

Fuzzy TOPSIS

SEP 5836 Técnicas de Suporte à Decisão Aplicadas à
Gestão de Desempenho de Cadeias de Suprimento

Fuzzy TOPSIS

- Chen (2000) propôs a primeira combinação entre TOPSIS e a teoria dos conjuntos *fuzzy*.
 - CHEN, C. T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 114, p. 1–9, 2000.
 - CHEN, C.; LIN, C.; HUANG, S. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection. **International Journal of Production Economics**, v.102, p. 289–301, 2006.
- No método *Fuzzy-TOPSIS*, as pontuações das alternativas e o peso dos critérios de decisão são definidos como variáveis linguísticas.

Passos do método

- Agregar os valores linguísticos fornecidos por cada um dos tomadores de decisão (DM_r) sobre o desempenho das alternativas.

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{K} [\tilde{x}_{ij}^1 + \tilde{x}_{ij}^r + \dots + \tilde{x}_{ij}^k]$$

- \tilde{x}_{ij}^r descreve as pontuações da alternativa A_i ($i = 1, \dots, n$), em relação ao critério C_j ($j = 1, \dots, m$), dado pelo tomador de decisão DM_r ($r = 1, \dots, k$).

Passos do método

- Agregar os valores linguísticos fornecidos por cada um dos tomadores de decisão (DM_r) sobre os pesos dos critérios

$$\tilde{w}_j = \frac{1}{K} [\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_j^2 + \dots + \tilde{w}_j^k]$$

- \tilde{w}_j^r descreve o peso do critério, dado por cada DM_r .

Passos do método

- Montar uma matriz de decisão *fuzzy* \tilde{D} para as pontuações das alternativas e um vetor *fuzzy* \tilde{W} para o peso dos critérios de acordo com as equações

$$\tilde{D} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_j & \dots & C_m \\ A_1 & \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1j} & \dots & \tilde{x}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_i & \tilde{x}_{i1} & \tilde{x}_{i2} & \dots & \tilde{x}_{ij} & \dots & \tilde{x}_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_n & \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \dots & \tilde{x}_{nj} & \dots & \tilde{x}_{nm} \end{matrix}$$

$$\tilde{W} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_m]$$

Passos do método

- Normalizar a matriz \tilde{D} usando uma escala de transformação linear. A matriz normalizada \tilde{R} é dada pelas equações abaixo

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{l_{ij}}{u_j^+}, \frac{m_{ij}}{u_j^+}, \frac{u_{ij}}{u_j^+} \right), u_j^+ = \max_i u_{ij} \text{ (critérios de benefício)}$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{l_j^-}{u_{ij}}, \frac{l_j^-}{m_{ij}}, \frac{l_j^-}{l_{ij}} \right), l_j^- = \min_i l_{ij} \text{ (critérios de custo)}$$

Passos do método

- Obter a matriz normalizada e ponderada \tilde{V} por meio da multiplicação dos pesos \tilde{w}_j pelos elementos \tilde{r}_{ij} da matriz normalizada

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{m \times n}$$

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} * \tilde{w}_j$$

Passos do método

- Definir a solução ideal positiva *fuzzy* (*Fuzzy Positive Ideal Solution*, FPIS, A^+) e a solução ideal negativa (*Fuzzy Negative Ideal Solution*, FNIS, A^-),

em que $\tilde{v}_j^+ = (1, 1, 1)$ e $\tilde{v}_j^- = (0, 0, 0)^*$.

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\}$$

$$A^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_j^-, \dots, \tilde{v}_m^-\}$$

* Segundo Chen (2000)

Passos do método

- Calcular a distância D_i^+ entre os valores de FPIS e as pontuações das alternativas da matriz \tilde{R} . Analogamente, calcular a distância D_i^- entre os valores de FNIS e as pontuações das alternativas

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+)$$

$$D_i^- = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-)$$

$$d(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sqrt{\frac{1}{3} [(l_x - l_z)^2 + (m_x - m_z)^2 + (u_x - u_z)^2]}$$

Passos do método

- Para cada uma das alternativas avaliadas, calcular o coeficiente de aproximação CC_i

$$CC_i = \frac{D_i^-}{(D_i^+ + D_i^-)}$$

- Define-se um *ranking* a partir da ordenação decrescente dos valores de CC_i . Quanto mais próximo 1,0 for este valor, melhor é o desempenho global da alternativa.

Solução ideal positiva e negativa (Chen et al., 2006)

- Para definir a solução ideal positiva *fuzzy* (FPIS, A^+) e a solução ideal negativa (FNIS, A^-), Chen et al. 2006 propõem:

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_j^+ = \max_i \{u_{vij}\}$$

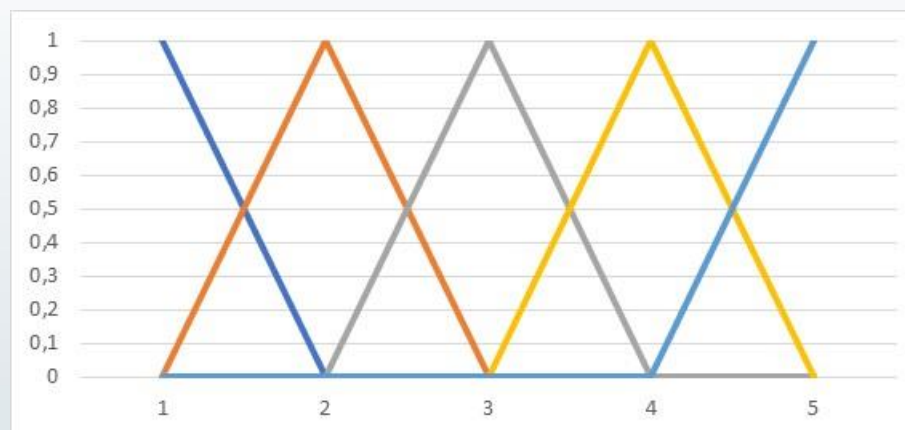
$$A^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_j^-, \dots, \tilde{v}_m^-\} \quad \tilde{v}_j^- = \min_i \{l_{vij}\}$$

Exemplo

- Avaliação de cinco fornecedores ($A_i, i = 1, \dots, n$) por dois decisores ($DM_r, r = 1, \dots, k$) com base nos critérios custo (C_1), qualidade (C_2), confiabilidade (C_3) e reputação (C_4).

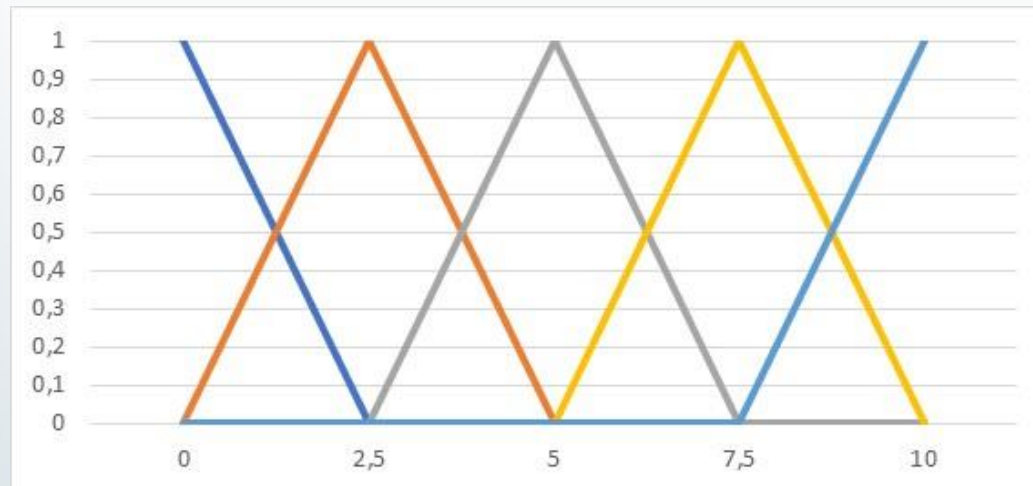
Termos linguísticos e números fuzzy para o peso dos critérios

Linguistic Terms	Fuzzy Triangular Number
Nada importante (NI)	(1,0, 1,0, 2,0)
Pouco importante (PI)	(1,0, 2,0, 3,0)
Medianamente importante (MI)	(2,0, 3,0, 4,0)
Importante (I)	(3,0, 4,0, 5,0)
Muito importante (MI)	(4,0, 5,0, 5,0)



Termos linguísticos e números fuzzy para a avaliação das alternativas

Linguistic Terms	Fuzzy Triangular Number
Muito ruim (MR)	(0,0, 0,0, 2,5)
Ruim (R)	(0,0, 2,5, 5,0)
Médio (M)	(2,5, 5,0, 7,5)
Bom (B)	(5,0, 7,5, 10,0)
Muito bom (MB)	(7,5, 10,0, 10,0)



Julgamentos dos decisores

- Avaliação das alternativas e importância dos critérios (DM1)

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação
A ₁	R	R	MB	B
A ₂	M	MB	R	M
A ₃	B	B	B	MR
A ₄	R	M	M	M
A ₅	MR	MR	R	MB

W ₅	IM	MI	I	MI
----------------	----	----	---	----

	Custo			Qualidade			Confiabilidade			Reputação		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
A ₁	0	2,5	5	0	2,5	5	7,5	10	10	5	7,5	10
A ₂	2,5	5	7,5	7,5	10	10	0	2,5	5	2,5	5	7,5
A ₃	5	7,5	10	5	7,5	10	5	7,5	10	0	0	2,5
A ₄	0	2,5	5	2,5	5	7,5	2,5	5	7,5	2,5	5	7,5
A ₅	0	0	2,5	0	0	2,5	0	2,5	5	7,5	10	10

W ₅	3	4	5	4	5	5	3	4	5	2	3	4
----------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Julgamentos dos decisores

- Avaliação das alternativas e importância dos critérios (DM2)

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação
A ₁	R	R	MB	M
A ₂	B	B	M	B
A ₃	MB	M	B	M
A ₄	MR	B	B	B
A ₅	MR	M	M	MB

W ₅	MI	MI	MI	PI
----------------	----	----	----	----

	Custo			Qualidade			Confiabilidade			Reputação		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
A ₁	0	2,5	5	0	2,5	5	7,5	10	10	2,5	5,0	7,5
A ₂	5,0	7,5	10,0	5,0	7,5	10,0	2,5	5	7,5	5,0	7,5	10,0
A ₃	7,5	10	10	2,5	5	7,5	5	7,5	10	2,5	5	7,5
A ₄	0	0	2,5	5	7,5	10	5	7,5	10	5	7,5	10
A ₅	0	0	2,5	2,5	5	7,5	2,5	5	7,5	7,5	10	10

W ₅	4	5	5	4	5	5	2	3	4	1	2	3
----------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Agregação dos julgamentos pela média aritmética

$$\tilde{X}_{ij} = \frac{1}{K} [\tilde{X}_{ij}^1 + \tilde{X}_{ij}^r + \dots + \tilde{X}_{ij}^k]$$

- Para alternativa A_2 e critério C_1 :

$$\tilde{X}_{21} = \frac{1}{2} [\tilde{X}_{21}^1 + \tilde{X}_{21}^2] = \frac{1}{2} [(2,5 + 5,0; 5,0 + 7,5; 7,5 + 10)] =$$

$$\tilde{X}_{21} = (3,75; 6,25; 8,75)$$

	Custo			Qualidade			Confiabilidade			Reputação		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
A_1	0	2,5	5	0	2,5	5	7,5	10	10	3,75	6,25	8,75
A_2	3,75	6,25	8,75	6,25	8,75	10	1,25	3,75	6,25	3,75	6,25	8,75
A_3	6,25	8,75	10	3,75	6,25	8,75	5	7,5	10	1,25	2,5	5
A_4	0	1,25	3,75	3,75	6,25	8,75	3,75	6,25	8,75	3,75	6,25	8,75
A_5	0	0	2,5	1,25	2,5	5	1,25	3,75	6,25	7,5	10	10

W_5	3,50	4,50	5,00	4,00	5,00	5,00	2,50	3,50	4,50	1,50	2,50	3,50
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Normalizar a matriz \tilde{D}

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n} \quad \tilde{r}_{ij} = \left(\frac{l_{ij}}{u_j^+}, \frac{m_{ij}}{u_j^+}, \frac{u_{ij}}{u_j^+} \right), \quad u_j^+ = \max_i u_{ij} \quad (\text{critérios de benefício})$$

- Para a alternativa A2, considerando Custo (C1) como de benefício:

	Custo		
	l	m	u
A ₁	0	2,5	5
A ₂	3,75	6,25	8,75
A ₃	6,25	8,75	10
A ₄	0	1,25	3,75
A ₅	0	0	2,5

$$u_1^+ = \max_i u_{i1} = 10,0$$

$$\tilde{r}_{21} = \left(\frac{l_{ij}}{u_j^+}, \frac{m_{ij}}{u_j^+}, \frac{u_{ij}}{u_j^+} \right) = \left(\frac{3,75}{10}, \frac{6,25}{10}, \frac{8,75}{10} \right)$$

Matriz normalizada e ponderada \tilde{V}

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{m \times n} \quad \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} * \tilde{w}_j$$

- Para alternativa A2 e critério C1:

$$\tilde{w}_1 = (3,5; 4,5; 5) \quad \tilde{r}_{21} = (0,38; 0,63; 0,88)$$

$$\tilde{v}_{21} = (3,5 * 0,38; 4,5 * 0,63; 5 * 0,88)$$

$$\tilde{v}_{21} = (1,31; 2,81; 4,38)$$

Matriz normalizada e ponderada \tilde{V}

	Custo			Qualidade			Confiabilidade			Reputação		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
A_1	0,00	1,13	2,50	0,00	1,25	2,50	1,88	3,50	4,50	0,56	1,56	3,06
A_2	1,31	2,81	4,38	2,50	4,38	5,00	0,31	1,31	2,81	0,56	1,56	3,06
A_3	2,19	3,94	5,00	1,50	3,13	4,38	1,25	2,63	4,50	0,19	0,63	1,75
A_4	0,00	0,56	1,88	1,50	3,13	4,38	0,94	2,19	3,94	0,56	1,56	3,06
A_5	0,00	0,00	1,25	0,50	1,25	2,50	0,31	1,31	2,81	1,13	2,50	3,50

Solução ideal positiva e negativa (Chen et al., 2006)

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_j^+ = \max_i \{u_{vij}\}$$

$$A^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_j^-, \dots, \tilde{v}_m^-\} \quad \tilde{v}_j^- = \min_i \{l_{vij}\}$$

	Custo			Qualidade			Confiabilidade			Reputação		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
A ₁	0,00	1,13	2,50	0,00	1,25	2,50	1,88	3,50	4,50	0,56	1,56	3,06
A ₂	1,31	2,81	4,38	2,50	4,38	5,00	0,31	1,31	2,81	0,56	1,56	3,06
A ₃	2,19	3,94	5,00	1,50	3,13	4,38	1,25	2,63	4,50	0,19	0,63	1,75
A ₄	0,00	0,56	1,88	1,50	3,13	4,38	0,94	2,19	3,94	0,56	1,56	3,06
A ₅	0,00	0,00	1,25	0,50	1,25	2,50	0,31	1,31	2,81	1,13	2,50	3,50

$$A^+ = \{(5,0; 5,0; 5,0) (5,0; 5,0; 5,0)(4,5; 4,5; 4,5) (3,5; 3,5; 3,5)\}$$

$$A^- = \{(0,0; 0,0; 0,0) (0,0; 0,0; 0,0)(0,31; 0,31; 0,31) (0,19; 0,19; 0,19)\}$$

Calcular a distância D_i^+

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+) \quad d(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sqrt{\frac{1}{3} [(l_x - l_z)^2 + (m_x - m_z)^2 + (u_x - u_z)^2]}$$

- Para alternativa A2 e critério C1:

$$A^+ = \{(5,0; 5,0; 5,0) (5,0; 5,0; 5,0)(4,5; 4,5; 4,5) (3,5; 3,5; 3,5)\}$$

	Custo		
	l	m	u
A ₁			
A ₂	1,31	2,81	4,38
A ₃			
A ₄			
A ₅			

$$d(\tilde{x}_{21}, \tilde{v}_1^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1,31 - 5)^2 + (2,81 - 5)^2 + (4,38 - 5)^2]} = 2,50$$

Calcular a distância D_i^+

- Para alternativa A2 e critério C2:

$$A^+ = \{(5,0; 5,0; 5,0) (5,0; 5,0; 5,0)(4,5; 4,5; 4,5) (3,5; 3,5; 3,5)\}$$

	Qualidade		
	l	m	u
A ₂	2,50	4,38	5,00

$$d(\tilde{x}_{22}, \tilde{v}_2^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(2,5 - 5)^2 + (4,38 - 5)^2 + (5,0 - 5)^2]} = 1,49$$

Calcular a distância D_i^+

- Para alternativa A2 e critério C3:

$$A^+ = \{(5,0; 5,0; 5,0) (5,0; 5,0; 5,0)(4,5; 4,5; 4,5) (3,5; 3,5; 3,5)\}$$

	Confiabilidade		
	l	m	u
A ₂	0,31	1,31	2,81

$$d(\tilde{x}_{23}, \tilde{v}_3^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(0,31 - 4,5)^2 + (1,31 - 4,5)^2 + (2,81 - 4,5)^2]} = 3,19$$

Calcular a distância D_i^+

- Para alternativa A2 e critério C4:

$$A^+ = \{(5,0; 5,0; 5,0) (5,0; 5,0; 5,0)(4,5; 4,5; 4,5) (3,5; 3,5; 3,5)\}$$

	Reputação		
	l	m	u
A ₂	0,56	1,56	3,06

$$d(\tilde{x}_{24}, \tilde{v}_4^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(0,56 - 3,5)^2 + (1,56 - 3,5)^2 + (3,06 - 3,5)^2]} = 2,05$$

Calcular a distância D_i^+

- Para alternativa A2:

$$D_2^+ = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{2j}, \tilde{v}_j^+) = 2,50 + 1,49 + 3,19 + 2,05 = 9,23$$

- Distância D_i^+ para todas as alternativas:

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação	D^+
A_1	3,93	3,89	1,62	2,05	11,48
A_2	2,50	1,49	3,19	2,05	9,23
A_3	1,74	2,32	2,17	2,73	8,95
A_4	4,26	2,32	2,47	2,05	11,10
A_5	4,62	3,68	3,19	1,49	12,98

Distância D_i^+ D_i^-

- Distância D_i^+ para todas as alternativas:

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação	D ⁺
A ₁	3,93	3,89	1,62	2,05	11,48
A ₂	2,50	1,49	3,19	2,05	9,23
A ₃	1,74	2,32	2,17	2,73	8,95
A ₄	4,26	2,32	2,47	2,05	11,10
A ₅	4,62	3,68	3,19	1,49	12,98

- Distância D_i^- para todas as alternativas:

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação	D ⁻
A ₁	1,58	1,61	3,17	1,85	8,22
A ₂	3,10	4,10	1,55	1,85	10,60
A ₃	3,89	3,22	2,81	0,94	10,86
A ₄	1,13	3,22	2,38	1,85	8,59
A ₅	0,72	1,64	1,55	2,39	6,31

[27]

[27]

Cálculo do coeficiente de aproximação CC_i

$$CC_i = \frac{D_i^-}{(D_i^+ + D_i^-)}$$

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação	D ⁺
A ₁	3,93	3,89	1,62	2,05	11,48
A ₂	2,50	1,49	3,19	2,05	9,23
A ₃	1,74	2,32	2,17	2,73	8,95
A ₄	4,26	2,32	2,47	2,05	11,10
A ₅	4,62	3,68	3,19	1,49	12,98

	Custo	Qualidade	Confiabilidade	Reputação	D ⁻
A ₁	1,58	1,61	3,17	1,85	8,22
A ₂	3,10	4,10	1,55	1,85	10,60
A ₃	3,89	3,22	2,81	0,94	10,86
A ₄	1,13	3,22	2,38	1,85	8,59
A ₅	0,72	1,64	1,55	2,39	6,31

$$CC_1 = \frac{8,22}{(11,48 + 8,22)} = 0,417$$

$$CC_1 = 0,417165$$

$$CC_2 = 0,534673$$

$$CC_3 = 0,548212$$

$$CC_4 = 0,436195$$

$$CC_5 = 0,327168$$

Ordenação das alternativas: $A_3 > A_2 > A_4 > A_1 > A_5$

Atividades

- Pensar sobre um problema de decisão multicritério em gestão de operações:
 - Identificar os critérios de decisão (4);
 - Definir escalas linguísticas para o desempenho das 4 alternativas e pesos dos critérios;
 - Julgar os pesos dos critérios;
 - Para cada alternativa considerada, julgar o desempenho em cada critério;
 - Ordenar as alternativas segundo o fuzzy TOPSIS.