

# Lista Suplementar 1

Nícolas André da Costa Morazotti

9 de Março de 2020

## 1 Questão 1

É dado um sistema cartesiano  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ . Um fio reto infinito, de raio  $a$  muito pequeno, se estende de  $z = -\infty$  a  $z = \infty$ . Calcule o campo elétrico num ponto  $P$  a uma distância  $r > a$  do fio. *Sugestão.* Considere uma superfície imaginária cilíndrica cujo eixo coincide com o eixo  $z$ , com raio  $r$  e comprimento  $L$  qualquer, de forma que o ponto  $P$  esteja na superfície cilíndrica. Argumente que o campo elétrico em  $P$  tem de ser perpendicular ao eixo  $z$  e radial. Aplique em seguida a Lei de Gauss à superfície cilíndrica.

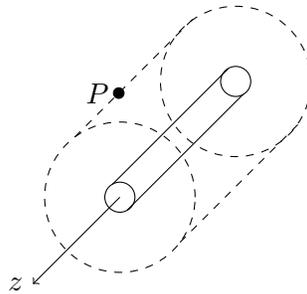


Figura 1: Diagrama do exercício 1.

Então, seja uma superfície gaussiana cilíndrica de raio  $r > a$ , de comprimento  $L$ . Podemos aplicar a Lei de Gauss

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}.$$

Veja que, para um fio reto infinito carregado uniformemente com densidade de carga  $\lambda$ , cada ponto  $(x, y, z)$  tem um ponto oposto  $(x, y, -z)$  com mesma carga. Assim, na componente  $z$ , não pode haver campo elétrico. Portanto, o campo elétrico deve ter apenas componentes das direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ .

Com um pouco mais de análise, vemos que o campo na verdade é na direção *radial*  $\hat{\rho}$ . Assim,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}|2\pi rL = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{fio} dV\lambda \quad (2)$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \int_{fio} dV \quad (3)$$

$$= \frac{\lambda\pi a^2 L}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\lambda a^2}{2\varepsilon_0 r} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{\lambda a^2}{2\varepsilon_0 r}. \quad (6)$$

## 2 Questão 2

Num metal (condutor), o campo elétrico no interior do material é necessariamente nulo; caso contrário, campo movimentaria eternamente as cargas do metal. Mostre que as cargas elétricas num objeto metálico somente podem estar na superfície do objeto. *Sugestão. Dado um ponto  $P$  no interior do objeto, considere uma pequena superfície esférica, imaginária, centrada em  $P$ . Aplique a Lei de Gauss a essa superfície.*

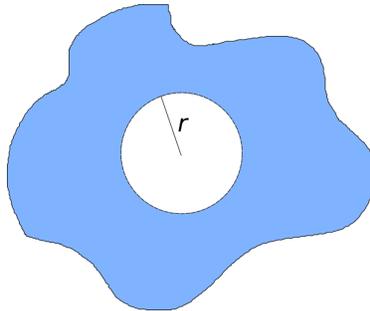


Figura 2: Em azul, um condutor sólido qualquer. Em branco, a superfície gaussiana de raio  $r$  interna ao condutor.

Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio  $r$  interna ao condutor, como visto na Figura 2, podemos ver que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}.$$

Por construção,  $\mathbf{E} \equiv 0$  dentro do condutor. Assim, a integral é identicamente nula.

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \\ \implies Q_{in} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Contudo, caso tenhamos uma superfície gaussiana externa ao condutor, fica claro que o campo não é necessariamente 0, e portanto as cargas devem se manter na superfície do condutor.

### 3 Questão 3

Uma placa metálica plana tem espessura uniforme  $2a$  e é infinita nas outras direções. Posiciona-se um sistema cartesiano com os eixos  $x$  e  $y$  paralelos à superfície da placa, de forma que a origem esteja no plano central da placa. Assim, uma das superfícies da placa está no plano  $z = a$ , e a outra, no plano  $z = -a$ . Sabe-se que as duas faces da placa estão carregadas com densidade superficial  $\sigma$ . Calcule o campo elétrico num ponto sobre o eixo  $z$  na posição  $(0, 0, z_0)$ , com  $z_0 > a$ . Para isso, considere uma superfície imaginária cilíndrica cujo eixo coincide com o eixo  $z$  e que tem tampas (paralelas ao plano  $xy$ ) em  $z = 0$  (dentro do metal) e  $z = z_0$ . Aplique a lei de Gauss a essa superfície.

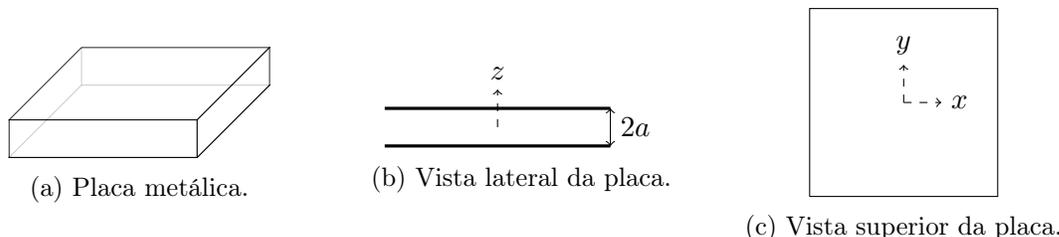


Figura 3: Diagrama das questões 3 e 4.

Fazendo uma superfície gaussiana cilíndrica com tampas em  $z = 0$  e  $z = z_0$ , e sabendo que o campo de uma placa infinita é na direção perpendicular ( $\hat{z}$ ), temos

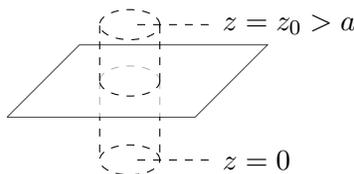


Figura 4: Superfície gaussiana sobre uma das superfícies da placa metálica.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| \pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, z > a.$$

O campo dentro da placa, por ser metálica, é nulo.

### 4 Questão 4

Repita o problema anterior, mas agora considere uma superfície imaginária cilíndrica como a do problema anterior, exceto que as tampas estão em  $z = -z_0$  e  $z = z_0$ .

Agora, faremos a superfície gaussiana maior que a espessura da placa, como na Figura 5. O campo que sai por cima da placa é em  $\hat{z}$ , enquanto o campo que sai por baixo é  $-\hat{z}$ . Além disso, as

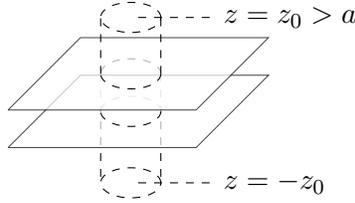


Figura 5: Superfície gaussiana sobre as duas superfícies da placa metálica.

áreas são orientadas para cima em  $z = z_0$  e para baixo em  $z = -z_0$ . Somando-se os campos,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma\pi r^2}{\epsilon_0} \\ 2|\mathbf{E}|\pi r^2 &= \frac{2\sigma\pi r^2}{\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

## 5 Questão 5

Uma superfície esférica de raio  $R$  está uniformemente carregada com carga  $Q$ . Calcule o campo elétrico que ela produz a uma distância  $r > R$  de seu centro. *Sugestão. Aplique a Lei de Gauss a uma superfície imaginária de raio  $r$ , esférica e concêntrica com a superfície carregada.*

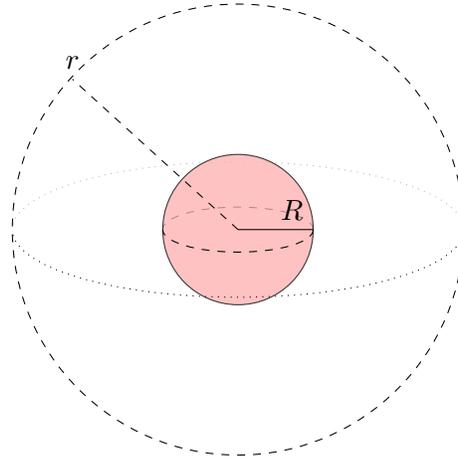


Figura 6: Diagrama do exercício 5.

Pela Lei de Gauss,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}|4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \end{aligned}$$

que é o campo de uma carga  $Q$  pontual.

## 6 Questão 6

Repita o problema anterior, mas agora calcule o campo no interior da esfera ( $r < R$ ).

Como estamos tratando de uma superfície esférica carregada, não há cargas que estejam a uma distância  $r < R$  da origem. Assim, no caso de uma superfície gaussiana interior à superfície esférica, não há cargas internas e portanto o campo elétrico interno é nulo.

## 7 Questão 7

Duas superfícies esféricas concêntricas, de raios  $R$  e  $2R$ , estão uniformemente carregadas, com cargas  $Q$  e  $-Q$ , respectivamente. Calcule o campo elétrico na região  $R < r < 2R$ , entre as duas superfícies.

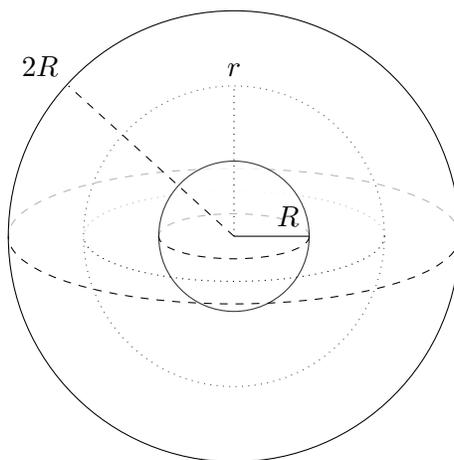


Figura 7: Diagrama do exercício 6.

Na região  $R < r < 2R$ , a única carga interna é a carga  $Q$ . Assim,

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \mathbf{E}4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \hat{r} \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.\end{aligned}$$

## 8 Questão 8

No problema anterior, mostre que os campos elétricos no interior da superfície menor e na região externa à superfície maior são nulos e mostre em diagrama esquemático as linhas de força em todo o espaço.

Novamente, no interior da superfície de raio  $R$ , não há cargas. Portanto, o campo elétrico na região interna a ela é nulo. Na região externa a ambas as superfícies,  $Q_{in} = Q - Q = 0$ . Portanto,  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , para qualquer superfície gaussiana escolhida, o que significa que  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  para pontos fora da superfície de raio  $2R$ . Vemos o diagrama de forças na Figura 8.

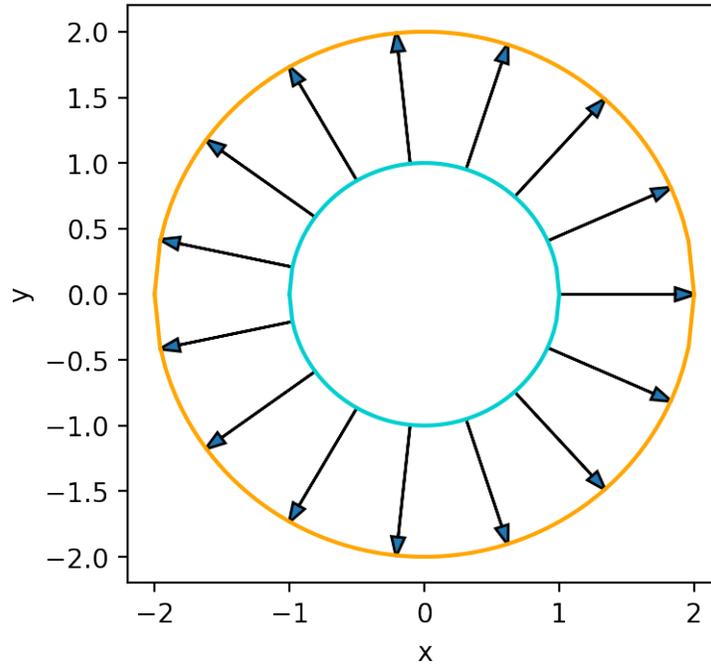


Figura 8: Diagrama das linhas de força no interior das superfícies, seção transversal. Os eixos estão em unidades de  $R$ .

## 9 Questão 9

Um disco muito fino de raio  $a$  está carregado com densidade superficial uniforme  $\sigma$ . Escolha um sistema de coordenadas com origem no centro do disco e eixo  $z$  perpendicular ao plano do disco. Calcule o campo elétrico num ponto  $P$  com coordenadas  $(0, 0, z)$ . Para que valor tende o campo quando  $z \rightarrow 0$ ? Fisicamente, você acha que esse resultado faz sentido?

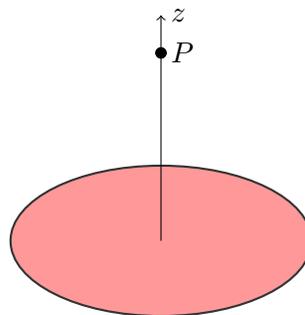


Figura 9: Diagrama da questão 9.

Vamos considerar diversos anéis infinitesimais de raio  $r$  e espessura  $dr$ , concêntricos. Cada anel

terá uma carga  $dq = \sigma 2\pi r dr$ . O campo que cada anel realiza sobre o ponto  $P$  é

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{dq(-r\hat{r} + z\hat{z})}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z} \\ &= \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}z\hat{z}. \end{aligned}$$

Por argumentos de simetria, só há campo na direção  $\hat{z}$ . Integrando sobre o raio de 0 a  $a$ , temos

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Com a mudança de variáveis  $u = r^2 + z^2$ ,  $du = 2r dr$ , temos a integral

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} 2u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{a^2+z^2} \\ &= -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Com  $z^2 \ll a^2$ , a raiz se aproxima de  $a$ . Então

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\approx -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{z} \right) \\ &= -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \left( \frac{z - a}{az} \right) \\ &\approx -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\epsilon_0} \left( \frac{-1}{z} \right) \\ &= \frac{\sigma\hat{z}}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Quando muito próximo do disco, o campo se aproxima do campo de um plano carregado.

## 10 Questão 10

Uma esfera maciça de raio  $R$  tem carga elétrica uniformemente distribuída em seu interior, de forma que a densidade volumétrica de carga seja  $\rho$ . Em outras palavras, qualquer volume  $\Delta V$  no interior da esfera tem carga  $\Delta q = \rho\Delta V$ . Calcule o campo elétrico num ponto  $P$  da esfera a uma distância  $r < R$  do centro. *Sugestão. Imagine uma superfície de raio  $r$  cujo centro coincida com o da esfera e aplique nela a Lei de Gauss.*

Utilizando a Lei de Gauss para o sistema da Figura 10, com uma superfície gaussiana esférica, de raio  $r$ , interna à esfera de raio  $R$ , temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|4\pi r^2 &= \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \end{aligned}$$

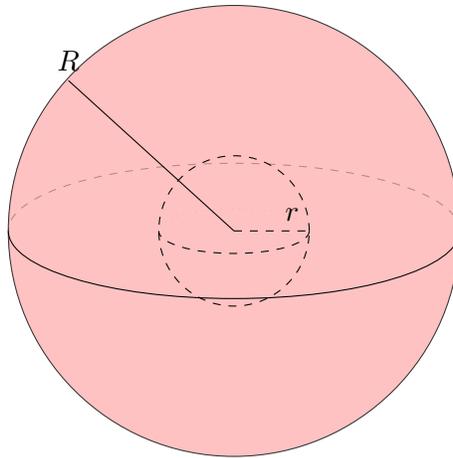


Figura 10: Diagrama do exercício 10.

Poderíamos ter calculado o campo para pontos exteriores à esfera de raio  $R$ . A única diferença em relação as contas anteriores seria que  $Q_{in} = 4\pi R^3 \rho/3$ . Assim,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}|4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}.$$

Veja que o campo elétrico em tal situação é contínuo.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import figure
figure(dpi=250)

def e_dentro(r):
    return r/3

def e_fora(r):
    return 1/(3*r**2)

x_d = np.linspace(0,1,20)
x_f = np.linspace(1,5,35)
plt.plot(x_d,e_dentro(x_d))
plt.plot(x_f,e_fora(x_f))
plt.xlabel(r"$r/R$")
plt.ylabel(r"$|E(r)|$ em unidades de $\rho/\epsilon_0$.")
plt.legend([r"$r<R$",r"$r>R$"])
plt.savefig("imagens/ex-10.png")
```

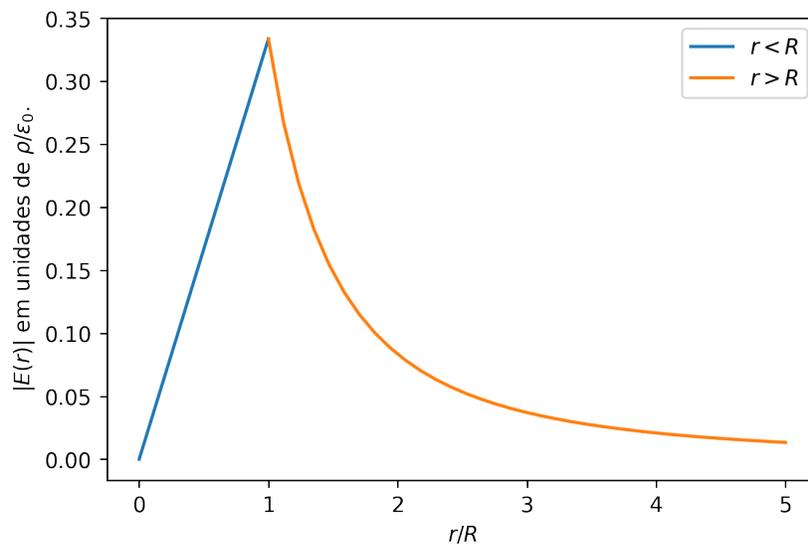


Figura 11: Intensidade do campo em função da distância ao centro da esfera.