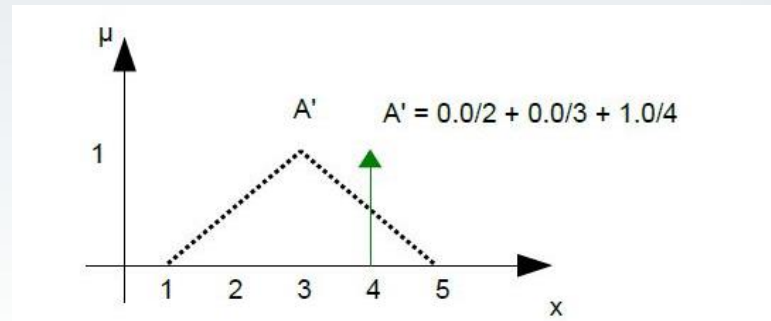
# Mecanismo de inferência – **Composição para determinação dos consequentes**

- A composição é feita por meio de agregação de números fuzzy. Os operadores normalmente usados são: MAX-MIN; MAX-PROD e MAX-MÉDIA:
- Usando o operador MAX-MIN, então:

$$A \circ B (x, z) = \text{MAX} \{ \text{MIN} (\mu_A(x, y) , \mu_B(x, y)) \}$$

# Mecanismo de inferência – Composição para determinação dos consequentes

- Para o singleton  $A'$ :



- A composição com:

$$R_{A \rightarrow B}(x, y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

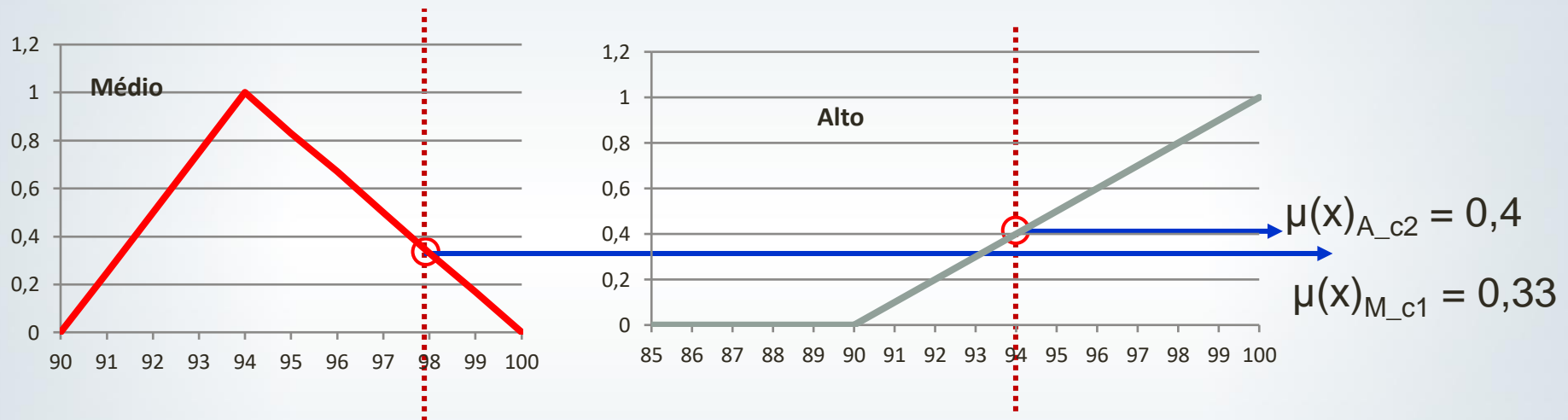
- É dada por:

$$B'(x) = A'(x) \circ R_{A \rightarrow B} \rightarrow B'(y) = [001] \circ \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



# Mecanismo de inferência – Composição para determinação dos consequentes

Para a regra 6, o conjunto fuzzy resultante da agregação é o termo Médio de C1



- Portanto, para a regra 6, o singleton é dado por:

$$M_{C1}'(x) = [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 ]$$

# Mecanismo de inferência – Composição para determinação dos consequentes

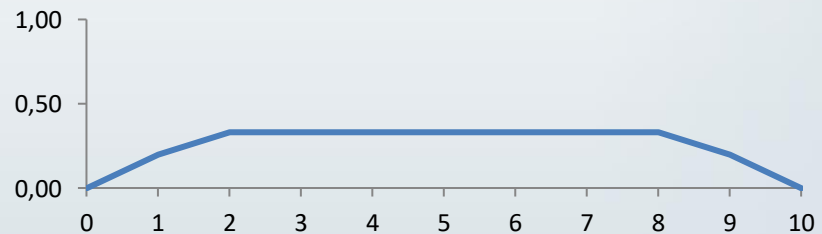
- A composição é dada por:

$$M_{c1}'(x) \circ R_{M_{c1} \rightarrow M_Y}(x, y) = \text{MAX}\{\text{MIN}(\mu_{M_{c1}}(x), \mu_R(x, y))\} =$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \circ \begin{bmatrix} 0,20 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,75 & 0,75 & 0,75 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,80 & 1,00 & 0,80 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,80 & 0,83 & 0,80 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,67 & 0,67 & 0,67 & 0,60 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,40 & 0,20 \\ 0,20 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0,20 \\ 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 & 0,17 \end{bmatrix}$$

$$M_{c1}'(x) \circ R_{M_{c1} \rightarrow M_Y}(x, y) = [0,20 \ 0,33 \ 0,33 \ 0,33 \ 0,33 \ 0,33 \ 0,33 \ 0,33 \ 0,20]$$

E o consequente da regra é dado por:

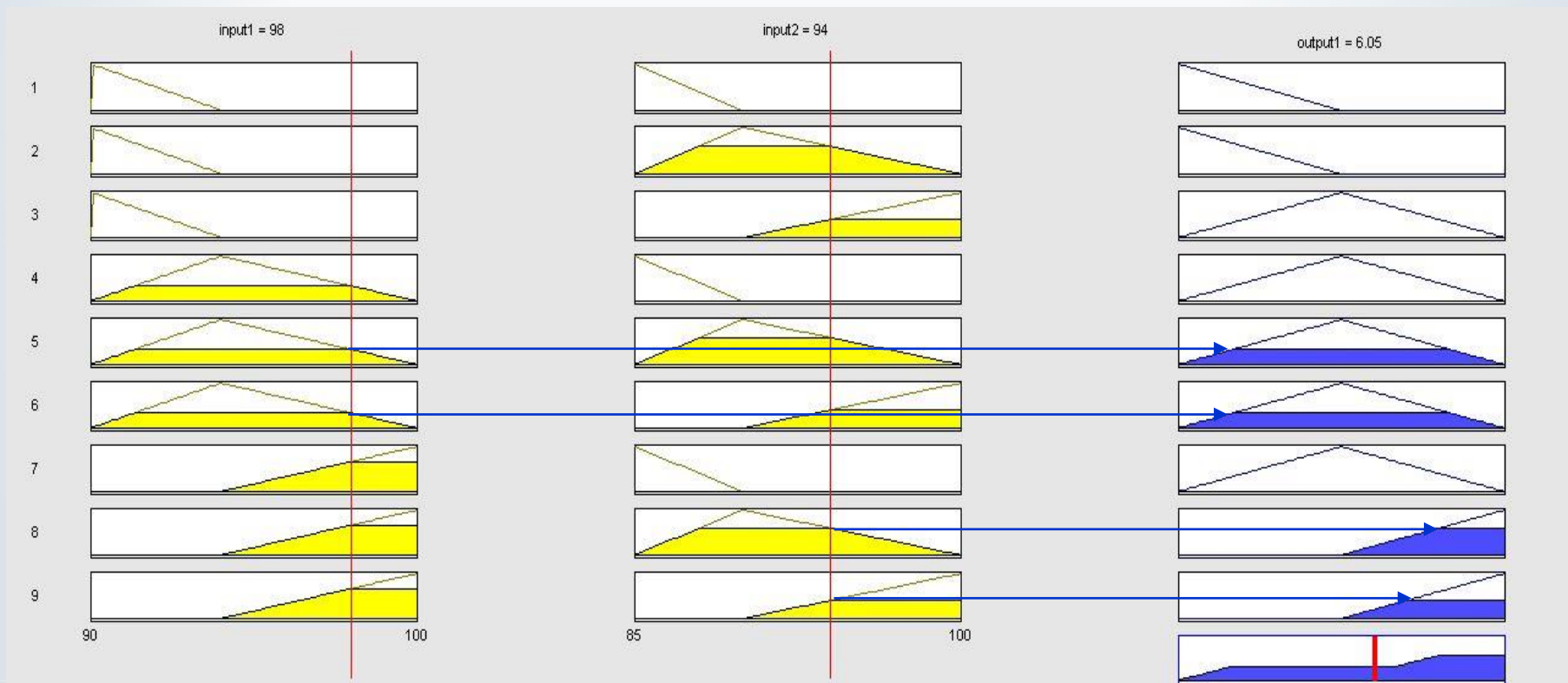


# Atividade

- Fazer a composição para todas as regras

# Determinação dos consequentes

- As operações de implicação e composição com singleton resultam nos consequentes ilustrados.



# Algoritmo de Inferência fuzzy

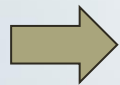
## Início

<1> Apresentar um conjunto de valores de entrada *crisp* às variáveis de entrada;

<2> Fuzificar os valores de entrada;

<3> Verificar quais regras de inferência são ativadas pelos valores de entrada fuzificados;

<4> Determinar a saída de cada regra de inferência ativada usando os termos linguísticos consequentes;



<5> Combinar as contribuições individuais de todas as regras ativadas a fim de se produzir uma resposta final;

<6> Defuzificar o conjunto *fuzzy* resultante do passo <5>;

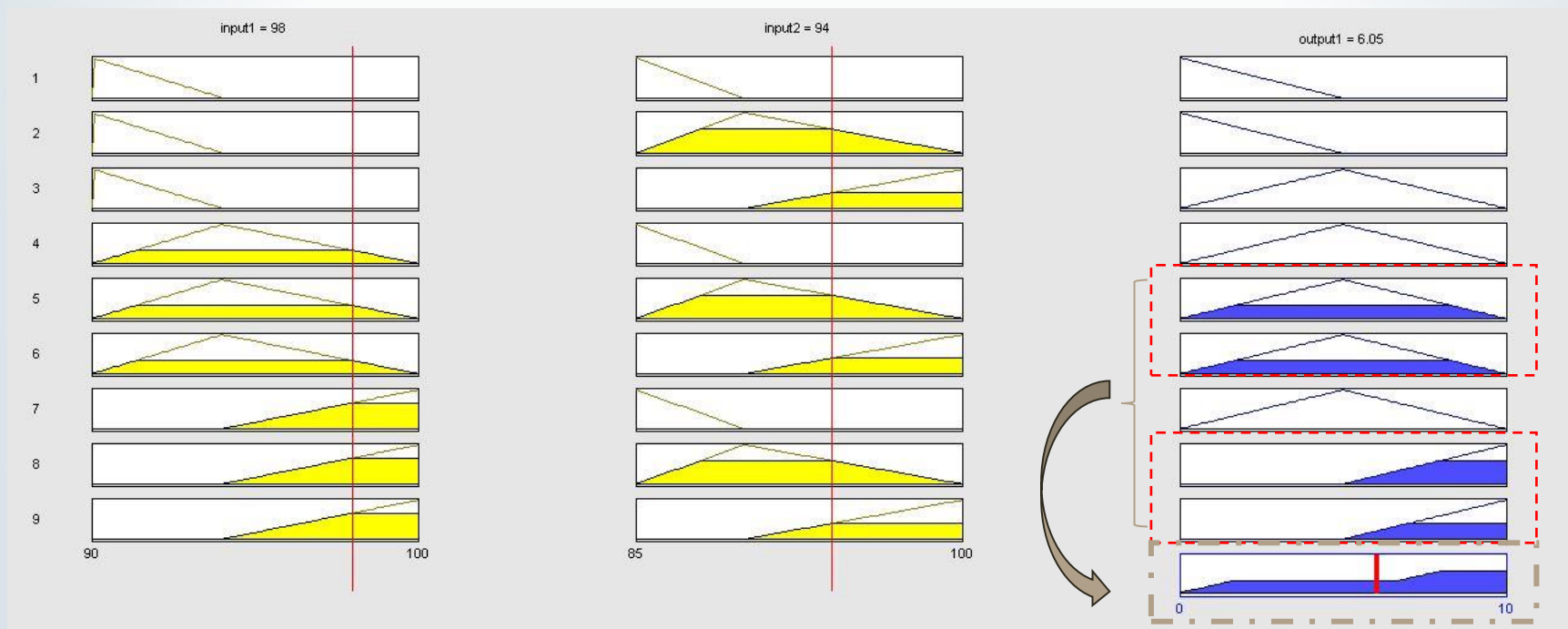
<7> Apresentar os valores de saída em formato *crisp*.

## Fim

# Agregação das contribuições individuais das regras

- A agregação é feita usando o operador MAX:

$$AG(.) = \text{MAX}(\mu_{R1}(x), \mu_{R2}(x) \dots \mu_{Rn}(x))$$



# Atividade

- Agregar os resultados das regras ativadas em um conjunto fuzzy.

# Algoritmo de Inferência fuzzy

## Início

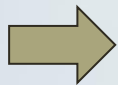
<1> Apresentar um conjunto de valores de entrada *crisp* às variáveis de entrada;

<2> Fuzificar os valores de entrada;

<3> Verificar quais regras de inferência são ativadas pelos valores de entrada fuzificados;

<4> Determinar a saída de cada regra de inferência ativada usando os termos linguísticos consequentes;

<5> Combinar as contribuições individuais de todas as regras ativadas a fim de se produzir uma resposta final;



<6> Defuzificar o conjunto *fuzzy* resultante do passo <5>;

<7> Apresentar os valores de saída em formato *crisp*.

## Fim



# Desfuzzificação

- Os principais métodos de desfuzzificação são:

- Centro de área:

$$\text{CoA} = \frac{\sum_{k=1}^n \mu(x_k) * x_k}{\sum_{k=1}^n \mu(x_k)}$$

Onde  $\mu_C(x_k)$  é o grau de pertinência do conjunto resultante da composição no ponto de discretização  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

- Média dos máximos:

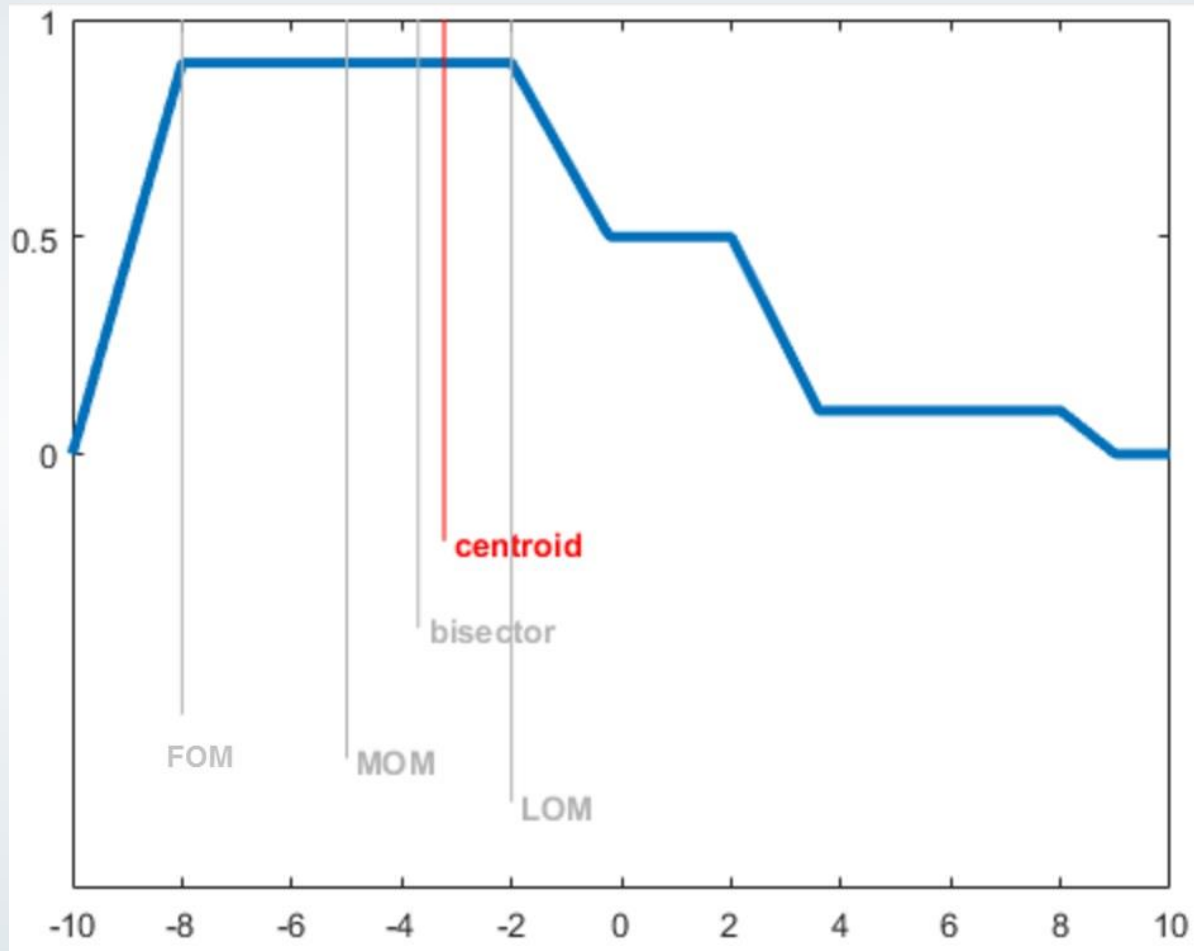
$$\text{MoM} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$$

Onde  $m$  corresponde ao número de pontos com pertinência máxima

- Primeiro dos máximos:

$$\text{FoM} = \underset{x}{\text{Min}}\{\text{Max}\{\mu\}\}$$

# Desfuzzificação



# Atividade

- Desfuzzificar

# Modelagem do sistema de inferência

- Variáveis de entrada e saída:
  - Quantidade de termos;
  - Tipo da função (triangular, trapezoidal etc);
  - Valores dos vértices das funções;
  - Universo de discurso.
- Escolha dos consequentes das regras:
  - Opinião de especialistas;
  - Escolha dos consequentes embute o peso das variáveis de entrada.

# Modelagem do sistema de inferência

- Variáveis de entrada:
  - Número de variáveis de entrada aumenta exponencialmente o número de regras:

$$\text{Número de regras} = \prod_{i=1}^k Nt_i$$

Onde  $Nt_i$  corresponde ao número de termos da variável  $i$

- Quando todas as variáveis tem o mesmo número de termos:

$$\text{Número de regras} = (\text{Número de termos})^{\text{número de variáveis}}$$

# Modelagem do sistema de inferência

- Operadores:
  - Agregação dos antecedentes (AND);
  - Implicação;
  - Composição;
  - Agregação das saídas das regras;
  - Desfuzzificação.