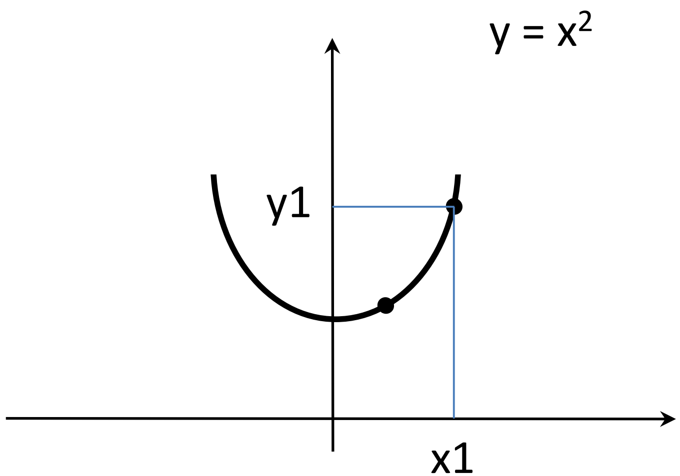
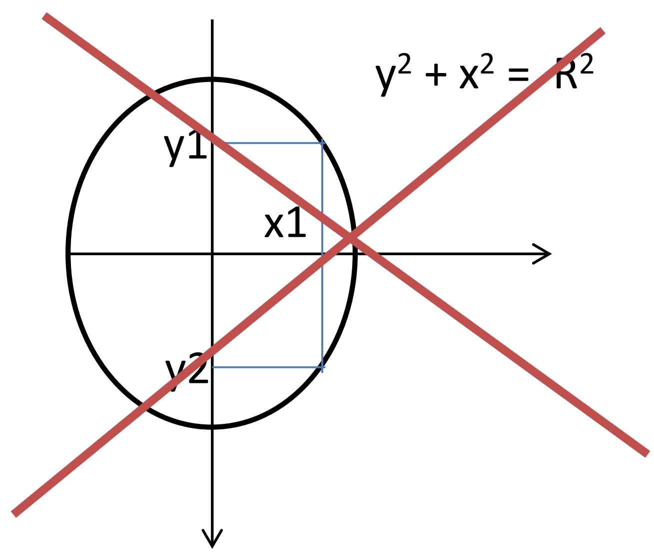
3 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

- 3.1 Definição, representação gráfica e notação
- Função de 1 variável independente:

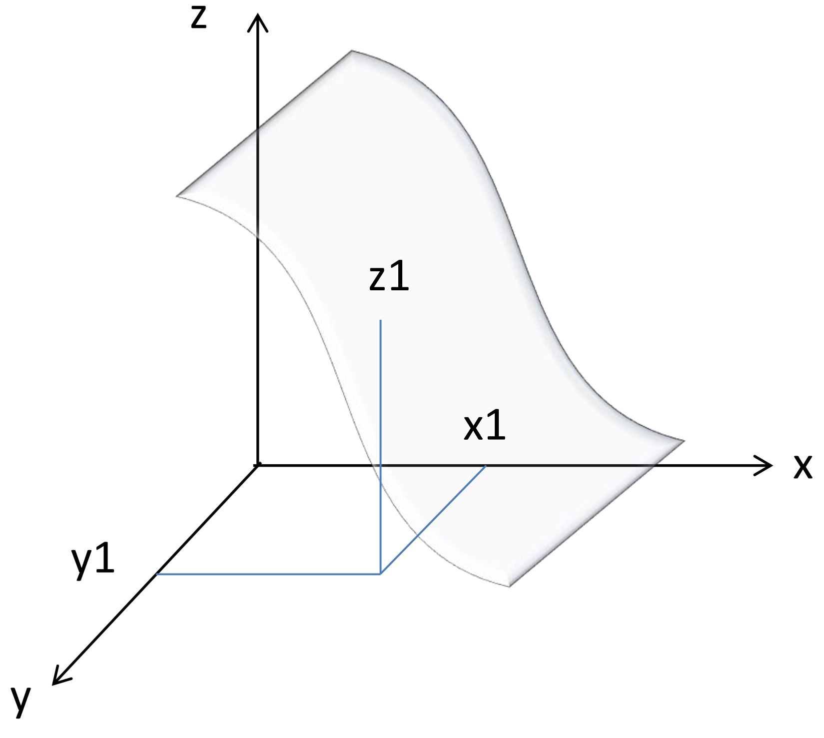
"y= f(x) é uma função de 1 variável, ou seja, é uma função de variável dependente **x**, se cada valor de **x** corresponde a apenas 1 valor da variável dependente **y**."





- Função de 2 variáveis independentes:

"Dadas 2 variáveis independentes **x** e **y**, se para cada (x,y) corresponde apenas 1 valor de **z**, a variável dependente z é dita função de 2 variáveis**.**"



Exemplo:

$Y = -759{,}290 + 12{,}771N + 7{,}960W - 0{,}0913N^2 - 0{,}00854W^2 + 0{,}0152N.W$

Função de produção de feijão em função
Do nitrogênio aplicado em kg/ha (N) e da
Lâmina de irrigação (W)
$Y = f(N,W)$

Outro exemplo: área do retângulo
$S = f(b,h)$

- Função de 3 ou mais variáveis independentes:

- $W = f(x,y,z)$
- $Y = f(x1, x2, x3, ..., xn)$
- Sem representação gráfica.

- Exemplo:

- Volume de um paralelepípedo → $V = f(b, h, \ell)$
- Vazão de um canal → $Q = f(S, P, n, I\%)$

- 3.2 Crescimento parcial e total de uma função de várias variáveis
- $z = f(x,y)$

- Fixando y → variando x → Δx

$\Delta x z$ Crescimento parcial de z em relação a x

$\Delta x z = f(x+ \Delta x, y) - f(x,y)$

Δz Crescimento total de z

$$\Delta z = f(x+ \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

Importante: Regra Geral $\Delta z \neq \Delta xz + \Delta yz$

Δz é uma aproximação de $\Delta xz + \Delta yz$

Será utilizado para obter a aproximação de erro

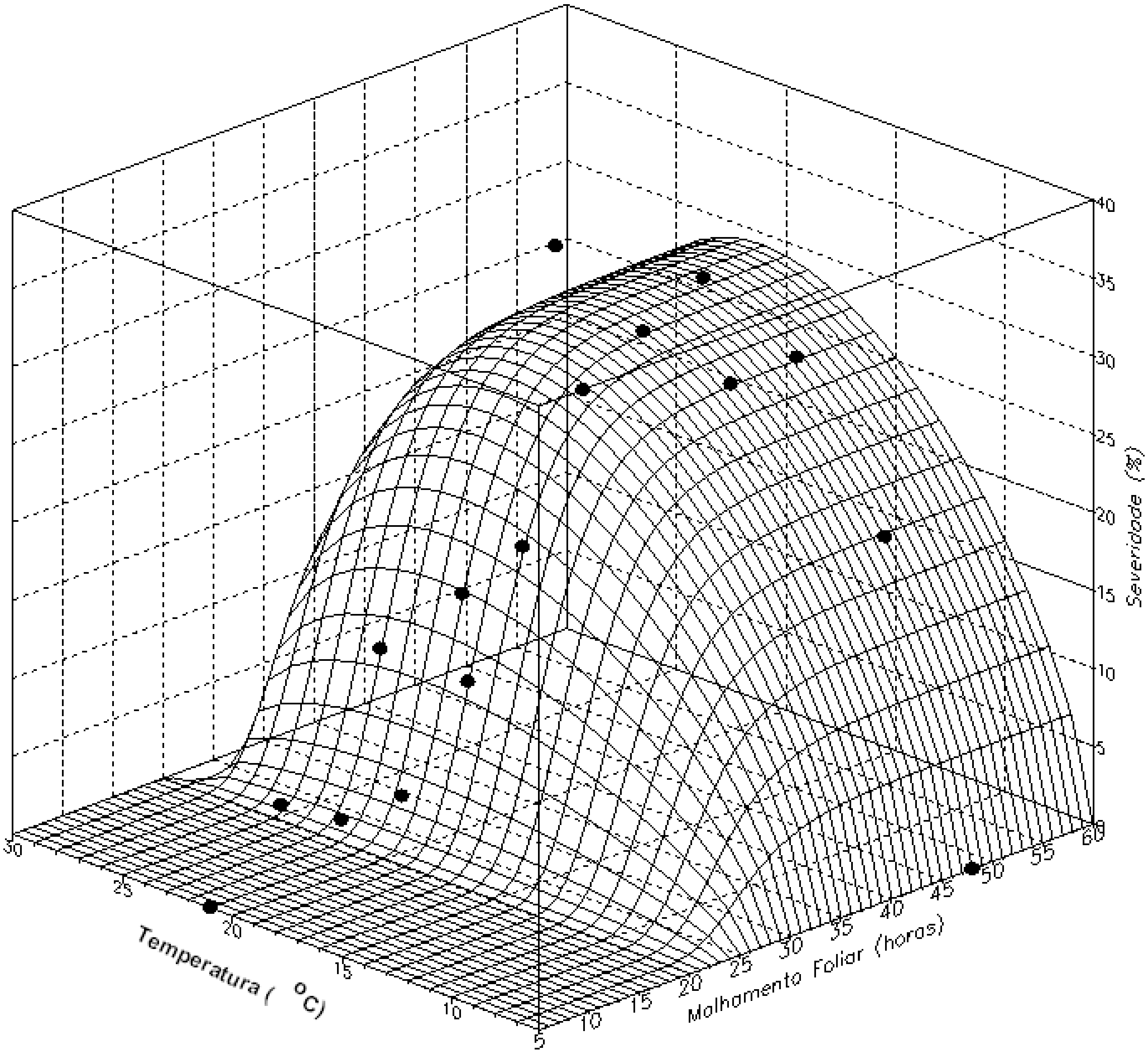
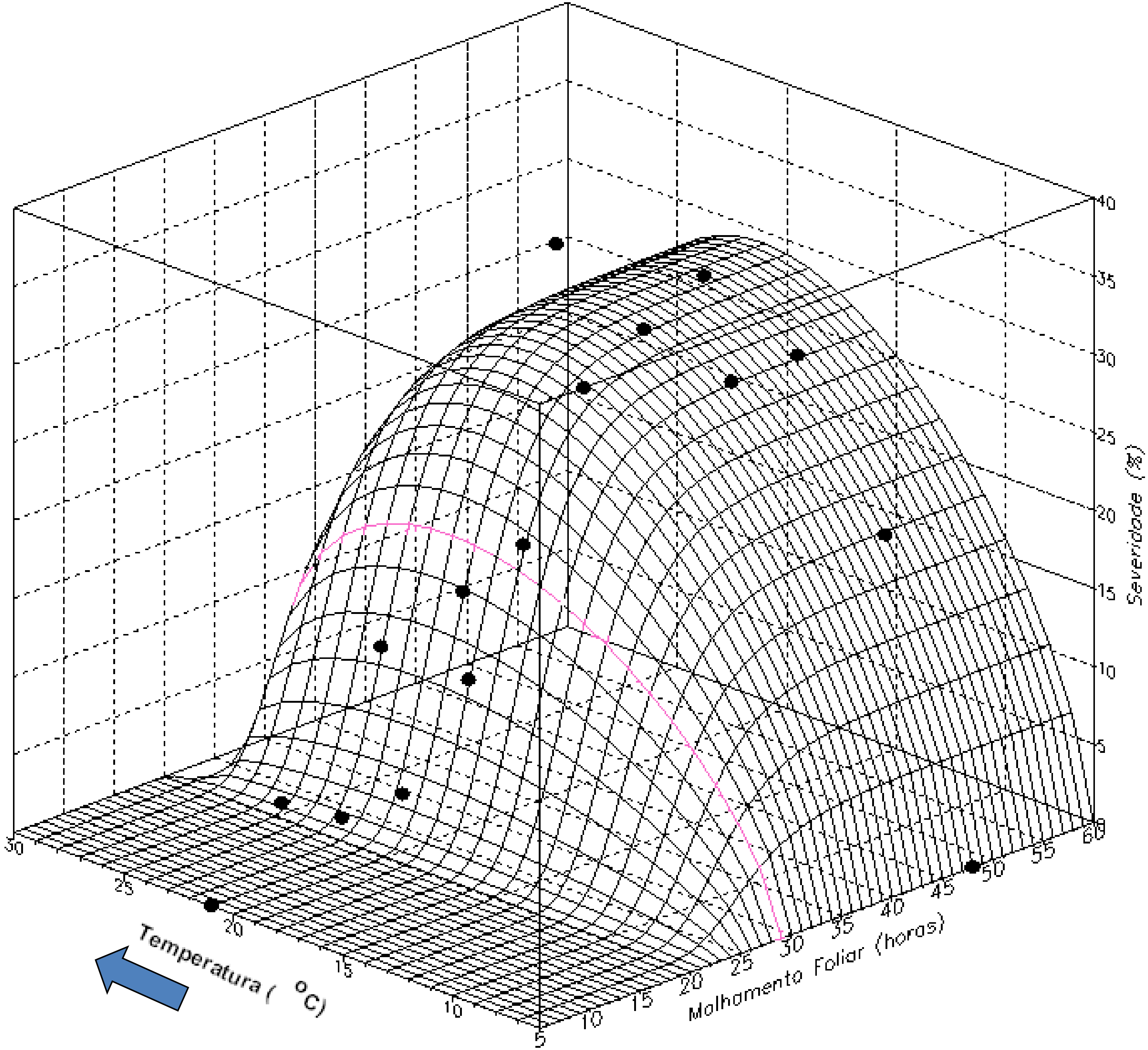


FIG. 5 - Efeito do período de molhamento foliar e da temperatura na severidade da mancha angular do feijoeiro (*Phaseolus vulgaris*) causada por *Phaeoisariopsis griseola*, na cultivar Carioca.



Severidade (%)
Temperatura (°C)
Molhamento Foliar (horas)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
5
10
15
20
25
30
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60

Exemplo:

$$z = f(x, y) = x \cdot y$$

•3.3 Derivadas Parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Derivação: Mantem-se constante as demais variáveis independentes.

Exemplo: $z = f(x, y) = xy + x^2 + 2y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2x \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2$$

Para entregar:

$$z = f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

•Derivadas de ordem superior

- As derivadas em relação à **x** ou à **y** podem ser derivadas novamente em relação à **x** ou à **y**. Dando origem as derivadas de 2° ordem, 3° ordem, ...
- ex:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''xx \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''yy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''xy \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''yx$$

- Em particular, dizem-se mistas as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''xy \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''yx$$

- Estas derivadas mistas são obtidas de formas distintas. Porém, se satisfeitas as condições de continuidade (Teorema de Young) possuem a propriedade:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Exemplo

Seja, $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

•3.4 Aplicações das derivadas parciais na economia

- **Custo marginal:** a qualquer nível *q* de produção, é o custo extra da produção de uma unidade extra a mais (ou menos) de *q*.

- Por exemplo:
- 400 unidades → custo de 16.000
- 401 unidades → custo de 16.045
- custo marginal é 45 unidades monetárias.

- Função de custo para produzir dois bens: x e y

$$C = Q\,(x,y)$$

Derivadas parciais de C → funções de custo marginal

$$\frac{\partial C}{\partial x} =$$ É o custo marginal com relação a x

$$\frac{\partial C}{\partial y} =$$ É o custo marginal com relação a y

Exemplo

- Se a função de custo para produzir as quantidades x e y de dois bens é $c = 15 + 2x^2 + xy + 5y^{2,}$ determinar os custos marginais com relação a x e y. Se y é mantido constante em 6 e $x = 3$, a produção de uma unidade adicional de x acrescenta quantas unidades monetárias no custo total? Se x é mantido constante em 3 e $y = 6$, a produção de uma unidade adicional de y acrescenta quantas unidades monetárias ao custo total?

- **Função de Produção:** é a relação técnica que indica a quantidade de produto capaz de ser obtida com todo e qualquer conjunto de fatores específicos (ou fatores de produção). É definida para um determinado estado de conhecimento técnico. Normalmente empíricas obtidas por regressão.

- Função de produção → $z = f\,(x, y)$
- z = quantidade do produto z
- x = quantidade utilizada do fator de produção x
- y = quantidade utilizada do fator de produção y

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ produtividade marginal de *x* ou o produto marginal de *x.*

$\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ produtividade marginal de *y* ou o produto marginal de *y.*

Observe que representa aproximadamente a taxa de aumento do produto total quando este insumo aumenta, supondo-se que a quantidade do outro insumo é mantida constante.

Exemplo:

Considere a função de produção $f\,(x, y) = 60\, x^{3/4}\, y^{1/4}$, que fornece o número de unidades de mercadorias produzidas quando se utilizam x unidades de trabalho e y unidades de capital.

a) Calcular o aumento do número de mercadorias quando se aumenta 1 unidade de trabalho e quando se aumenta 1 de capital para x = 81 e y= 16

b) Produtividade marginal de trabalho e de capital para x = 81 e y= 16

Exemplo: Considere a função de produção para a produção de feijão de Frizzone (1986), calcule os produtos físicos marginais da água e do nitrogênio para a seguintes situação:

água (105 mm; 30 kg/ha)

y (kg feijão por ha) = $-759{,}290 + 12{,}771N + 7{,}960W - 0{,}0913N^2 - 0{,}00854W^2 + 0{,}0152N.W$

Exemplo: Considere a função de produção para a produção de feijão de Frizzone (1986), calcule os produtos físicos marginais para as seguintes situações:

a) água (105 mm; 30 kg/ha)
b) água (420 mm; 30 kg/ha)
c) água (105 mm; 60 kg/ha)
d) nitrogênio (105 mm; 30 kg/ha)
e) nitrogênio (105 mm; 60 kg/ha)

y (kg feijão por ha) = $-759{,}290 + 12{,}771N + 7{,}960W - 0{,}0913N^2 - 0{,}00854W^2 + 0{,}0152N.W$

•3.5 Diferencial total

- seja $z = f(x, y)$ seu incremento total é:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$$

- Sendo Δx e Δy pequenos mas ainda longe de zero
- Δz foi visto que representa a aproximação de Δxz + Δyz

$$\frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{\Delta xz}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \Delta xz \approx \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \approx \frac{\Delta yz}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad \Delta yz \approx \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

•A diferencial total de uma função $z = f\,(x, y)$, pode ser obtida, **aproximadamente**, pela expressão:

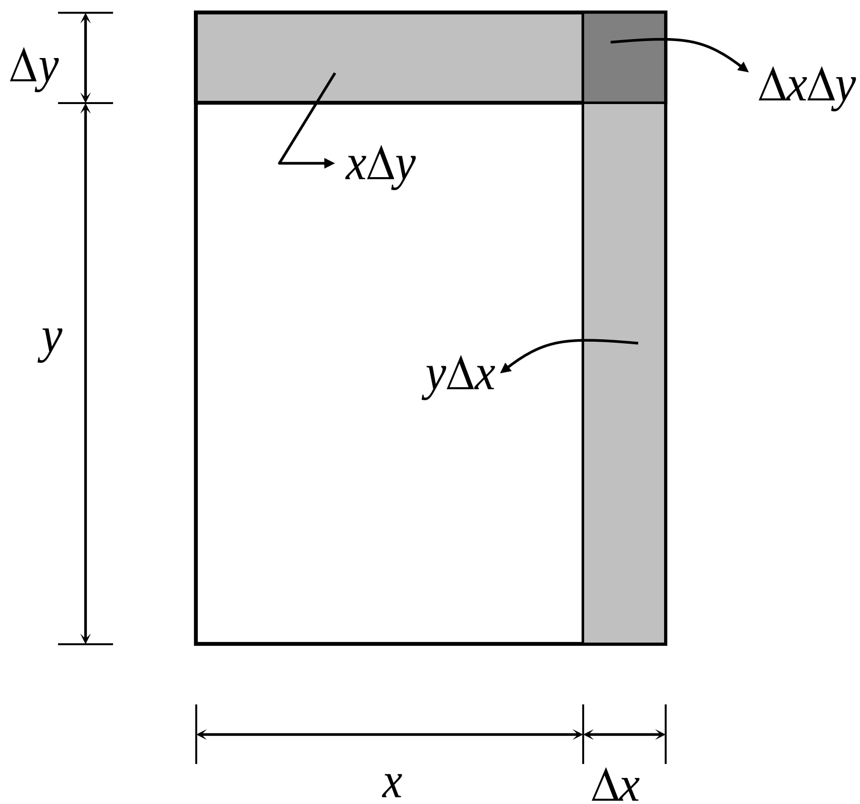
$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

•Temos $\Delta x \approx dx$ e $\Delta y \approx dy$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Exemplo

Calcular o incremento total e a diferencial total da função $z = x.y$ no ponto (2; 3), se Dx = 0,1 e Dy = 0,2.



- A diferencial total como uma estimativa de erro

- "Assim como a diferencial fornece uma estimativa do erro de funções de 1 variável, a diferencial total fornecerá uma estimativa do erro de funções de várias variáveis."

- Se $z = f(x, y)$ e se comete um erro Δx na medição de x e um erro Δy na medição de y

- O erro consequente em z será Δz, que poderá ser aproximado por dz.

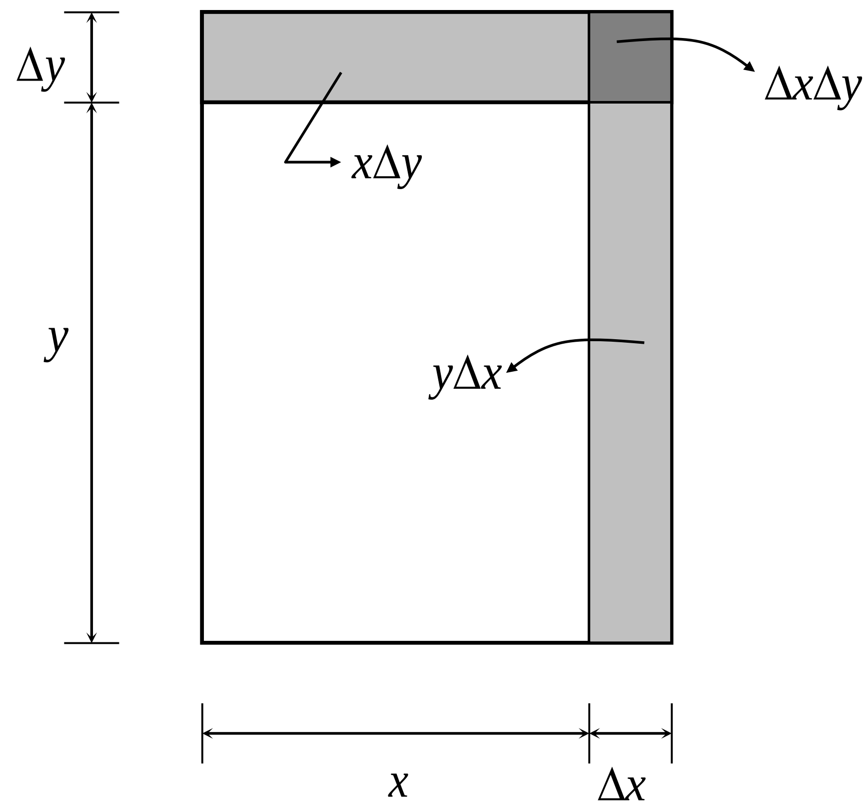
Neste exemplo:

O erro real é

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

E o erro aproximado é

$$dz = x\Delta y + y\Delta x$$



- Obs1: Erro absoluto máximo | dz |

- Seja z = z(x, y, w, ..., t)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial w}dz + ... + \frac{\partial z}{\partial t}dt\,.$$

- Pode ocorrer valores negativos e positivos → módulo

$$|dz| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||dx| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||dy| + \left|\frac{\partial z}{\partial w}\right||dz| + \cdots + \left|\frac{\partial z}{\partial t}\right||dt|$$

•Obs2: Erro relativo máximo

$$\text{Erro relativo máximo (\%)} = \frac{|dz|}{|z|} \ .100$$

Exemplo: Calcular o erro máximo absoluto e o erro relativo máximo no cálculo do volume de um cilindro cujo diâmetro medido é 6,32cm $\pm$ 0,20cm e altura é 13,46cm $\pm$ 0,30 cm .

•Obs3: Erro absoluto máximo é utilizado na matemática. Na física utiliza-se o erro absoluto (não o máximo) ou erro absoluto possível.

$$\bullet erro\ abs = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (dx)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (dy)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 (dt)^2}$$

$$\text{Erro relativo} = \frac{erro\ abs}{|z|}\ .100$$

No exemplo anterior:

erro abs = 28,33 cm^3 e erro relativo = 6,71 cm^3

- 3.6 Derivada de uma função composta (derivada total)

- 3.6.1 Funções compostas de uma variável independente

- A) Função de 1 variável, composta de 1 variável independente

$$u = u(v) \quad e \quad v = v(t) \quad \rightarrow \quad \mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{t})$$

Derivada já conhecida: $$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \, . \frac{dv}{dt}$$

B) função de várias variáveis, composta de 1 variável independente

$$\mathrm{w}= f(x,y,z) \quad e \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \rightarrow \quad \mathrm{w} = \mathrm{w(t)}$$

B) função de várias variáveis, composta de 1 variável independente

$$\text{w}= f(x,y,z) \quad e \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \rightarrow \quad \text{w} = \text{w(t)} \\ z = z(t) \end{cases}$$

Derivada total de w em função *t,* através das variáveis intermediárias *x, y* e z.

B) função de várias variáveis, composta de 1 variável independente

$$\mathrm{w}= f(x,y,z) \quad e \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \rightarrow \quad \mathrm{w} = \mathrm{w(t)}$$

Derivada total de w em função *t*, através das variáveis intermediárias *x*, *y* e z.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Parcial pois w é função de 3 variáveis

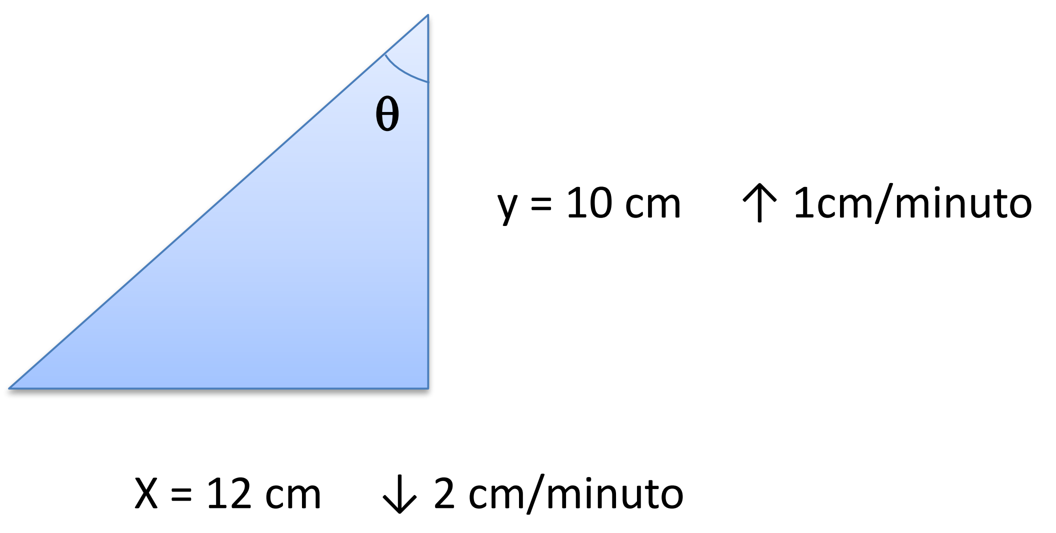
Derivada de x, pois x é função somente de t

- 3.6.2 Funções compostas de várias variáveis independentes

$$\text{w}= f(x, y, z) \quad e \quad \begin{cases} x = x(r, s, t) \\ y = y(r, s, t) \\ z = z(r, s, t) \end{cases} \rightarrow \quad \text{w} = \text{w}(r, s, t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

Exemplo: Em um dado instante, o comprimento de um cateto de um triangulo é de 10 cm e cresce a uma taxa de 1cm/minuto. Enquanto isso o comprimento do outro cateto é de 12 cm e decresce a uma taxa de 2cm/minuto. Encontre a taxa de variação da medida do ângulo oposto ao cateto de 12 cm de comprimento no instante dado.



- 3.7 Derivação de funções implícitas

- 3.7.1 Equação e funções implícitas

Seja z = z(x,y); deseja-se $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ de uma expressão

em que z não esteja explicitado.

•3.7 Derivação de funções implícitas

•3.7.1 Equação e funções implícitas

Seja z = z(x,y); deseja-se $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de uma expressão

em que z não esteja explicitado.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

•3.7 Derivação de funções implícitas

•3.7.1 Equação e funções implícitas

Seja z = z(x,y); deseja-se $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de uma expressão

em que z não esteja explicitado.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Exemplo1: Dado x.y.z -1 = 0, $Achar \dfrac{\partial z}{\partial x}$

Exemplo2: $\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{6} - 1 = 0 \quad Achar \dfrac{\partial z}{\partial x} \; e \; \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Exemplo3: $z^2 + 4x^2 + 5y^2 - 12xy = 0 \quad Achar \dfrac{\partial z}{\partial x}$

• 3.8 Máximos e Mínimos não condicionados

• Definições

$$z = z(x,y) \begin{cases} \text{possui máximo relativo em } x = a \text{ e } y = b \\ \text{se: } z(a,b) > z(x,y) \text{ vizinhos próximo} \end{cases}$$

•Condição necessária (mas não suficiente) para existência de pontos extremos (máximo e mínimo) de funções de 2 ou + variáveis

•Teste da 1° derivada: possível ponto extremo

•Seja z = z(x,y), para que o par (a,b) seja extremo é necessário:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=0 \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=0$$

•Condição de suficiência para funções de 2 ou + variáveis

•Teste da 2° derivada

•Seja o ponto (*a*, *b*) da *função* z(*x*, *y*) tal que o ponto (a,b) seja um extremo, isto é

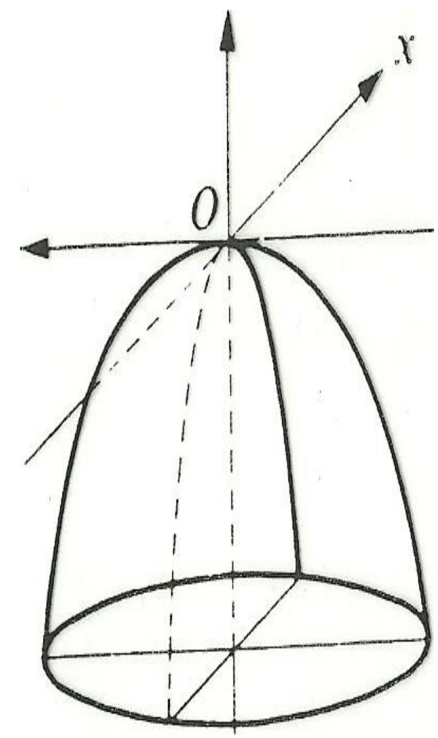
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \ .$$

•Existem 4 possíveis conclusões:

Caso 1) *f* (*x*, *y*) tem um máximo, se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2>0$$

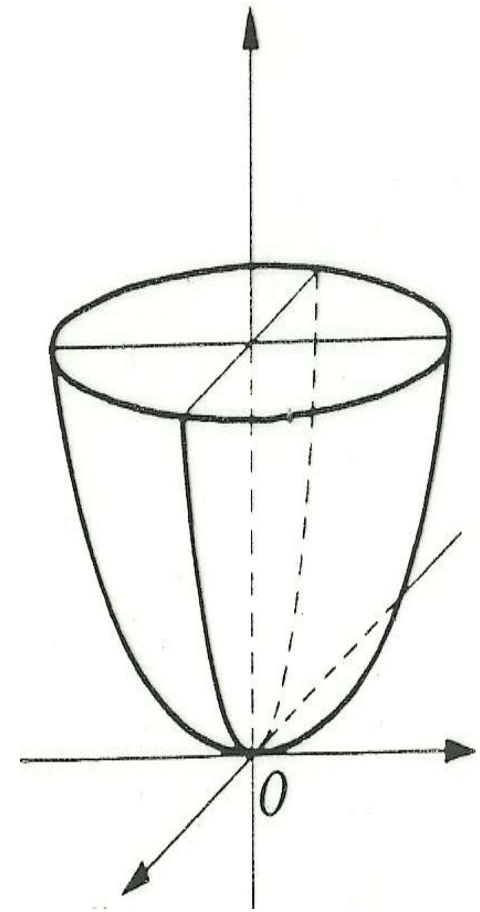
e $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$$



Caso 2) *f* (*x*, *y*) tem um mínimo, se

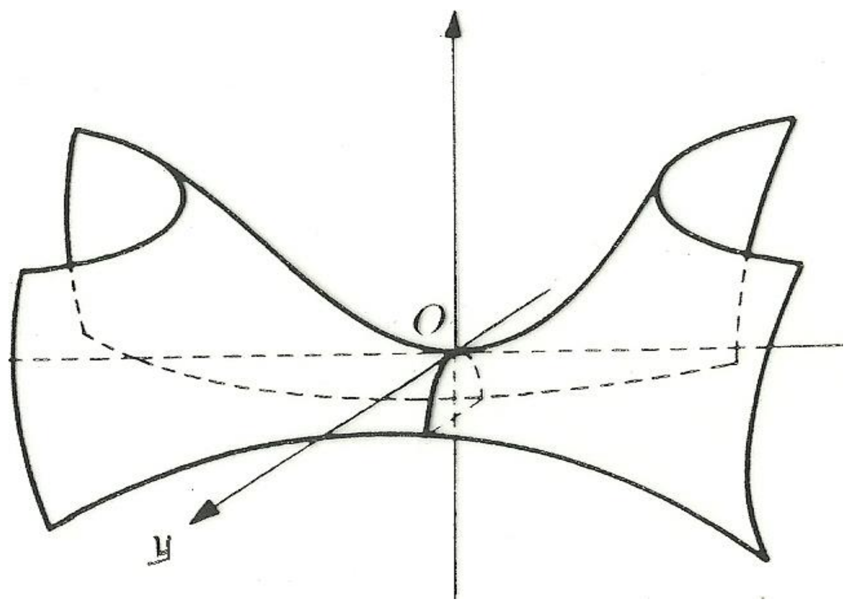
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right]^2>0$$

e $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$$



Caso 3) f (x, y) não possui máximo nem mínimo, Chamado de ponto de sela ou minimax, se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2<0$$



Caso 4) f (x, y) não apresenta nenhuma conclusão possível. É necessário estudo mais detalhado na vizinhança do ponto.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right]^2 = 0$$

OBS: A expressão $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2$

pode ser disposta em forma de matriz quadrada (2x2) chamada de Hessiano da função z=z(x,y) aplicado ao par (a,b):

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}$$

Exemplos: Determinar os pontos de máximo e mínimo se os mesmos existirem

A) $z = x^2 - x\,y + y^2 + 3x - 2y + 1$

B) $z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$

C) $z = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

Utilizando a função de produção:

Y (kg feijão por ha) = -759,290 + 12,771N + 7,960W – 0,0913N^2 –0,00854W^2 + 0,0152N.W

E considerando: preço do feijão = R$ 1,00/kg;

preço da água = R$ 0,02/m^3

preço do N = R$ 0,40/kg

Pede-se: Calcular a combinação de água e N que maximizam a produção. E calcular a combinação de água e N que maximizam o lucro.

•3.9 Máximos e Mínimos Condicionados

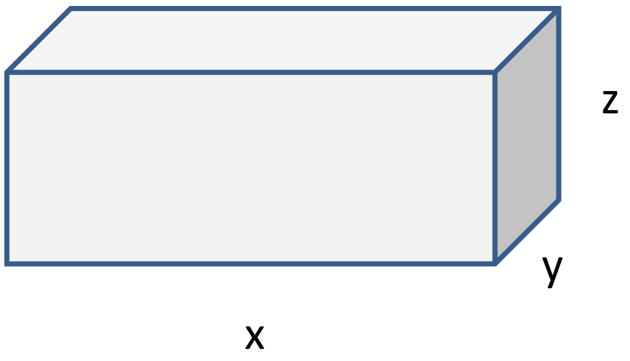
•Problemas de otimização → Maximizar

→ Minimizar

Função objetivo sujeita a certas condições de restrição sobre as variáveis envolvidas.

Estas restrições podem ser estabelecidas como igualdades ou desigualdades.

Exemplo: De todos os paralelepípedos retângulos de volume dado, qual é aquele que possui área total mínima?



- Método dos multiplicadores de Lagrange

- Condição necessária para funções de 2 ou + variáveis

- Dada z=f(x,y) e uma restrição g(x,y)=0 define-se

- F = f(x,y) – l.g(x,y)

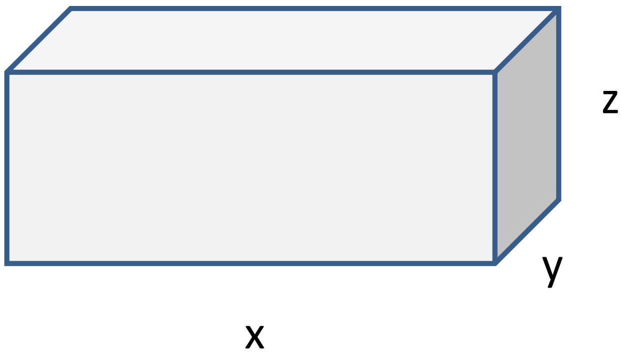
- E um ponto poderá ser de máximo ou mínimo se:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(a,b)=0$$

•Condição de suficiência para uso dos multiplicadores de Lagrange

$$
\text{então}\begin{cases}
H \leq o\ teste\ e\ a\ função\ deve\ ser\ examinado\ ns\ vizinhanças\ de\ x = a\ e\ y = b \\[2em]
H > 0 \begin{cases}
máximo\ em\ x = a, \qquad y = b, se \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) < 0 \\[1em] \dfrac{\partial^2 F}{\partial yx^2}(a,b) < 0 \end{cases} \\[3em]
mínimo\ em\ x = a, \qquad y = b, se \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) > 0 \\[1em] \dfrac{\partial^2 F}{\partial yx^2}(a,b) > 0 \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Exemplo: De todos os paralelepípedos retângulos de volume dado, qual é aquele que possui área total mínima? Utilizar multiplicador de Lagrange



•Multiplicadores de Lagrange com várias variáveis e várias restrições

•Dada w=f(x,y,z) e $\begin{cases} g(x,y)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$

•define-se F = f(x,y,z) – l1.g(x,y) - – l2.h(x,y,z)

•E um ponto poderá ser de máximo ou mínimo se:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)=0\,; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)=0\,; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda 1}(a,b,c)=0; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda 2}(a,b,c)=0$$

Exemplo: Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar um possível extremo da função

$W = f(x,y) = xz + yz$

Sujeita às restrições:

$x^2 + z^2 = 2$

$yz = 2$

•Uso das condições de Kuhn-Tucker para restrições de desigualdade (2 ou + variáveis)

•Dada z=f(x,y) e uma restrição g(x,y)£0

•Define-se F = f(x,y) – l.g(x,y)

•E um ponto poderá f(a,b) ser de máximo ou mínimo se:

$$\lambda \geq 0\,; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(a,b) = 0\,; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(a,b) = 0; \quad \mathrm{g}(x,y) \leq 0$$

Exemplo: Achar o retângulo de área máxima tal que

$b + h <= 4$