MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Seção 1.4: Modelos de espaços vetoriais para sinais e imagens

Definição 1.4.1: espaço vetorial

V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) se:

- $\forall u, v, \in V \qquad u + v \in V$
- $\forall u \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}|\mathbb{C} \qquad \alpha u \in V$
- $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$:

  $u + v = v + u \quad$ (comutatividade)

  $(u + v) + w = u + (v + w) \quad$ (associatividade)

  $\exists \mathbf{0} \in V$ tal que $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u \quad$ (el. neutro +)

  $1u = u \quad$ (el. neutro $\cdot$)

  $\forall u \in V\ \exists w \in V$ tal que $u + w = \mathbf{0} \quad$ (inv. aditivo: $w = -u$)

  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta) \quad$ (associatividade)

  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad$ (distributividade)

Proposição 1.4.1 (exercício 1.12)

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ então

- $\boldsymbol{0}$ *é único*
- $\forall u \in V \quad 0u = \boldsymbol{0}$
- $\forall u \ \exists! w : \ u + w = \boldsymbol{0}$ *(unicidade do inverso aditivo)*

Exemplo 1.1: $\mathbb{R}^{N}$ ou $\mathbb{C}^{N}$

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
y &= (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
\alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \\
\mathbf{0} &= (0, 0, \ldots, 0) \\
-x &= (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.2: $\mathbb{R}^{M\times N}$ ou $\mathbb{C}^{M\times N}$

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & x_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & y &= \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & y_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\
x + y &= \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & x_{ij} + y_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \alpha x &= \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \alpha x_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\
\mathbf{0} &= \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & -x &= \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & -x_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.3: Sinais infinitos

$$\begin{aligned}
x &= (x_0, x_1, \ldots) \\
y &= (y_0, y_1, \ldots) \\
x + y &= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \ldots) \\
\alpha x &= (\alpha x_0, \alpha x_1, \ldots) \\
\mathbf{0} &= (0, 0, \ldots) \\
-x &= (-x_0, -x_1, \ldots)
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3 (cont): Sinais bi-infinitos

$$\begin{aligned}
x &= (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \\
y &= (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots) \\
x + y &= (\ldots, x_{-1} + y_{-1}, x_0 + y_0, x_1 + y_1, \ldots) \\
\alpha x &= (\ldots, \alpha x_{-1}, \alpha x_0, \alpha x_1, \ldots) \\
\mathbf{0} &= (\ldots, 0, 0, 0, \ldots) \\
-x &= (\ldots, -x_{-1}, -x_0, -x_1, \ldots)
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4: Sinais limitados infinitos ($\boldsymbol{L}^{\infty}(\mathbb{N})$) ou bi-infinitos ($\boldsymbol{L}^{\infty}(\mathbb{Z})$)

$$x \in L^{\infty}(\mathbb{N}|\mathbb{Z}) \iff \exists M_x : \forall k \in \mathbb{N}|\mathbb{Z} \quad |x_k| \leq M_x$$

Note que

$$x, y \in L^{\infty}(\mathbb{N}|\mathbb{Z}) \implies x + y \in L^{\infty}(\mathbb{N}|\mathbb{Z})$$

pois

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq M_x + M_y \quad \text{(desigualdade triangular)}$$

Exemplo 1.5: Sinais de energia limitada infinitos ($\mathcal{L}^2(\mathbb{N})$) ou bi-infinitos ($\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$)

$$x \in L^2(\mathbb{N}|\mathbb{Z}) \iff \sum_{k\in\mathbb{N}|\mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$$

É possível provar (exercício 1.1) que

$$x, y \in L^2(\mathbb{N}|\mathbb{Z}) \implies x + y \in L^2(\mathbb{N}|\mathbb{Z})$$

Observação: pularemos a seção 1.4.2 (espaços de funções)

Quem tiver interesse pode ler em casa!