

3. Quaternions

3-1 Interpretação da Multiplicação de Números Complexos

A multiplicação de uma variável complexa por um número complexo de módulo unitário, $e^{i\theta}$, representa uma rotação dessa variável no plano complexo. De fato, seja tal variável representada por $z = z_0 e^{i\varphi}$, Logo, $e^{i\theta} z_0 e^{i\varphi} = z_0 e^{i(\theta+\varphi)}$. Ou seja, z girou “ θ ” no plano complexo. Poderíamos também ter escrito tal rotação da forma

$$e^{i\theta/2} z e^{i\theta/2}$$

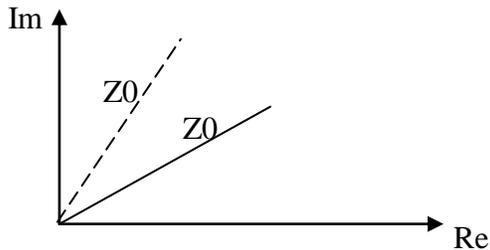


Figura 1. Multiplicação de um complexo por outro de módulo unitário.

Esta forma será utilizada na extensão de números complexos a quaternions.

Note que representamos a rotação da variável z em torno de um eixo perpendicular ao plano complexo. Se associarmos um vetor de componentes $z_0 \cos\varphi$ e $z_0 \sin\varphi$, a multiplicação de $e^{i\theta}$ por z pode ser associada a uma rotação desse vetor de um ângulo θ no plano.

3.2. Quaternions: Definições e Propriedades

Para representarmos uma rotação no espaço tridimensional, necessitamos de um número hipercomplexo de módulo unitário. Tal número é conhecido como quaternion, e é representado por:

$$q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4;$$

Onde os complexos i,j,k possuem as seguintes propriedades:

- 1) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- 2) $ij = k; jk = i; ki = j; ji = -k; kj = -i; ik = -j$

Chamamos q_1 de parte escalar, $S(q)$, e $iq_2 + jq_3 + kq_4$ de parte "vetorial" do quaternion, $V(q)$. De fato, podemos associar aos complexos i,j,k os versores de um sistema tridimensional, positivo de acordo com a propriedade 2) acima.

A adição de 2 quaternions:

$$q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$$

$$q' = q'_1 + iq'_2 + jq'_3 + kq'_4$$

é descrita por:

$$q + q' \equiv (q_1 + q'_1) + i(q_2 + q'_2) + j(q_3 + q'_3) + k(q_4 + q'_4)$$

E o seu produto é dado por:

$$\begin{aligned} q \cdot q' &= (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4)(q'_1 + iq'_2 + jq'_3 + kq'_4) = \\ &= q_1 \cdot q'_1 - (q_2 \cdot q'_2 + q_3 \cdot q'_3 + q_4 \cdot q'_4) + \\ &+ \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ q'_2 & q'_3 & q'_4 \end{vmatrix} + \\ &+ i(q_1 q'_2 + q'_1 q_2) + j(q_1 q'_3 + q'_1 q_3) + k(q_1 q'_4 + q'_1 q_4) \end{aligned}$$

Note que pode-se associar o segundo termo ao produto escalar das partes vetoriais com o sinal trocado e o terceiro termo representa o produto vetorial dos mesmos. De fato estes seriam os únicos termos se as partes escalares forem nulas.

$$(q_1 = q'_1 = 0)$$

A partir das propriedades e resultados anteriores pode-se mostrar que, para quaternions p , q e r , valem as propriedades associativa e distributiva abaixo:

$$a) (pq)r = p(qr);$$

$$b) p(q+r) = pq + pr$$

Também pode-se mostrar, com relação à propriedade comutativa em relação à multiplicação, que esta só vale para quaternions com partes vetoriais nulas ou linearmente dependentes. Ou seja:

$$c) pq = qp \text{ se e só se } V(p) = 0 \text{ ou } V(q) = 0, \text{ ou } V(p) = \alpha V(q).$$

Utiliza-se com frequência, nas aplicações, os conceitos de norma e conjugado de um quaternion. Estes são definidos por:

$$\text{Conjugado de } q: C(q) = q_1 - iq_2 - jq_3 - kq_4$$

$$\text{Norma de } q : N(q) = q \cdot C(q) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

Com relação a estes últimos, novas propriedades podem ser demonstradas:

$$d) C(qr) = C(r)C(q)$$

$$e) N(qr) = N(q)N(r)$$

A partir da definição de norma, podemos definir o inverso de um quaternion:

$$q^{-1} = \frac{C(q)}{N(q)}$$

onde supõe-se que $N(q)$ é diferente de zero. Note que $N(q)N(q^{-1})=1$.

Finalmente, analogamente à representação trigonométrica de números complexos, pode-se expressar o quaternion também por :

$$q = q_o (\cos \theta + e \operatorname{sen} \theta)$$

$$q_o = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = \sqrt{N(q)}$$

$$\cos \theta = q_1 / q_o ;$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{q_o}$$

$$e = \pm \frac{q_2i + q_3j + q_4k}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}$$

3.3 Quaternions e a Rotação no Espaço

A rotação de um vetor no espaço em torno de um determinado eixo pode ser obtida através de uma operação com quaternions. Sejam r e q dois quaternions. Pode-se "girar" $V(r)$ em torno de $V(q)$ através da operação:

$$q.r.q^{-1}$$

Vamos mostrar que essa operação é obtida com o operador acima.

O novo quaternion, $r'=q.r.\operatorname{inv}(q)$, possui a mesma parte escalar e a mesma norma de r . Somente sua parte vetorial muda de direção. Isto é fácil de verificar:

$$N(r')= N(q).N(r).(1/N(q))= N(r)$$

Seja $S(r')$ a parte escalar . Então: $S(r')=S(q.r.\operatorname{inv}(q))=S(r.\operatorname{inv}(q).q)=S(r)$

De início, mostremos um caso particular, e mais simples, dessa operação. Seja $r = \sqrt{N(r)}e$. Formemos o triedro i,j,k a partir da parte vetorial de q e r , conforme a figura 2. Portanto, k é ortogonal a este plano.

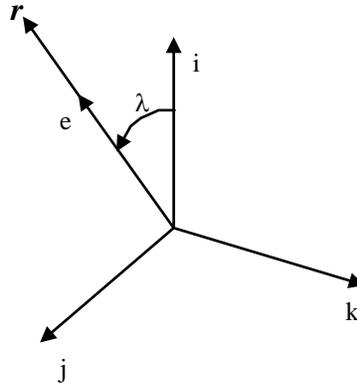


Figura 2. Representação da parte vetorial de r e sua relação com o triedro (i, j, k) .

Ou seja, adotando $V(q)=i$, a representação vetorial de j é ortogonal a i e está no mesmo plano de i e e

Conforme representado na figura, e pode ser expresso por :

$$e = i \cos \lambda + j \sin \lambda$$

O operador “q”, que vai “girar” “r”, é dado por:

$$q = \sqrt{N(q)}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Calculemos o resultado da operação:

$$r' = [\sqrt{N(q)}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] \cdot [\sqrt{N(r)} e] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{N(q)}}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \right] =$$

$$[(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] \cdot [\sqrt{N(r)}(i \cos \lambda + j \operatorname{sen} \lambda)] \cdot (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) =$$

$$\sqrt{N(r)}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(i \cos \lambda + j \operatorname{sen} \lambda)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) =$$

$$r' = \sqrt{N(r)} e' = \sqrt{N(r)} [i \cos \lambda + j \cos 2\theta \operatorname{sen} \lambda + k \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \lambda]$$

cujas componentes são as projeções do novo vetor nos eixos i, j, k , conforme a figura 3.

O vetor e' é, portanto, o resultado da rotação de e em torno de i de um ângulo 2θ .

Uma outra interpretação pode ser dada para o resultado acima. Suponha que houvesse um sistema de coordenadas, “ x', y', z' ”, solidário ao vetor e . Ou seja, ele acompanharia o vetor conforme esse girasse. Para esse sistema, o vetor tem sempre as mesmas componentes: $\cos \theta i$, $\operatorname{sen} \theta j$, $0k$. Em relação ao sistema original (fixo), vamos chama-lo de “ X, Y, Z ”, teríamos $X = x'$, $Y = y' \cos 2\theta$, $Z = y' \operatorname{sen} 2\theta$.

Portanto, a expressão anterior representa a transformação do sistema móvel (que girou 2θ) em relação ao fixo (coordenadas X, Y, Z , em função de x', y' e z').

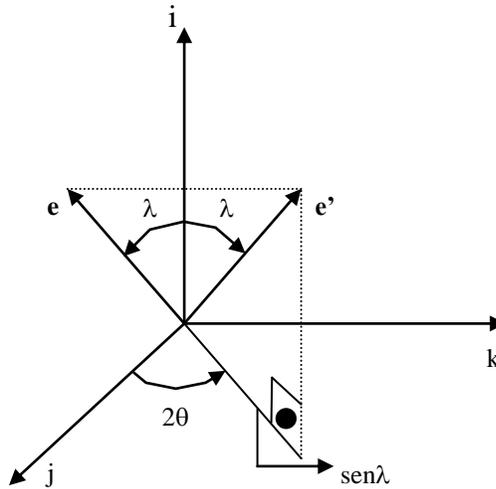


Figura 3. Rotação do vetor e em torno de i .

Podemos estender o resultado anterior utilizando a e b , quaternions de partes escalar nula e norma unitária.

Sendo

$$p = \cos \frac{\alpha}{2} + a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$q = \cos \frac{\beta}{2} + b \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

quaternions unitários que operam rotações de α em torno de a e β em torno de b . A seqüência de rotações (usando a propriedade d))

$$qp(\cdot)p^{-1}q^{-1} = qp(\cdot)(qp)^{-1} = qp(\cdot) \frac{C(qp)}{N(qp)}$$

representa uma única rotação $qp(\cdot)$ dada pelo quaternion $qp = \cos \frac{\gamma}{2} + c \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$. Para verificar esta afirmação, basta substituir p e q por suas definições na expressão acima, e realizar alguma manipulação trigonométrica.

Ou seja, a seqüência de rotações “ q ” e “ p ” é equivalente a uma rotação de γ em torno de c . Pode-se generalizar esse resultado p/ uma sucessão qualquer de rotações $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$.

A aplicação desses resultados na cinemática dos sólidos é evidente. Tomando $V(r)$ como representando o vetor posição de um dos pontos do sólido que realiza uma rotação de θ . O quaternion “ q ” opera uma rotação em torno da direção de \vec{e} , equivalente vetorial do quaternion, conforme a representação indicada na figura 3. O sentido positivo da rotação é indicado pelo sentido de \vec{e} através da regra da mão direita. Ou seja,

$$q = q_0 \left(\cos \frac{\theta}{2} + e \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$= \cos \frac{\theta}{2} + e \text{sen} \frac{\theta}{2};$$

onde

$$e = \frac{iq_2 + jq_3 + kq_4}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} = \cos \alpha_x i + \cos \alpha_y j + \cos \alpha_z k$$

e

$$\vec{e} = \cos \alpha_x \vec{i} + \cos \alpha_y \vec{j} + \cos \alpha_z \vec{k}$$

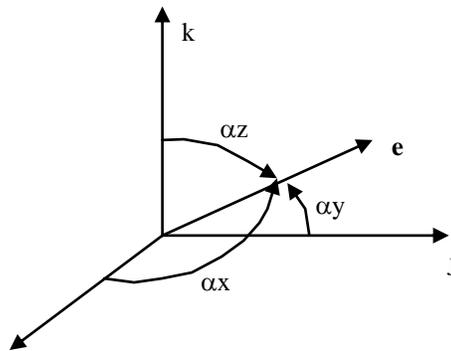


Figura 4. Representação do versor e , em torno do qual o sólido realiza a rotação.

Assim, o vetor r é transformado no vetor r' a partir da rotação de θ em torno do eixo de rotação e , conforme a expressão

$$r' = qrq^{-1}$$

onde

$$q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \cos \alpha_x \text{sen} \frac{\theta}{2}, \cos \alpha_y \text{sen} \frac{\theta}{2}, \cos \alpha_z \text{sen} \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$e_0 + ie_1 + je_2 + ke_3$$

Este resultado é uma expressão do Teorema de Euler, o qual afirma que, qualquer que seja a seqüência de rotações, que leva um sistema de coordenadas a outro, existe um eixo em torno do qual uma única rotação leva o sistema original ao sistema final.

O quaternion acima é conhecido como "quaternion de Euler" e e_0 , e_1 , e_2 e e_3 são os "parâmetros de Euler".

Sejam $r = (0, X, Y, Z)$, as coordenadas do vetor no sistema fixo, e $r' = (0, X', Y', Z')$, as novas coordenadas do vetor após girar, nesse mesmo sistema fixo.

A operação $r' = qrq^{-1}$ fornece

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_1e_2 - e_o e_3) & 2(e_1e_3 + e_o e_2) \\ 2(e_1e_2 + e_o e_3) & -e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_2e_3 - e_o e_1) \\ 2(e_1e_3 - e_o e_2) & 2(e_2e_3 + e_o e_1) & -e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 + e_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Lembre, conforme interpretamos anteriormente para o primeiro exemplo (figura 3), que o resultado acima pode ser visto como uma relação entre o sistema móvel (que a companha r) e o sistema fixo. Ou seja, a matriz acima representa a transformação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_1e_2 - e_o e_3) & 2(e_1e_3 + e_o e_2) \\ 2(e_1e_2 + e_o e_3) & -e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_2e_3 - e_o e_1) \\ 2(e_1e_3 - e_o e_2) & 2(e_2e_3 + e_o e_1) & -e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 + e_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Chegamos então à matriz de rotação em termos dos parâmetros de Euler. Cada elemento da matriz acima é igual aos cossenos diretores correspondentes entre os eixos (x,y,z) e (X,Y,Z).

A variação dos “parâmetros de Euler” com o tempo pode ser calculada a partir da expressão da derivada da matriz de cossenos diretores, da relação entre os cossenos e os parâmetros de Euler e da identidade

$$e_o^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

A expressão obtida é:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_o \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} e_o & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_1 & e_o & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & e_o & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & e_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix};$$

onde, ω_x, ω_y e ω_z são os componentes da velocidade angular do referencial móvel (velocidade de arrastamento) expressas nos eixos deste mesmo referencial.

Outra forma de representação que envolve quaternions, pode ser obtida a partir dos parâmetros de Euler. Se dividirmos os parâmetros por $\cos \frac{\theta}{2}$, obteremos o escalar “1” no lugar de e_o e os seguintes resultados no lugar dos demais parâmetros:

$$g1 = tg \frac{\theta}{2} \cos \alpha_x$$

$$g2 = tg \frac{\theta}{2} \cos \alpha_y$$

$$g3 = tg \frac{\theta}{2} \cos \alpha_z$$

Estes parâmetros são conhecidos como “pâmetros de Rodriguez”, que podem ser usados para formar as matrizes de relação entre sistemas de coordenadas e variação com o tempo apresentadas anteriormente. São elas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + g_1^2 - g_2^2 - g_3^2 & 2(g_1g_2 + g_3) & 2(g_1g_3 - g_2) \\ 2(g_1g_2 - g_3) & -g_1^2 + g_2^2 - g_3^2 + 1 & 2(g_2g_3 + g_1) \\ 2(g_1g_3 + g_2) & 2(g_2g_3 - g_1) & -g_1^2 - g_2^2 + g_3^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + g_1^2 & g_1g_2 + g_3 & g_1g_3 - g_2 \\ g_1g_2 - g_3 & g_2^2 + 1 & g_2g_3 + g_1 \\ g_1g_3 + g_2 & g_2g_3 - g_1 & g_3^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

ou, definindo a matriz \mathbf{G} por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & g_3 & -g_2 \\ -g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & -g_1 & 0 \end{bmatrix}$$

, podemos expressar as derivadas dos parâmetros de Rodriguez através de:

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{G})\Omega(\mathbf{I} - \mathbf{G})$$

, onde Ω é a matriz de velocidade angular, já definida.